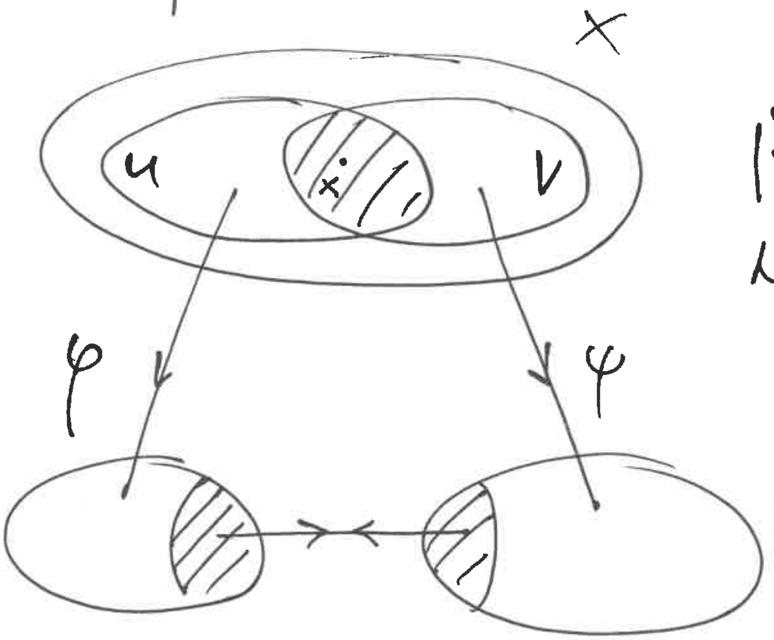
Transformace souřadnic $t \in T_xX$ při změně mapy



Nechť $t \in T_xX$.

Nechť (U,φ) a (V,ψ) jsou mapy na X, $x \in U \cap V$.

Nechť $t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial u_i}\Big|_x$

$= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{\partial}{\partial v_i}\Big|_x$.

$u = \varphi(x)$

$v = \psi(x)$

$$U = U(v) := (\varphi \circ \psi_{-1})(v)$$
$$v = v(u) := (\psi \circ \varphi_{-1})(u)$$

Potom máme

$$\boxed{\begin{aligned} \beta_j &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial u_i}(u)\,\alpha_i\,, \\ \alpha_j &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial v_i}(v)\,\beta_i\,. \end{aligned}} \qquad (\Delta)$$

Matice přechodu mezi souřadnicemi t jsou Jacobiho matice příslušných přechodových funkcí.

$\lceil$ Skutečně, neboť, $t(\psi_j) = \beta_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial v_j}{\partial u_i}(u)$. $\rfloor$

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial u_i}\Big|_x \overset{\text{def.}}{=} \frac{\partial(\psi_j \circ \varphi_{-1})}{\partial u_i}$$

Původní (fyzikální) definice T_xX:

$\underline{v} \in T_xX$ je přiřazení $(U,\varphi) \longmapsto (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$,

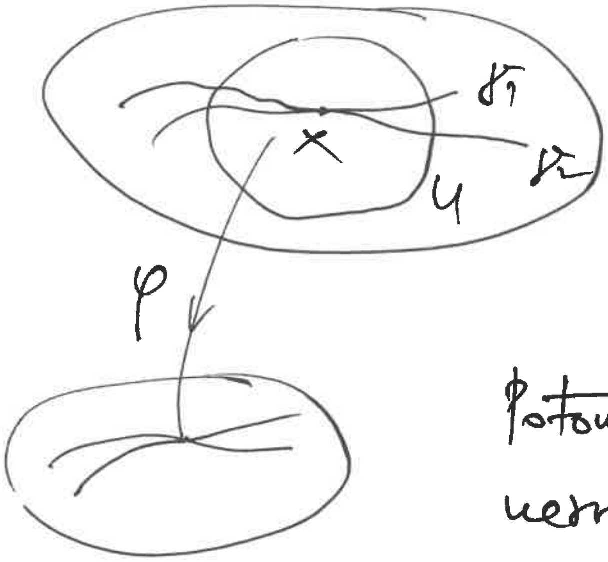
mapa na X

$x \in U$

které se při změně mapy (lokálních souřadnic) transformuje jako (Δ).

Jiná ekvivalentní definice T_xX:

Nechť Γ_x jsou všechny hladké křivky $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$ takové, že $\gamma(0) = x$. Potom pro $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_x$ definujeme, že $\gamma_1 \sim \gamma_2$, pokud existuje mapa (U,φ) na X, $x \in U$ taková, že



$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)(0).$$

Potom třídy ekvivalence Γ_x nazveme tečnými vektory v x k X, tzn. $T_xX = \Gamma_x/_\sim$

Kotečný prostor

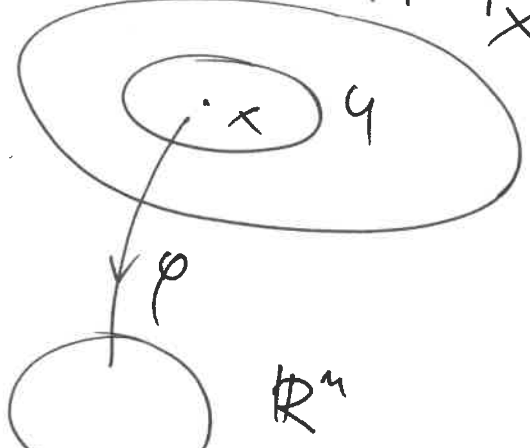
DEF. Nechť X je hladká varieta a $x \in X$.
Potom (i) $T_x^*X := (T_xX)^*$ nazveme kotečným prostorem k X v x.

(ii) Nechť $f \in \mathcal{E}_x$. Diferenciál $df(x)$ definujeme jako $[df(x)](\mathbb{t}) := \mathbb{t}(f)$, $\mathbb{t} \in T_xX$.

"derivace f ve směru $\mathbb{t}$"

Pozn: (i) Zřejmě $df(x) \in T_x^*X$.

(ii) Nechť (U, φ) je mapa na X a $x \in U$.



Potom $\{d\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ je báze T_x^*X, která je duální k bázi $\left\{\frac{\partial}{\partial u_i}\Big|_x\right\}$ prostoru T_xX.

$u = \varphi(x)$
$u_i = \varphi_i(x)$

[Skutečně, máme v x

$$(d\varphi_i)\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}\Big|_x =$$

$$= \frac{\partial(\overbrace{\varphi_i \circ \varphi_{-1}}^{u_i})}{\partial u_j} = \delta_{ij}. \quad ■ \Big]$$

Označení: Píšeme $du_i = d\varphi_i = d\varphi_i(x)$.

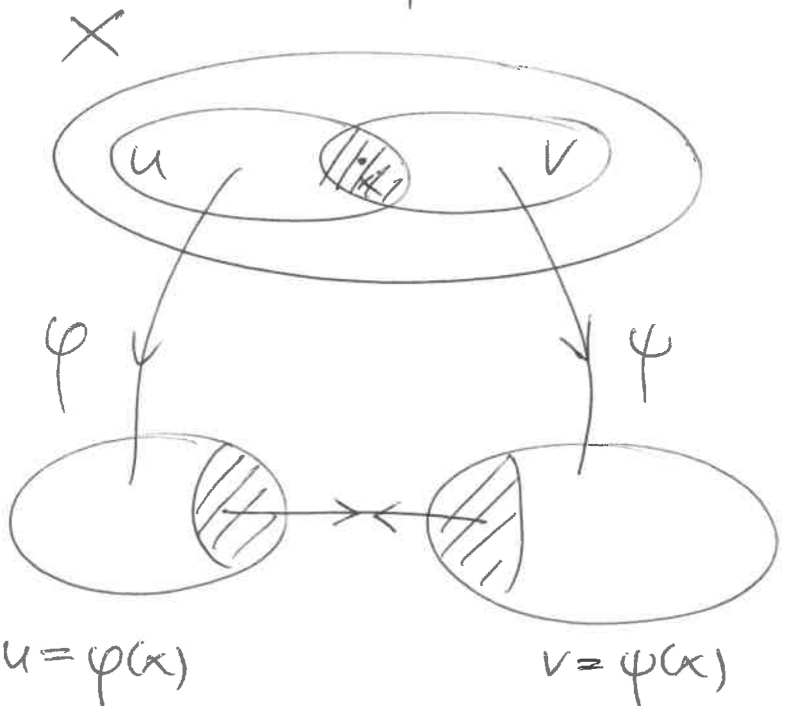
(iii) Nechť $f \in \mathcal{E}_x$, (U,φ) je mapa na X a $x \in U$. Potom na U máme v x

$$df = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_i}\, du_i,$$

pokud $u = \varphi(x)$.

[Skutečně, je-li v x $df = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, du_i$, potom $\alpha_i = df\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial u_i}$.]

Transformace souřadnic $\overset{\text{kovektor}}{\omega \in T_x^* X}$ při změně mapy. Nechť $\omega \in T_x^* X$. Nechť (U,φ), (V,ψ) jsou mapy na X a $x \in U \cap V$. Nechť $\omega = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, du_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i\, dv_i$. Potom



$u = u(v) := (\varphi \circ \psi^{-1})(v)$

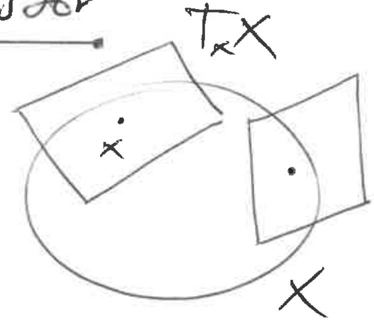
$v = v(u) := (\psi \circ \varphi^{-1})(u)$

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_j &= \sum_{i=1}^{m} \beta_i \frac{\partial v_i}{\partial u_j}(u), \\ \beta_j &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial v_j}(v). \end{aligned}}$$

(*)

⌈ Skutečně, neboť $\omega\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right) = \alpha_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \frac{\partial v_i}{\partial u_j}$, protože $dv_i\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right) = \frac{\partial v_i}{\partial u_j}$. ■ ⌋

Tečný fibrovaný prostor
(bundle)

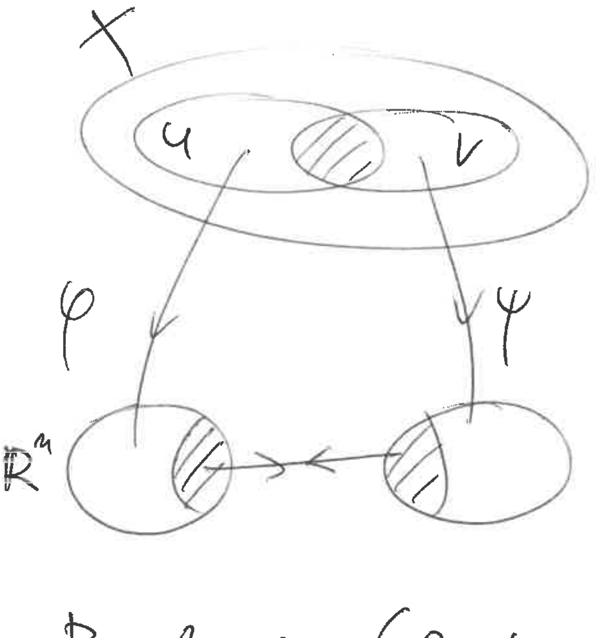


- fibre = vlákno, ...
- bundle = obal, balík, ...

Položme $TX := \bigcup_{x \in X} T_xX$, kde X je hladká varieta.

(i) Potom na TX lze zavést přirozenou strukturu hladké variety a $\dim TX = 2 \dim X$.

Cv. ⌈ MAPY NA TX: Nechť (U, φ) je mapa na X.



Položme $\overline{U} := \bigcup_{x \in U} T_xX$ a

$\overline{\varphi} : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ následovně:

$\overline{\varphi}(t) = (\varphi(x), v_1, \dots, v_n)$,

je-li $x \in U$, $t \in T_xX$ a

$t = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial u_i}\Big|_x$.

Přechodové funkce mezi mapami $(\overline{U}, \overline{\varphi})$ jsou hladké (Proč?) ⌋

(ii) zobrazení $\pi: TX \xrightarrow{\text{na}} X$ definované

$$\pi(\#) = x, \quad \# \in T_x X$$

je hladké a na. Pro každé $x \in X$ je
$\pi^{-1}(x) = T_x X \simeq \mathbb{R}^n$ (tzv. fibre)

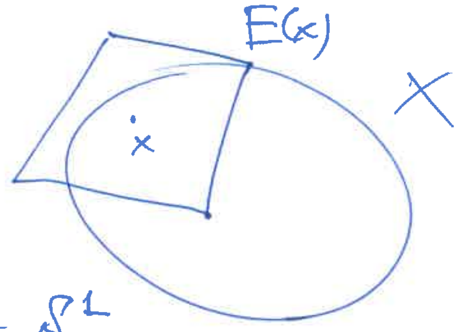
Pozn: π je tzv. projekce TX na X.

Kotečný fibrovaný prostor

Položme $T^*X := \bigcup_{x \in X} T^*_x X$.

Potom T^*X je hladká varieta dimenze $2 \cdot \dim X$ a projekce $\pi: T^*X \xrightarrow{\text{na}} X$ definovaná jako $\pi(\alpha) = x$, $\alpha \in T^*_x X$ je hladké a na. Dcv.

Obecně: k-dim. vektorový bandl E na varietě X je $E = \bigcup_{x \in X} E(x)$, kde $E(x)$ je k-dim. vektorový prostor závisející hladce na $x \in X$.



Příkl: (i) TX, T^*X

(ii) Möbiův list je 1-dim. vektorový bandl na S^1

line