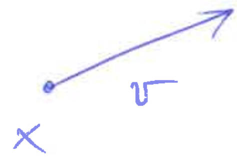
Tečný prostor

TEČ 1

Př 1 $T_x\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ s izomorfismem $v\in\mathbb{R}^n \longmapsto \partial_v|_x$,

kde $(\partial_v f)(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, v_i$, $f\in\mathcal{E}_x$.

$$* \quad T\mathbb{R}^n \simeq \{ \underbrace{(x,v)}_{\partial_v|_x} \mid x, v \in \mathbb{R}^n \} \simeq \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$$



Př 2 Nechť X je n-plocha v $\mathbb{R}^N$, $x\in X$ a $\tilde{T}_xX$ je tečný prostor v x k X ve smyslu Geom. 2. Nechť φ je lokální parametrizace X na okolí x. Potom

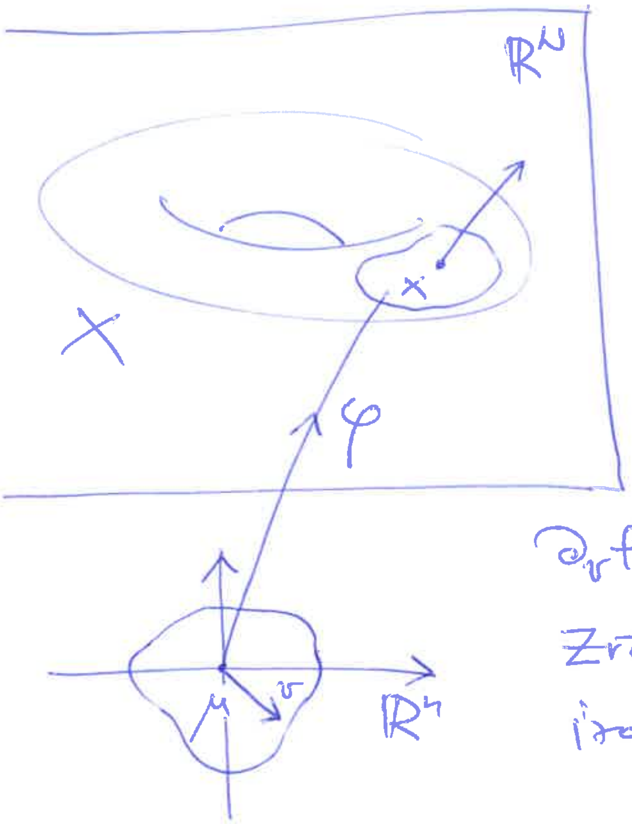
$$\tilde{T}_xX = \{\partial_v\varphi(u) \mid v\in\mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^N,$$

kde $x=\varphi(u)$. Chápeme-li X jako n-dim. varietu, potom

$$T_xX = \{\partial_v|_x \mid v\in\mathbb{R}^n\}, \text{ kde}$$

$$\partial_v f(x) := \partial_v(f\circ\varphi)(u), \quad f\in\mathcal{E}_x.$$

Zřejmě $\tilde{T}_xX \simeq T_xX$ s přirozeným izomorfismem $\partial_v\varphi(u) \longmapsto \partial_v|_x$



Př. 3 $TS^n \simeq \{(x,v) \mid x\in S^n, v\in\mathbb{R}^{n+1}, \overset{x\perp v}{(x,v)=0}\}$,

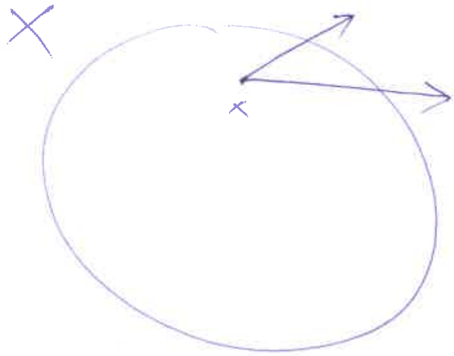
kde $(\cdot,\cdot)$ je Euklid. skalární součin v $\mathbb{R}^{n+1}$.

ČESÁNÍ KOKOSOVÉHO OŘECHU $\quad S^2 \subset \mathbb{R}^3$

"You can't comb the hair on a coconut!"

[SEE CONLON: Diff. mfd's, 2nd ed., Birkhäuser, 2001]

DEF. Hl. varieta X dim n se nazývá paralelizovatelná, pokud na X ex. $V_1, \dots, V_n \in \mathfrak{X}(X)$ takové, že v každé $x \in X$ ~~jsou~~ tvoří vektory $V_1(x), \dots, V_n(x)$ bázi T_xX.

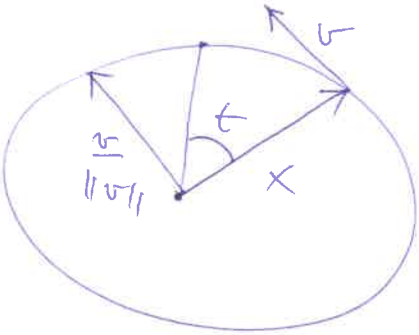


Cv 1. $T_xS^n \simeq \{(x,v) \mid x \in S^n,\ v \in \mathbb{R}^{n+1},\ \underbrace{\langle x, v\rangle = 0}_{x \perp v}\}$

Eukl. skalár. součin v $\mathbb{R}^{n+1}$

⌈Pro (x,v) urči křivku na S^n $\qquad \gamma(0) = x,\ \gamma'(0) = v$

$$\gamma(t) := x \cdot \cos(\|v\| t) + \frac{v}{\|v\|} \sin(\|v\| t), \quad t \in \mathbb{R},\ v \neq 0.$$ ⌋



Cv. 2 S^1, S^3, S^7 jsou paralelizov.

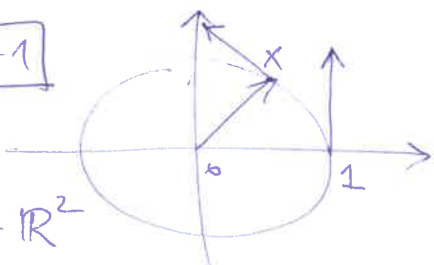
Bott, Milnor, Kervaire:

S^n je paralelizov. $\overset{*)}{\iff} n = 0, 1, 3, 7$

$\iff$ na $\mathbb{R}^{n+1}$ ex. násobení zachovávající Eukl. normu, a to $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$

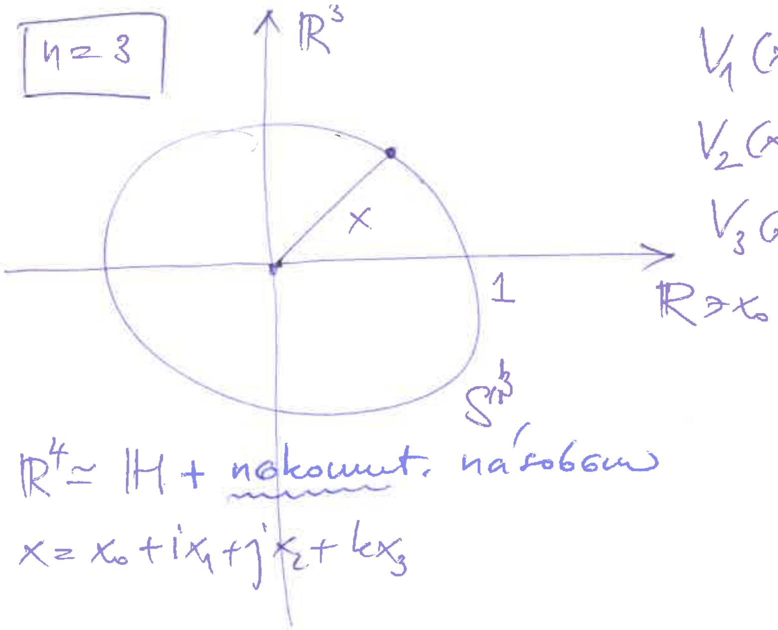
Pozn: *) $\Rightarrow$ těžké; $\Leftarrow$: Využije se násobení na $\mathbb{R}^{n+1}$.

$\boxed{n=1}$ $\qquad V_1(x) := (x, ix), \quad x \in S^1$



$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

$\boxed{n=3}$



$V_1(x) := (x, ix)$, $x \in S^3$

$V_2(x) := (x, jx)$

$V_3(x) := (x, kx)$

$\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$ + nekomut. násobení

$x = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$

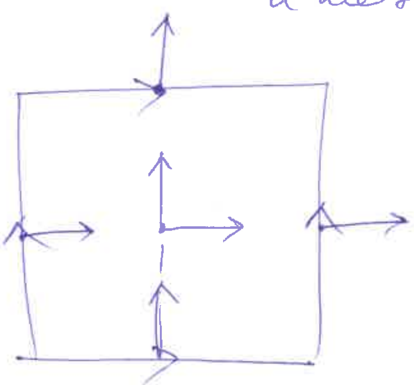
$\boxed{n=7}$

$\mathbb{R}^8 \simeq \mathbb{O}$ + nekomut. a neasociat. násobení

$x = x_0 + i_1x_1 + \dots + i_7x_7$ $\qquad V_j(x) := (x, i_j x)$, $x \in S^7$, $j = 1, \dots, 7$

Cv. 3 $\quad$ n-torus $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ krát}}$ je paralelizovat.

pro $n=2$:



Obecně: kartézský ~~proto~~ součin 2 paralelizovat. variet je opět paralel.

Př. Lieovy grupy jsou paraleliz.

Cv. Každá paralelizov. varieta je orientovatelná.

Globální definice vnějšího diferenciálu

Nechť $\omega \in \mathcal{E}^k(X)$, $U \subset X$ je otevřená a $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(U)$. Potom

(1.) Je-li $k=0$, potom $d\omega(X_1) = X_1(\omega)$ na U.

$\in \mathcal{E}^\infty(X)$

(2.) Je-li $k \geq 1$, potom na U

$$d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i\big(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})\big)$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}),$$

kde $\hat{X}_i$ znamená "vynechej X_i".

Speciálně, je-li $k=1$, potom na U (Cv.)

$$(*) \quad d\omega(X_1, X_2) = X_1(\omega(X_2)) - X_2(\omega(X_1)) - \omega([X_1, X_2]).$$

Pozn: (i) Pomocí (1.) a (2.) lze definovat d globálně.

(ii) Obě strany $(*)$ jsou bilineární, proto stačí $(*)$ ověřit pro pole tvaru $X_1 = a \frac{\partial}{\partial u_i}$ a $X_2 = b \frac{\partial}{\partial u_j}$ na mapě $U \subset X$.