Generovaná topologie (an)

Nechť X je množina.

(i) Jsou-li $\mathcal{T}_\alpha$, $\alpha \in A$ topologie na X, potom

$$\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha \text{ je topologie na } X.$$

⌜ Snadno ověříme (O1) – (O3) ⌟

(ii) Nechť $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Potom ex. <u>nejmenší</u> topologie $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ na X, která obsahuje $\mathcal{S}$. Říkáme, že $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ je <u>topologie generovaná</u> $\mathcal{S}$.

⌜ Podle (i) zřejmě $\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \bigcap \{\mathcal{T} \text{ je topol. na } X \mid \mathcal{S} \subset \mathcal{T}\}$. ⌟

diskrét. top.

(iii) Nechť $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ je taková, že

(a) $\mathcal{B}$ <u>pokrývá</u> X, tzn. $\bigcup \mathcal{B} = X$,

(b) $\mathcal{B}$ je uzavřená na konečné průniky, tzn.

$\forall\, G_1, G_2 \in \mathcal{B},\ G_1 \cap G_2 \neq \emptyset :\ G_1 \cap G_2 \in \mathcal{B}$.

Potom $\mathcal{B}$ je báze $\mathcal{T}(\mathcal{B})$.

⌜ <u>Důkaz</u>: Definujme $\mathcal{T}$ jako systém všech $G \subset X$ takových, že existují $G_\alpha \in \mathcal{B}$, $\alpha \in A$ (lib.) tak, že

$$G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha .$$

Stačí ukázat, že $\mathcal{T}$ je topologie na X, tzn. splňuje (O1) – (O3). Zřejmě (O1).

GTR

(O2): $\bigcup\limits_{\substack{\alpha\in A}} \underset{\substack{\cap\\ \mathcal{T}}}{G_\alpha} = \bigcup\limits_{\alpha\in A}\left(\bigcup\limits_{\beta\in B_\alpha} \underset{\substack{\cap\\ \mathcal{B}}}{G_{\alpha,\beta}}\right) = \bigcup\limits_{\substack{\alpha\in A\\ \beta\in B_\alpha}} \underset{\substack{\cap\\ \mathcal{B}}}{G_{\alpha,\beta}} \in \mathcal{T}$;

(O3): $\underset{\substack{\cap\\ \mathcal{T}}}{G_1}\cap \underset{\substack{\cap\\ \mathcal{T}}}{G_2} = \left(\bigcup\limits_{\alpha\in A} \underset{\substack{\cap\\ \mathcal{B}}}{G_{1,\alpha}}\right)\cap\left(\bigcup\limits_{\beta\in B} \underset{\substack{\cap\\ \mathcal{B}}}{G_{2,\beta}}\right) = \bigcup\limits_{\substack{\alpha\in A\\ \beta\in B}} \underset{\substack{\cap\\ \mathcal{B}\cup\{\emptyset\}}}{\left(G_{1,\alpha}\cap G_{2,\beta}\right)} \in \mathcal{T}$ ▨

Př. Jak vypadá na $\mathbb{R}$ topologie generovaná:

(a) všemi ot. intervaly délky 1;

(b) všemi ot. intervaly s racionál. koncovými body;

(c) všemi jednobodovými množinami;

(d) všemi uzavřenými intervaly;

(e) $\{[a,b) \mid -\infty < a < b \leq +\infty\}$.

Je generující systém báze této topologie?

Řešení: (a), (b): Euklid. topologie na $\mathbb{R}$

(c), (d): diskrétní top.

(e) Sorgenfreyho přímka

* větší než Euklid. topologie, protože (jemnější)

$$(a,b) = \bigcup_{a<c<b} [c,b) \text{ je ot.}$$

* $[a,b)$ jsou zároveň otevřené i uzavřené, protože

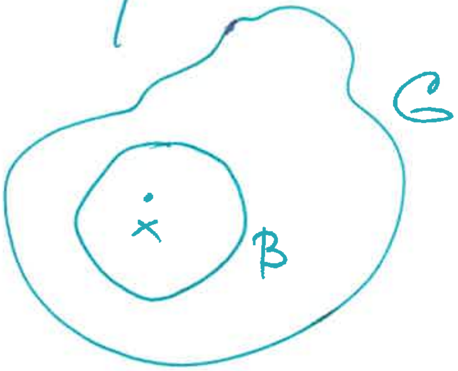
$$\mathbb{R}\setminus[a,b) = \underset{\text{ot.}}{(-\infty,a)} \cup \underset{\text{ot.}}{[b,+\infty)} \text{ je ot.}$$

* Hausdorffův

* menší (hrubší) než diskrétní, protože $\{x\}$ není ot.

Pozn: (i) $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ je báze topologie $\mathcal{T}$, právě když $\forall G \in \mathcal{T}\ \forall x \in G\ \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset G$.

GTB



$\boxed{\Rightarrow}$ Nechť $G \in \mathcal{T}$ a $x \in G$. Potom

$$G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha,$$

kde $G_\alpha \in \mathcal{B}$, $\alpha \in A$. Ex. $\alpha \in A$, že $x \in G_\alpha \subset G$.

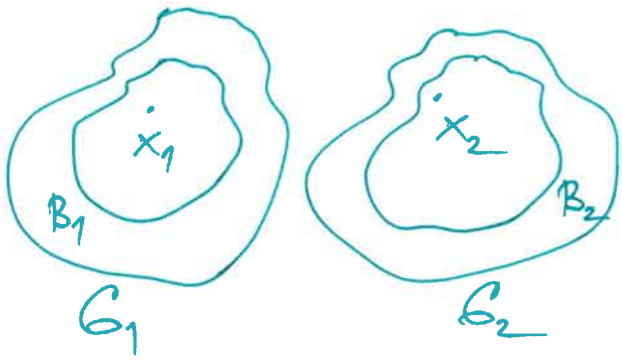
$\boxed{\Leftarrow}$ Nechť $G \in \mathcal{T}$. Pro každé $x \in G$ ex. $B_x \in \mathcal{B}$, že

$$x \in B_x \subset G.$$

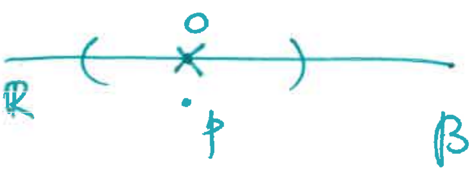
Potom $G = \bigcup_{x \in G} B_x$. ▨

(ii) Nechť $\mathcal{B}$ je báze topologie $\mathcal{T}$ na X. Potom $(X, \mathcal{T})$ je Hausdorffův, právě když $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2\ \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B} : x_1 \in B_1,\ x_2 \in B_2$ a $B_1 \cap B_2 = \emptyset$

$\Leftarrow$: jasné; $\Rightarrow$:



Př. Nechť $\mathcal{T}_e$ je Euklid. topol. na $\mathbb{R}$. Nechť $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$, kde $p \notin \mathbb{R}$. Na X uvažme topologii $\mathcal{T}$ generovanou



$$\mathcal{B} := \mathcal{T}_e \cup \{(G \setminus \{0\}) \cup \{p\} \mid G \in \mathcal{T}_e,\ 0 \in G\}.$$

Potom $(X, \mathcal{T})$ není Hausdorff.

Skutečně $\mathcal{B}$ je báze $\mathcal{T}$. GT4

Nechť $G_1, G_2 \in \mathcal{B}$, $0 \in G_1$ a $p \in G_2$.

Potom $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. Ex. $\varepsilon > 0$ tak, že

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \subset G_1 \quad \text{a} \quad \big((-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}\big) \cup \{p\} \subset G_2.$$

Tudíž $\emptyset \neq (-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon) \subset G_1 \cap G_2$.

x

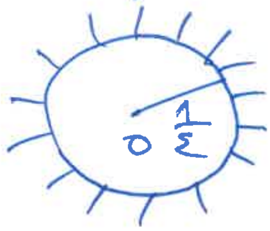
Rozšíření o nekonečna

Př. UKA: Riemannova sféra

Nechť $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ($\mathbb{C}$: $\mathbb{R}^2$) a na $\mathbb{S}$ uvažujme topologii generovanou

$\mathcal{T}_{\mathbb{C}} \cup \{U(\infty, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$, kde

($\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$: eukl. top. na $\mathbb{R}^2$)



$$U(\infty, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| > \tfrac{1}{\varepsilon}\} \cup \{\infty\}.$$

Potom $\mathbb{S} \simeq S^2$ (S^2: jednot. sféra v $\mathbb{R}^3$) a homeomorfismus je stereografická projekce.

Pozn: Jde o tzv. jednobodovou kompaktifikaci $\mathbb{R}^2$.

Př. MA: Nechť $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ a na $\mathbb{R}^*$ uvažme topologii generovanou

$\mathcal{T}_E \cup \{U(\pm\infty, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$, kde

($\mathcal{T}_E$: eukl. top. na $\mathbb{R}$)

$$U(+\infty, \varepsilon) := \left(\tfrac{1}{\varepsilon}, +\infty\right) \cup \{+\infty\} \quad \text{a}$$
$$U(-\infty, \varepsilon) := \{-\infty\} \cup \left(-\infty, -\tfrac{1}{\varepsilon}\right).$$

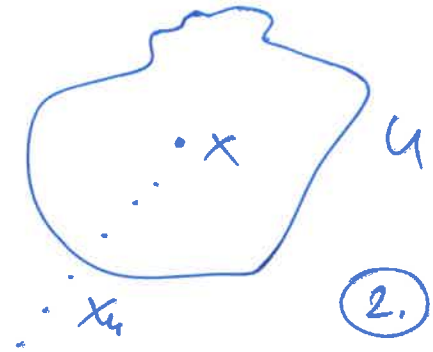
Potom $\mathbb{R}^* \simeq [-1,1]$

Při Je-li $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ jednobodová kompaktifikace $\mathbb{R}$, potom $\overline{\mathbb{R}} \simeq S^1$

jednotková kružnice v $\mathbb{R}^2$

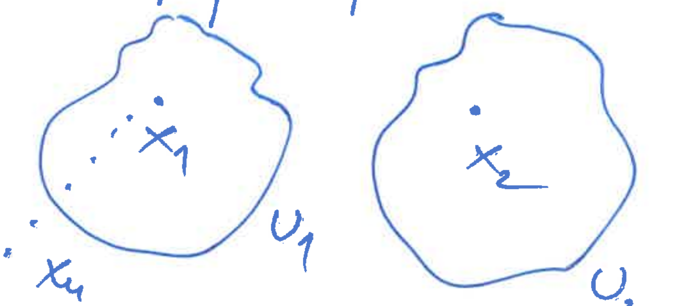
Konvergence

DEF. Nechť $(x_n) \subset X$ a $x \in X$. Potom $x_n \to x$ v $(X, \mathcal{T})$, pokud $\forall U \in \mathcal{T}, x \in U$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$: $x_n \in U$.



1. V indiskrétním prostoru X každá $(x_n) \subset X$ ~~má~~ konverguje ke každému $x \in X$.

2. V Hausdorffově $(X, \mathcal{T})$ má každá $(x_n) \subset X$ nejvýše jednu limitu.



3. V diskrétním prostoru X je konvergentní pouze $(x_n) \subset X$ taková, že ex. $x \in X$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, pro kterou $x_n = x$, $n \geq n_0$.

4. V metrickém (X, ρ) konvergence určuje jednoznačně topologii $\mathcal{T}_\rho$.

Skutečně, pro $F \subset X$ platí, že $x \in \overline{F}$, právě když $\exists (x_n) \subset F : x_n \to x$ (*).

Speciálně, $F \subset X$ je uzavřená (tzn. $\overline{F} = F$), právě když $(x_n) \subset F$, $x_n \to x \Rightarrow x \in F$.

K2

(T.) V topologických prostorech obecně konvergence neurčuje topologii.

(Př.) Nechť X je nespočetná, $\mathcal{T}_1$ je diskrétní topologie a $\mathcal{T}_2$ je topologie generovaná $\mathcal{S} := \{G \subset X \mid X \setminus G \text{ je nejvýše spočetná}\}$ (báze). Potom $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$, ale konvergence v $(X, \mathcal{T}_1)$ a $(X, \mathcal{T}_2)$ je stejná.

(Př.) $\boxed{\text{SCHUR}}$ V ℓ^1 konvergence v normové topologii a slabé topologii je stejná.

(6.) Nechť $(X, \mathcal{T})$ má spočetnou bázi $\mathcal{B}$. Potom platí (*), tudíž konvergence jednoznačně určuje $\mathcal{T}$.