VĚTA: Nechť $F: X \longrightarrow Y$ je hladké zobrazení mezi varietami. Potom

(i) F^* je lineární zobrazení $\mathcal{E}^*(Y)$ do $\mathcal{E}^*(X)$

(ii) $\forall \omega, \tau \in \mathcal{E}^*(Y)$: $F^*(\omega \wedge \tau) = F^*(\omega) \wedge F^*(\tau)$

(iii) Je-li $G: W \longrightarrow X$ hladké a $\omega \in \mathcal{E}^*(Y)$, potom $(F \circ G)^*(\omega) = G^*(F^*(\omega))$

(iv) Nechť $f \in \mathcal{E}^0(Y) = C^\infty(Y)$. Potom $df \in \mathcal{E}^1(Y)$ a $F^*(df) = d(\underbrace{f \circ F}_{= F^*(f)}) \in \mathcal{E}^1(X)$.

DŮKAZ: (a) F^* je lineární z definice

(b) Díky (a) stačí ukázat (ii) pro $\omega \in \mathcal{E}^k(Y)$, $\tau \in \mathcal{E}^\ell(Y)$. Nechť $x \in X$. Potom v x máme pro každé $v_1, \dots, v_{k+\ell} \in T_x X$ a $w_i = F_*(x) v_i$

$$[F^*(\omega \wedge \tau)](v_1, \dots, v_{k+\ell}) = (\omega \wedge \tau)(w_1, \dots, w_k) =$$

⌜vynecháváme x⌟

$$= \frac{1}{k!\,\ell!} \sum_{\pi \in S_{k+\ell}} \operatorname{sgn} \pi \cdot \omega(w_{\pi(1)}, \dots, w_{\pi(k)}) \cdot \tau(w_{\pi(k+1)}, \dots, w_{\pi(k+\ell)})$$

$$= \quad —\|— \quad (F^*\omega)(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)})\, F^*(\tau)(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+\ell)})$$

$$= [F^*\omega \wedge F^*\tau](v_1,\dots,v_{k+l})$$

$x = G(w)$

(c) Pro $\omega \in \mathcal{E}^k(Y)$, $w \in W$ a $v_1,\dots,v_k \in T_wW$ máme

$$[(F\circ G)^*\omega](v_1,\dots,v_k) = \omega\big((F\circ G)_*(w)v_1,\dots,(F\circ G)_*(w)v_k\big)$$

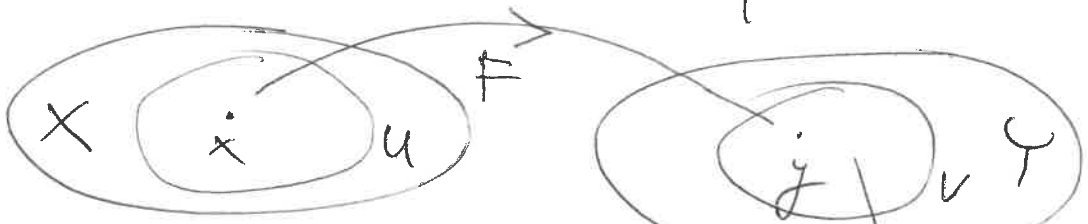
$$= \omega\big(F_*(G(w))(G_*(w)v_1),\dots,F_*(G(w))(G_*(w)v_k)\big)$$

$$= (F^*\omega)(G_*(w)v_1,\dots,G_*(w)v_k) = [G^*(F^*\omega)](v_1,\dots,v_k)$$

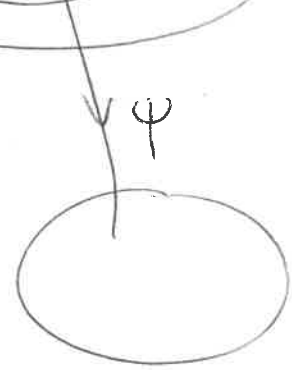
(d) Ukážeme (iv). Nechť $U \subset Y$ je otevřená a $V \in \mathfrak{X}(U)$. Potom na U je $df(V) = V(f) \in \mathcal{E}^\infty(U)$. Dále pro $t \in T_xX$ je $[F^*(df)](t) = df(F_*(x)t) =$

$$= (F_*(x)t)(f) = t(f\circ F) = [d(f\circ F)](t).$$

(e) Nechť $\omega \in \mathcal{E}^*(Y)$. Ukážeme, že $F^*(\omega) \in \mathcal{E}^*(X)$.



Nechť $v = \varphi(y)$, $y \in V$ jsou lokální souřadnice na Y. Potom na V je



$$\omega = \sum_I \omega_I \, dv_I, \text{ kde } \omega_I \in \mathcal{E}^\infty(V).$$

Na $U := F^{-1}(V)$ máme

$$F^*\omega \overset{(iii)}{=} \sum_I {}' \underbrace{(\omega_I \circ F)}_{\in\, \mathcal{E}^\infty(U)} F^*(dv_I), \qquad (\times)$$

kde $F^*(dv_I) = F^*(dv_{i_1}) \wedge \dots \wedge F^*(dv_{i_k})$,

je-li $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ vzestupná. Je-li $F_i := \varphi_i \circ F$, potom

$$F^*(dv_i) \overset{(iv)}{=} dF_i \in \mathcal{E}^1(U). \quad \blacksquare$$

<u>Pozn:</u> Z $(\times)$ jasné, že F^* zobecňuje přenos forem, který jsme zavedli ne Geom. 2.