

Uvrateň a exaktní formy (skupina 3, 15)
 Necht Ω je hlad. varosta. Spec. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina
DEF. Forme $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ se nazývají

- (i) uvrateň, je-li $d\omega = 0$;
- (ii) exaktní, ex.-li $\tau \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$ takové, že
 $d\tau = \omega$

Platí: ① Je-li ω exaktní, potom je ω uvrateň.

Je-li $\omega = d\tau$, potom $d\omega = d(d\tau) = 0$.

② Poincaréova lemma (skupina 3, 10, 3, 15 (f))

Necht Ω je otevřená koule v $\mathbb{R}^n$. Potom pro $k > 0$ každé $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$, které je uvrateň, je i exaktní.

Pom: Platí i pro hvězdnité nebo jednodušší souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

③ Necht $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Potom

(Δ) $\omega := \frac{x}{x^2+y^2} dy - \frac{y}{x^2+y^2} dx \in \mathcal{E}^1(\Omega)$
 je uvrateň, ale není exaktní.

x

* skupina V. Souček, L.K., J.T.: MA na varostech

(i) $\boxed{dw=0}$

$$\begin{aligned} dw &= ((x^2+y^2)^{-1} - x(x^2+y^2)^{-2} \cdot 2x) dx + dy \\ &\quad + ((x^2+y^2)^{-1} - y(x^2+y^2)^{-2} \cdot 2y) dy + dx \\ &= \left(\frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} \right) dx + dy = 0 \end{aligned}$$

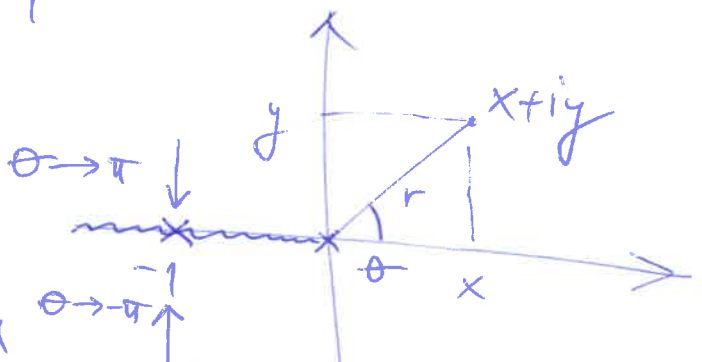
(ii) Transformation & polarwechsel koordinaten in kartesischen $(x,y) = \phi(r,\theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta)$
 ist Automorphismus für $(r,\theta) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$
 mit $(x,y) \in U := \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0]$.

Manne

- $r = \sqrt{x^2+y^2}$

- $\theta = \theta(x,y) := (\phi^{-1})_2(x,y)$,

$(x,y) \in U$



ist kleiner höchster argumente boden
 $(x,y) = x+iy$

Platz, $\boxed{d\theta = \omega \text{ in } U}$. (*)

Skizze, manne in $(0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \quad / -y = -r \sin \theta$$

$$dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \quad / x = r \cos \theta$$

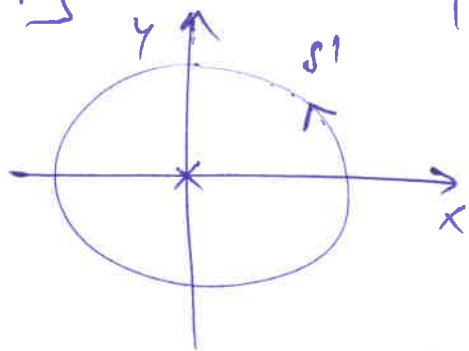
$$-ydx + xdy = r^2 d\theta$$

Z (*) meane, $\vec{r}_\theta d\omega = d(d\theta) \Rightarrow$ ue U
 a $\vec{r}_\theta$ spjtorid. $d\omega \Rightarrow$ ue $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\theta, 0)\}$.

(iii) as new exahdu ue $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\theta, 0)\}$

Sporku: Nocht $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(\theta, 0)\})$ a $\omega = df$.
 a poton ue U meane $d\theta = \omega = df$, tudir
 $d(\theta - f) \Rightarrow$ ue U . Existje tady $c \in \mathbb{R}$ tak,
 $\vec{r}_\theta \theta = f + c$ ue U , co $\vec{r}_\theta$ je spor, potoro
 θ ueto am spjto romnt ue $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\theta, 0)\}$.
 $\Downarrow$

B) zinek: Plath, ro



$$\begin{aligned} \int_{S^1} \omega &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta \\ x &= \cos \theta \\ y &= \sin \theta \\ &= 2\pi, \text{ ale } \vec{r}_\theta \text{ Stokroty} \end{aligned}$$

$$\vec{r}_\theta \text{ je } \int_{S^1} \omega = \int_{S^1} df = \int_{\partial S^1} f = 0, \text{ potoro}$$

$\partial S^1 = \emptyset$. To $\vec{r}_\theta$ je spor. $\Downarrow$

De Rhamov komplex

DR 1

Nechť M je hladké n -rozměrná manifold.

Uvažme komplex^{*}

$$\mathcal{E}^0(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{E}^n(M),$$

Kde $\mathcal{E}^k(M)$ je vektorový prostor všech k-dívků na M a d je de Rham (vůjiv) diferenciál. Označme

$$\mathcal{C}^k(M) := \{ \omega \in \mathcal{E}^k(M) \mid d\omega = 0 \},$$

uzavřené

$$\mathcal{L}^k(M) := \{ \omega \in \mathcal{E}^k(M) \mid \exists \tau \in \mathcal{E}^{k-1}(M) : \omega = d\tau \},$$

exaktní

$$H_{DR}^k(M) := \mathcal{C}^k(M) / \mathcal{L}^k(M) \quad \dots \quad \text{k-tá de Rhamova kohomologie } M$$

Pozn: (i) Protože $d \circ d = 0$, je $\mathcal{L}^k(M) \subset \mathcal{C}^k(M)$.

(ii) $H^k(M) := H_{DR}^k(M) = 0 \iff$ každá uzavřená

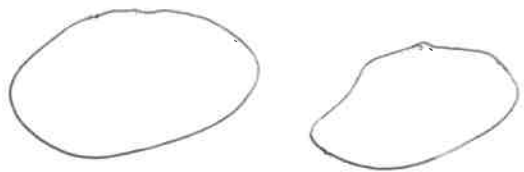
k -forma ω na M je exaktní

každá komponenta

(iii) $H^0(M) = \mathcal{C}^0(M) = \{ \text{konstantní funkce na } M \}$

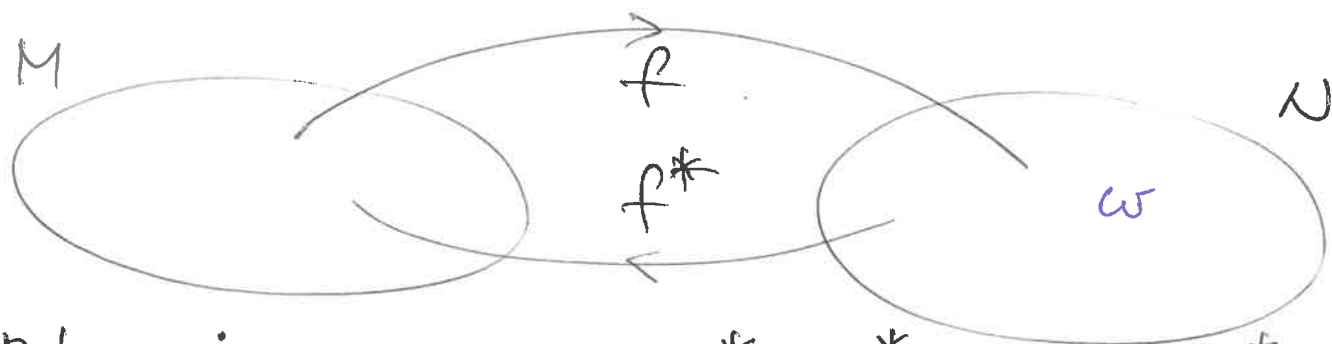
$\cong \mathbb{R}$, je-li M souvislá;

$\cong \mathbb{R}^p$, má-li M p komponent.



^{*} $\dots \rightarrow V_i \xrightarrow{L_i} V_{i+1} \xrightarrow{L_{i+1}} V_{i+2} \rightarrow \dots$
Kde V_i jsou vektorové prostory, L_i lineární zobrazení
zobrazování a $L_{i+1} \circ L_i = 0$

Nadto $f: M \rightarrow N$ je hladko zobrazow | DR2
mezi manifoldami



Potom jsme zavedli $f^*: \mathcal{E}^*(N) \rightarrow \mathcal{E}^*(M)$.

Označme $f_k^* := f^*|_{\mathcal{E}^k(N)}$.

Potom $f_k^*: \mathcal{E}^k(N) \rightarrow \mathcal{E}^k(M)$ indukuj $\bar{a}$
zobrazow $f_k^*: H^k(N) \rightarrow H^k(M)$.

Skutečně, platí

$$f_k^*([\omega]) := [f_k^*\omega],$$

Kde $\omega \in \mathcal{E}^k(N)$ a $[\omega] := \{\omega + d\tau \mid \tau \in \mathcal{E}^{k-1}(N)\}$
 $\in H^k(N)$. Důležité je v porád $\bar{a}$ ku, protože

$f_k^*\omega$ je uzavřen $\bar{a}$ nebo exaktn $\bar{a}$ k -forma
na M , je-li takov $\bar{a}$ i forma ω na N .

To plyne z rovnost $\bar{a}$ $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.

Pozn: (i) Jed-li $\text{id} : M \rightarrow M$ identita ne

hled. kvěsto, potom $\text{id}_k^* : \mathcal{E}^k(M) \rightarrow \mathcal{E}^k(M)$
je identita ne $\mathcal{E}^k(M)$, tedy i ne $H^k(M)$

(ii) Necht $f : M \rightarrow N$ je diffeomorfismus
nebo hled. kvěstau. Potom $f_k^* : \mathcal{E}^k(N) \rightarrow$

$\mathcal{E}^k(M)$ je izomorfismus, (strukturně) máme

$$f_k^* \circ (f_{-1})_k^* = (f_{-1} \circ f)_k^* = \text{id}_{\mathcal{E}^k(M)} \quad \text{a} \quad (f_{-1})_k^* \circ f_k^* = \text{id}_{\mathcal{E}^k(N)}$$

Máme tedy

Fakt Jed-li hled. kvěst M a N diffeomorf-
no, potom pro každé $k=0,1,2,\dots$ jsou
 $H^k(M)$ a $H^k(N)$ izomorfní.

Př (i) $\dim H^k(S^n) = 1$ pro $k=0,n$,
 $= 0$ jinak; $\Rightarrow S^n \neq T^n$
pro $n \geq 2$

(ii) $\dim H^k(T^n) = \binom{n}{k}$, $k=0,\dots,n$

(iii) $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \alpha(0,1)) \stackrel{\text{vlast}}{=} \{\alpha[\omega] \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$,

Kde $\omega := \frac{x}{x^2+y^2} dy - \frac{y}{x^2+y^2} dx$ a

$[\omega] := \{\omega + df \mid f \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \alpha(0,1))\}$,

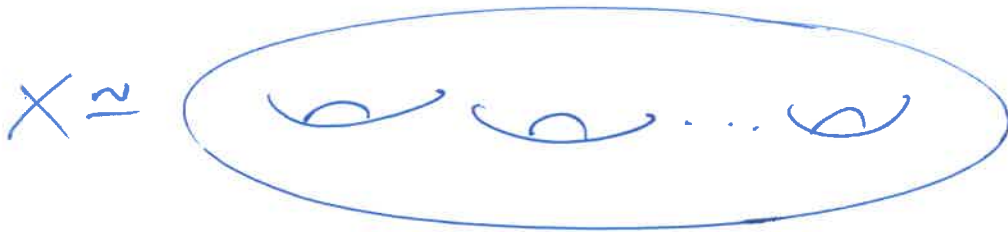
Něboli $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \alpha(0,1)) \simeq \mathbb{R}$.

Observe! $2g$ -li $X \simeq \underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_{\text{somehow}}$ Hom?

kompaktný, orientovat. $\mathbb{Z}$ -komplex van der

rodu g , potom $H^0(X) = \mathbb{R}$, $H^1(X) = \mathbb{R}^{2g}$,
 $\# \text{ der } \vee X$

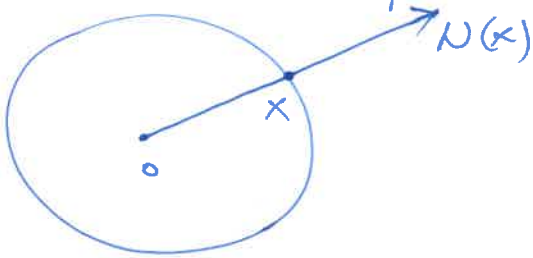
$$H^2(X) = \mathbb{R}.$$



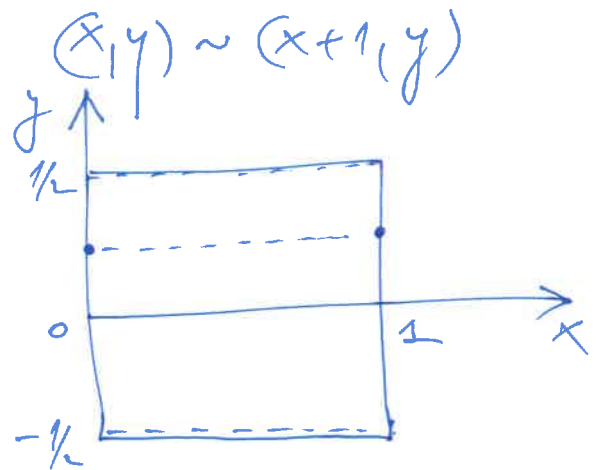
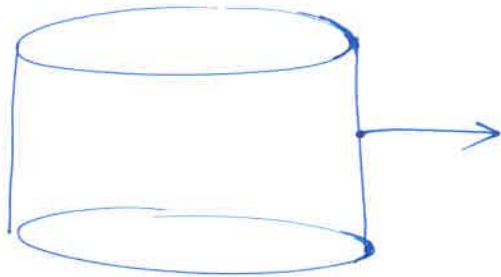
Owentyce - problemy

ORP1

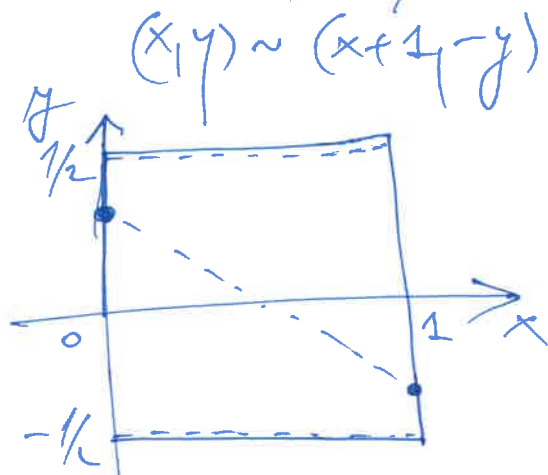
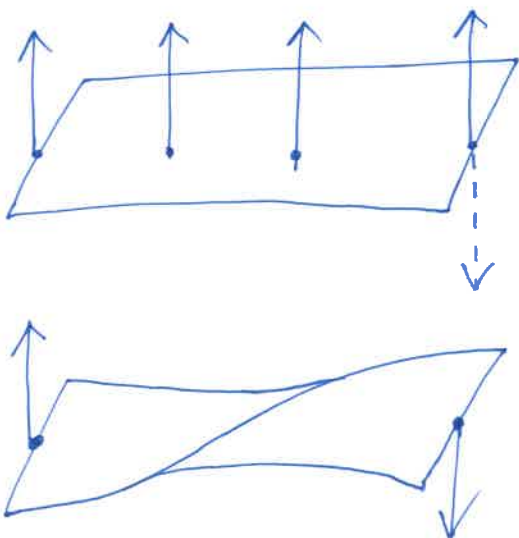
(Pr.) sfera $S^4 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ is owent., prototyp
 $N(x) := x, x \in S^4$ is spójne jednot. normowe pole



(Pr.) walcowa płaszczyzna $V_2 \simeq \mathbb{R} \times (-1/4, 1/2) / \sim$, gdzie
is owent.

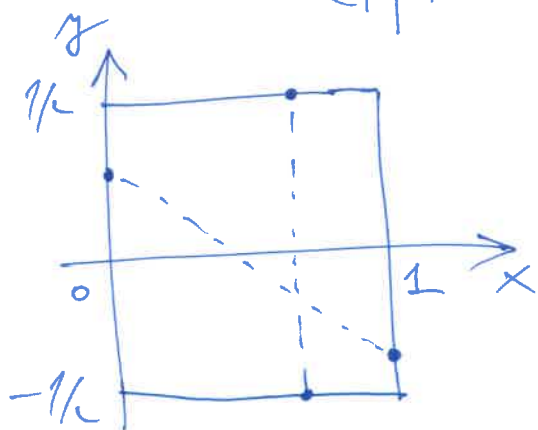


(Pr.) Möbiowa pasma $M_2 \simeq \mathbb{R} \times (-1/4, 1/2) / \sim$, gdzie
nie is owent.



Pr. 1. KLEINOVA LÁHEV $K_2 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \sim$ ORP2

Kde $(x, y) \sim (x, y+1)$ a $(x, y) \sim (x+1, -y)$



Pozn: Nejde realizovat v $\mathbb{R}^3$, pouze v $\mathbb{R}^4$ "model" v $\mathbb{R}^3$ pod vřetovím

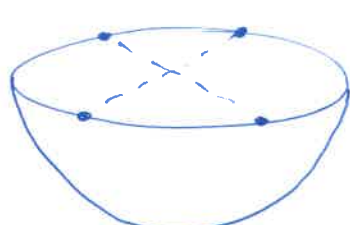
- $U := \mathbb{R} \times (-1/2, 1/2) / \sim$ je otevřená množina v K_2 , která je diffeomorfní s Möbiovým páskem M_2 , tudíž je K_2 neorientovatelná.

Pozn: Hlad. variety X dim. 2 neú orient-
ovatelná ^{Top.}, právě když X obsahuje M_2 ,
tj. ex. otevřená $U \subset X$ taková, že $U \cong M_2$
diffeom.
homeom.

[$\Leftarrow$ zřejmě; $\Rightarrow$ těžší; pro topol. variety je to
dehnice]

Pr. Projektivní prostor $\mathbb{RP}_n := \{1\text{-dimenz. podprostory v } \mathbb{R}^{n+1}\}$ ORP3

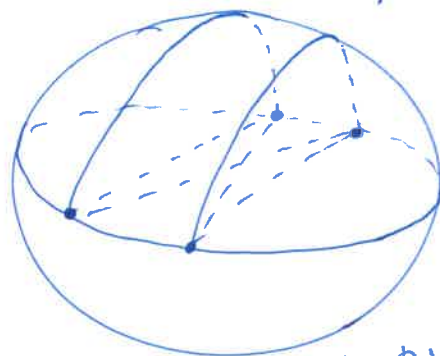
- jde o kladkou n -dim. varietu (pro $n=2$ plů, obecně podobně)

• $\mathbb{P}_n := \mathbb{RP}_n \simeq S^n / \sim \simeq S^n \times H^{n+1} / \sim$ kde $x \sim -x$ protipóhly bod


 dolní pól

(i) $\mathbb{P}_1 \simeq S^1$ je oval

(ii) $\mathbb{P}_2$ není oval, protože $\mathbb{P}_2 \simeq S^2 / \sim$ s $x \sim -x$ obsahuje M_2

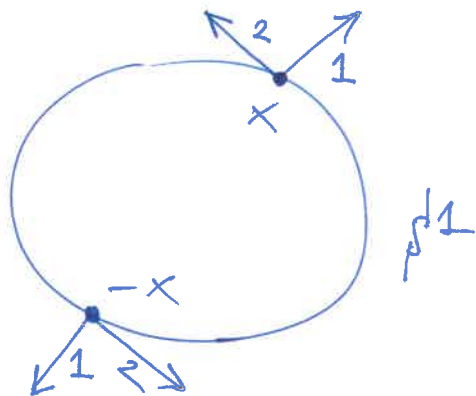


(iii) $\mathbb{P}_n$ je orientabilní $\Leftrightarrow n$ je liché

$\Leftrightarrow \phi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \phi(x) = -x$ je lineární transformace sdružená s orientací

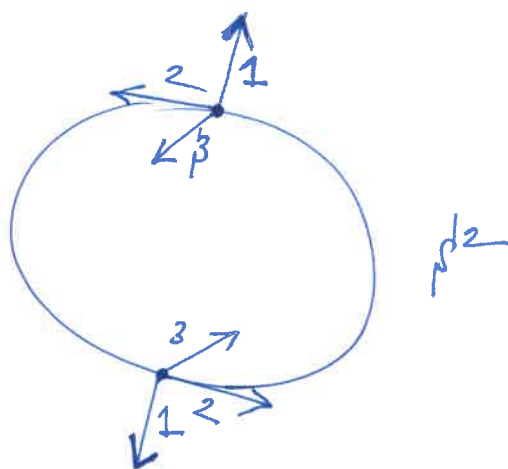
$$n=1$$

ORY



stopie onant

$$\mathbb{P}_1 \cong S^1$$

$$\eta = 2$$


opache onwud

Fahrt

Noodt X ge' hied, inwotk diu. n.

Portion X is owned in blue, prior to

ex. forme $\omega \in E^1(X)$ talow $\exists x \in X$ $\omega(x) \neq 0$ na X
ow surface $\text{fm. } \omega(x) \neq 0 \quad \forall x \in X.$