Přehled top. variet

1, $U \subset \mathbb{R}^n$ ot.

2, n-sféra S^n, n-plochy v $\mathbb{R}^N$

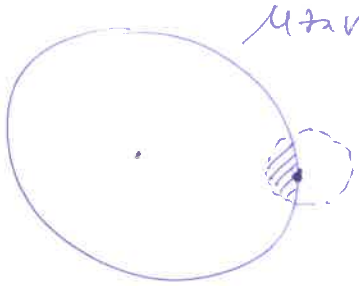
3, Je-li X souv. 1-dim. top. var., potom je homeom. buď s S^1 anebo $\mathbb{R}^1$, topologická kružnice nebo přímka
komp. nekomp.

Důkaz: Je zcela triviální?

4, 'osmička' není top. varieta

[okolí S není homeomorfní s intervalem] Proč?

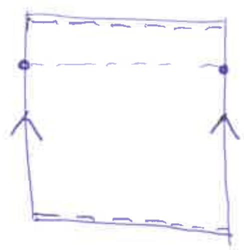
5, v $\mathbb{R}^2$ otevřený kruh je 2-rozm. var., ale uzavřený kruh není (je to varieta s okrajem)
[bude později]



Konstrukce 2-rozm. var.

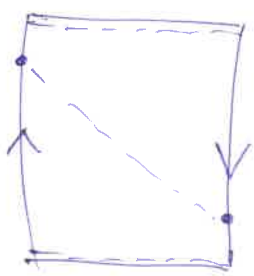
(Neformálně), formálně jako podíly $\mathbb{R}^2$

(a)



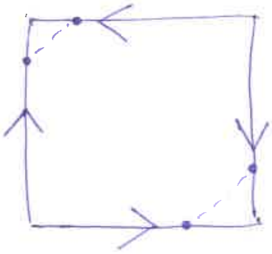
slepení množiny ot. válcová plocha

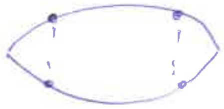
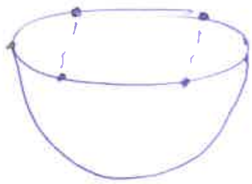
(b) Möbiův list: neorient. 2-rozm. varieta
(má jednu stranu)

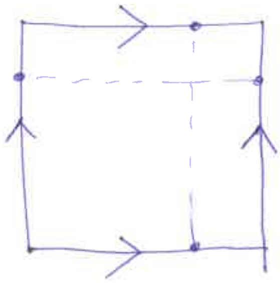


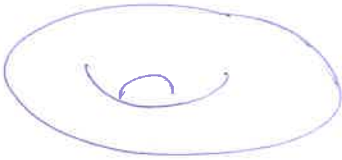
Co se stane, když ML rozstřihneme podél obvodu v 1/2 a v 1/3?

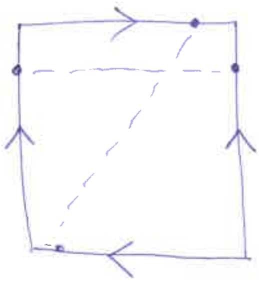
kompaktní 2-rozm. var.

(a)  slepování soused. stran

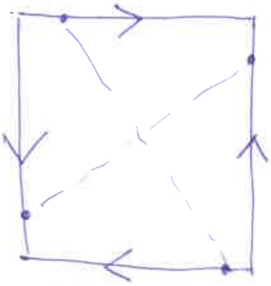
≃ homeom.  ≃  ≃ S^2

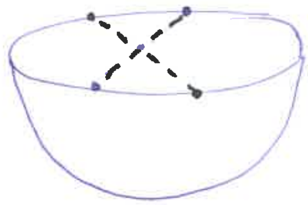
(b)  slepování protilehlých stran

≃  T^2 2-torus anuloid

(c)  slepujeme protilehlé strany

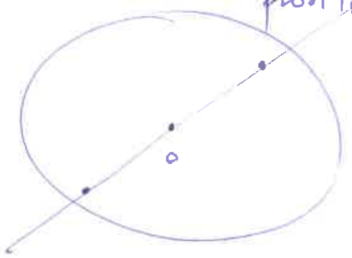
Kleinova láhev: neorientovatelná, nelze realizovat jako plochu v $\mathbb{R}^3$ (jen v $\mathbb{R}^4$)

(d)  slepujeme protilehlé strany

≃  ≃ 

protilehlé hrany, body ztotožňujeme

$\simeq S^2/\sim$ ztotožňujeme protilehlé body $\simeq P(\mathbb{R}^3) =: P_2$ reálná projektivní rovina



1-dim. podprostor v $\mathbb{R}^3$ je určen dvojicí protilehlých bodů na S^2, které obs.

neorientovatelná

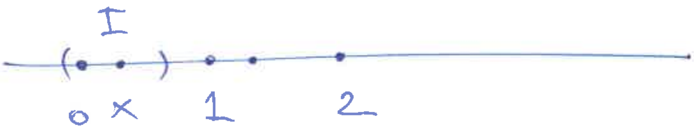
Př. Na $\mathbb{R}$ uvažme ekvivalenci

$$x \sim y \iff y - x \in \mathbb{Z}.$$

Dokažte, že podílový prostor $\mathbb{R}/\sim$ je topolog. varieta dim 1 a najděte na $\mathbb{R}/\sim$ přirozený hladký atlas, tj. ukažte, že $\mathbb{R}/\sim$ je hladká varieta dim 1.

(1) Nechť $\pi : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}/\sim$ je projekce.

$$x \longmapsto [x] := x + \mathbb{Z}$$



Nechť $x \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in (0, 1/2]$. Potom pro $I = I(x,\varepsilon) := (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ je $\pi|_I$ prosté a

$$\pi|_I : I \xrightarrow{\text{na}} U \text{ je homeomorf.},$$

kde $U = U(x,\varepsilon) := \{[y] \mid y \in I(x,\varepsilon)\}$.

Skutečně, $U \subset \mathbb{R}/\sim$ je otevřená, protože

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{(n+I)}_{\text{ot. v } \mathbb{R}} \text{ je otevř. v } \mathbb{R},$$

($\pi|_I$ je otevřené)

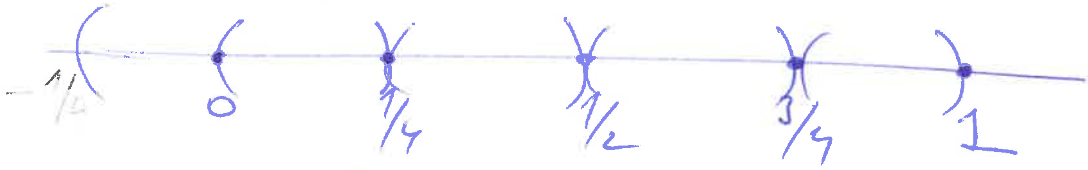
Zřejmě $\pi|_I$ je spojité. Rovněž $(\pi|_I)^{-1}$ je spojitá, protože pro každou otevřenou $\tilde{I} \subset I$ platí

$$\left((\pi|_I)^{-1}\right)^{-1}(\tilde{I}) = \pi(\tilde{I}) \text{ je ot. v } \mathbb{R}/\sim,$$

neboli $\pi^{-1}(\pi(\tilde{I})) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n+\tilde{I})$ je ot. v $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}/\sim$ 2

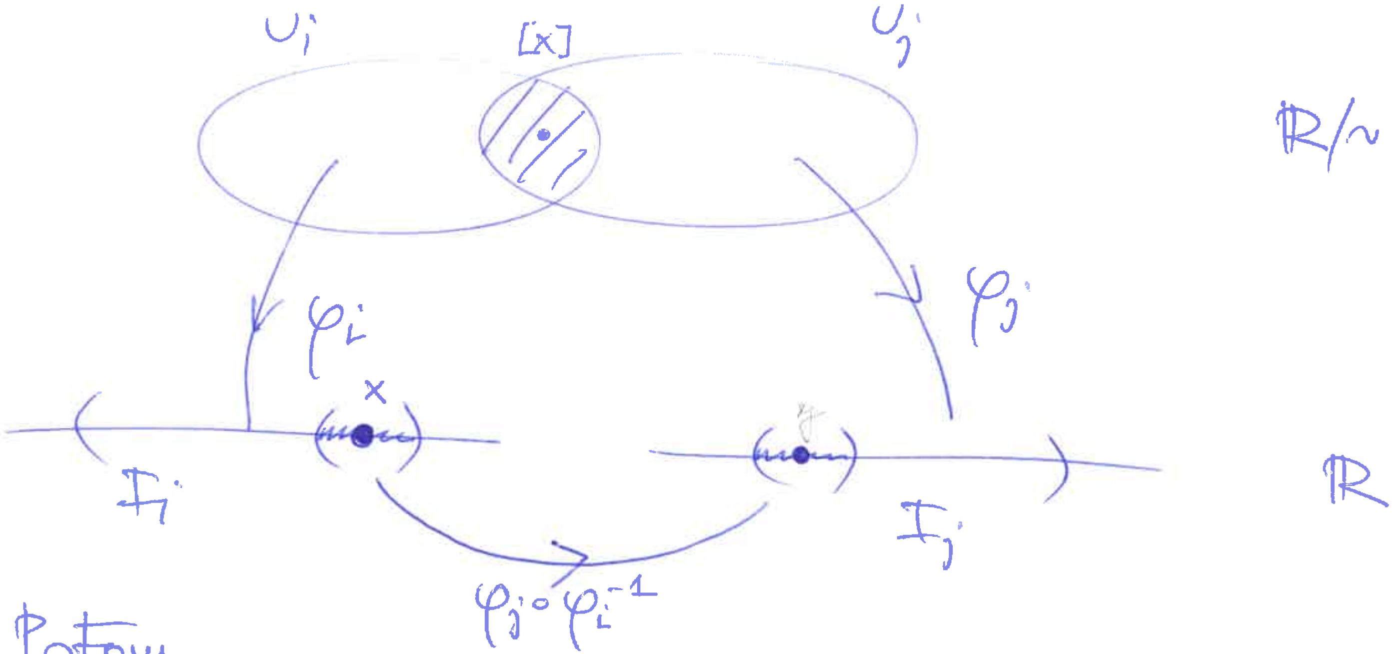
2. Pro $j=0,1,2,3$ položme $I_j := I(j/4, 1/4)$
$U_j := U(j/4, 1/4)$



a $\varphi_j := (\pi|I_j)^{-1} : U_j \xrightarrow{\text{na}} I_j$ je homeom.

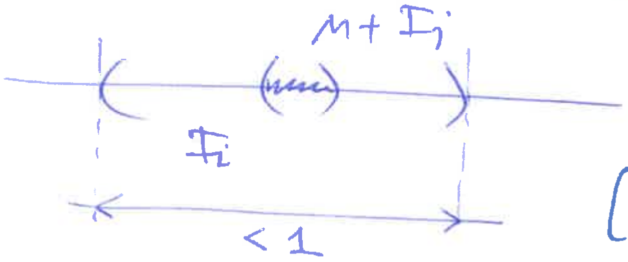
Potom $\mathcal{A} := \{(U_j, \varphi_j) \mid j=0,1,2,3\}$ je <u>hledaný</u> atlas na $\mathbb{R}/\sim$.

- Skutečně, π zobrazuje $[0,1)$ (tzv. <u>fundament. oblast</u>) prostě na $\mathbb{R}/\sim$.
- Nechť $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.



Potom

$\exists!\, n \in \mathbb{Z}$ tak, že $I_i \cap (n + I_j) \neq \emptyset$
<u>jediné</u>



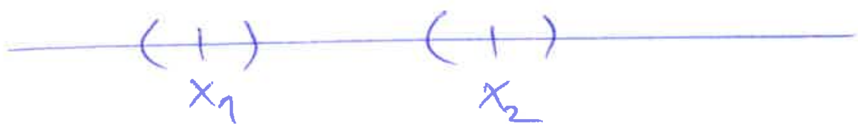
[viz 2. strana]

$\mathbb{R}/\sim$ ③

Potom $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x) = x - n,\ x \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$ je hladké zobrazení. Podobně i $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$.

3. Protože $\mathbb{R}/\sim$ má konečný atlas, podílová topologie má spočetnou bázi.

4. $\mathbb{R}/\sim$ je Hausdorff.: Nechť $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}/\sim$, $\omega_1 \neq \omega_2$. Potom ex.! $x_1, x_2 \in [0,1)$, $x_1 \neq x_2$ tak, že $\omega_1 = [x_1]$ a $\omega_2 = [x_2]$. BÚNO: $x_1 < x_2$



Protože $0 < x_2 - x_1 < 1$, ex. $\varepsilon > 0$ takový, že

$$x_1 + \epsilon < x_2 - \epsilon \quad \text{a} \quad (x_2 + \epsilon) - (x_1 - \epsilon) < 1.$$

Potom $U(x_1, \epsilon) \cap U(x_2, \epsilon) = \emptyset$.

Poznámka: Podobně pro $\mathbb{R}^2/\sim$, kde

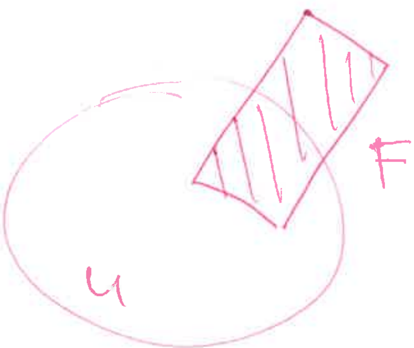
$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \in \mathbb{Z}^2$$

Nechť $f : X \to Y$ je spojité zobrazení mezi metrickými prostory*) a X je <u>kompakt</u>.

<u>1)</u> Potom je f <u>uzavřené</u>, tzn. pro každou uzavřenou $F \subset X$ je $f(F)$ uzavřený v Y.
(kompakt) (kompakt)

Je-li navíc f prosté, potom je f homeomorfismus X na $f(X)$.
[Skutečně, je-li $F \subset X$ uzavřená, je $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ uzavřená.]

<u>2)</u> Nechť $U \subset X$ a $f(U) \cap f(X \setminus U) = \emptyset$.
Potom $f|_U : U \to f(U)$ je uzavřené.
Je-li $f|_U$ navíc prosté, potom $f|_U$ je homeomorfismus.
[Je-li $F \subset X$ uzavřená, potom $f(F \cap U) = \underbrace{f(F)}_{\text{uzav.}} \cap f(U)$ je uzavřená v $f(U)$.]



<u>Pozn:</u> *) Platí to i pro Hausdorffovy topologické prostory X a Y.

Hom 2