Orientace na varietě

Nechť X je hladká varieta.

(i) Řekneme, že mapy (U,φ) a (V,ψ) na X jsou souhlasně orientovány, pokud jakobián

$\det D(\psi\circ\varphi^{-1}) > 0$ na $\varphi(U\cap V)$, ekvivalentně:

$\det D(\varphi\circ\psi^{-1}) > 0$ na $\psi(U\cap V)$.

(ii) Hladký atlas $\mathcal{A}$ na X je orientovaný, pokud každé dvě mapy z $\mathcal{A}$ jsou souhlasně orientovány.

(iii) Hladká varieta X je orientovaná, pokud na X máme zadaný orientovaný atlas $\mathcal{A}$.

Pozn: každý orient. atlas $\mathcal{A}$ na X lze rozšířit na jediný maximální orientovaný atlas $\tilde{\mathcal{A}}$ na X, tzv. diferenciální strukturu se zadanou orientací.

Pozn: (i) Ex. neorientovatelné variety, např. Möbiův list, páska, Kleinova láhev, reálná projektivní rovina $\mathbb{P}_2$

Cv.

Fut2

(ii) Nechť $\mathcal{A}$ je orientovaný atlas na X.

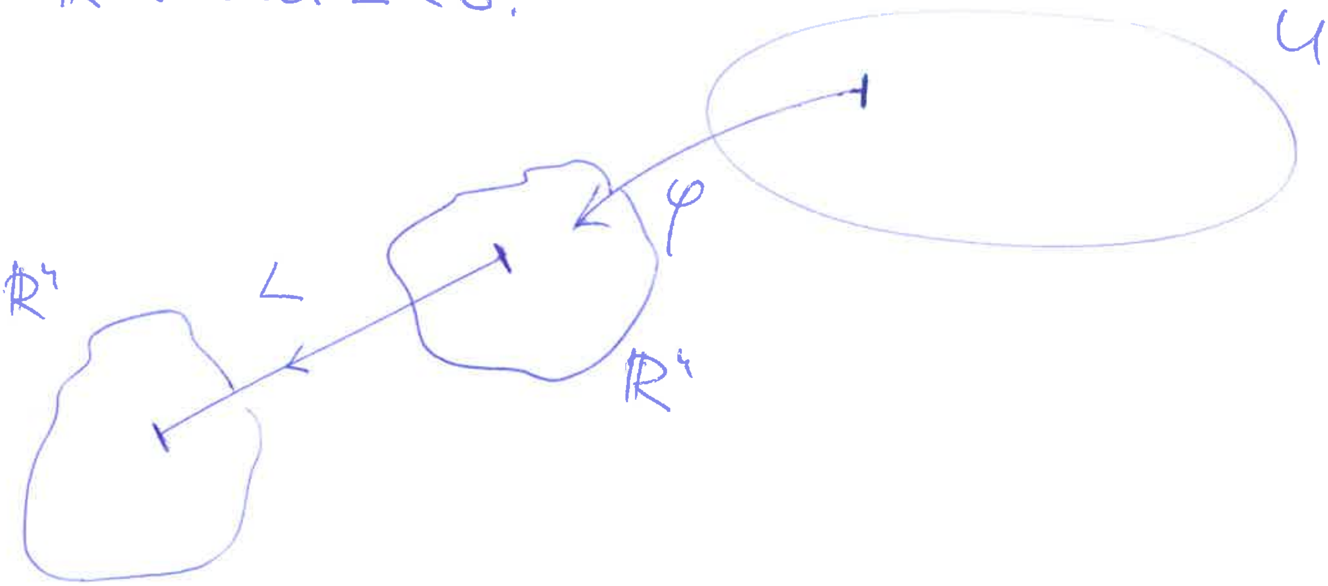
Nechť $L(u_1,\dots,u_n) := (-u_1, u_2, \dots, u_n)$, $(u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n$.

Je-li $\dim X = n$, potom atlas

$$(-\mathcal{A}) := \{(U, L\circ\varphi) \mid (U,\varphi)\in\mathcal{A}\}$$

zadává na X opačnou orientaci.

Za L lze volit libovolnou lineární transformaci $\mathbb{R}^n$ s $\det L < 0$.

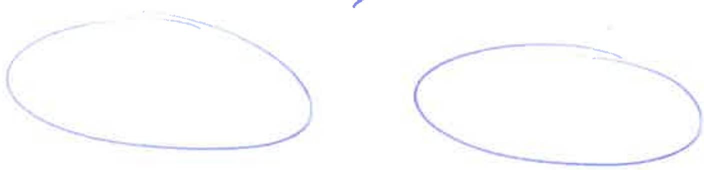


(iii) Je-li X orientovatelná a souvislá, potom má X právě 2 orientace.

Nechť $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ jsou maximální orientované atlasy na X. Potom buď $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, anebo $\mathcal{A}' = -\mathcal{A}$.

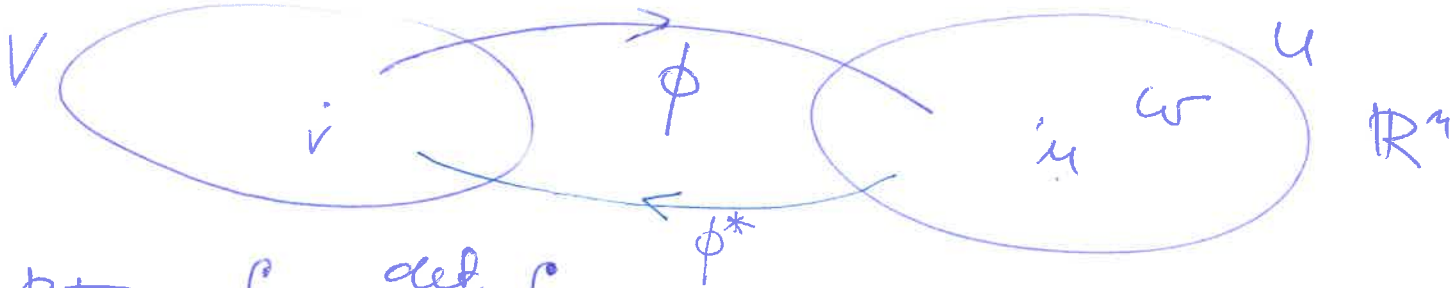
Cv.

Obecně máme 2^k orientací na orientovatelném prostoru X, který má k komponent.



Integrace diferenc. forem

Připomenutí (Geom. 2): (i) Nechť $\omega = f(u)\, du_1 \wedge \dots \wedge du_n$ je hladká n-forma na otevřené $U \subset \mathbb{R}^n$.



Potom $\int_U \omega \overset{\text{def.}}{:=} \int_U f(u)\, d\lambda^n(u)$, má-li Lebesg. integrál správný smysl.

(ii) Nechť $V \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $\phi: V \xrightarrow{\text{na}} U$ je difeomorfismus, který zachovává (mění) orientaci, tzn. jakobián $\operatorname{Jac}\phi := \det(D\phi) > 0$ ($<$) na V.

Potom

$$(\times) \qquad \int_V \phi^* \omega = \pm \int_U \omega.$$

Skutečně $\phi^*\omega = f(\phi(v))\, \underbrace{\operatorname{Jac}\phi(v)\, dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n}_{[du_1 \wedge \dots \wedge du_n =]}$,

protože $u = \phi(v)$ a

$$du_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial v_j}\, dv_j.$$

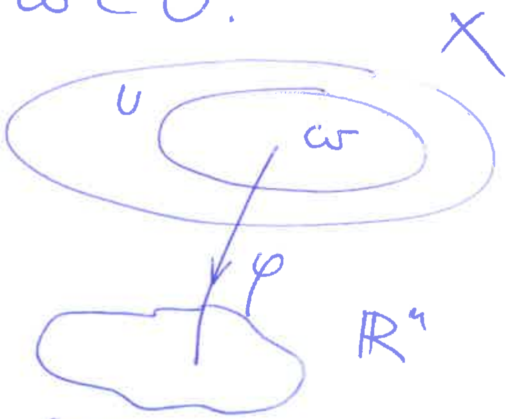
Potom $(\times)$ je věta o substituci v $\mathbb{R}^n$

$$\int_V f(\phi(v))\, \underbrace{|\operatorname{Jac}\phi(v)|}_{= \pm \operatorname{Jac}\phi(v)}\, d\lambda^n(v) = \int_U f(u)\, d\lambda^n(u).$$

DEF. Nechť X je orientovaná varieta dim n a $\omega \in \mathcal{E}^n(X)$ má kompaktní nosič.

(1.) Nechť (U, φ) je (kladně orientovaná*)) mapa na X taková, že $\operatorname{supp} \omega \subset U$.
Potom definujeme

$$\int_X \omega := \int_{\varphi(U)} (\varphi_{-1})^* \omega.$$



Zde $(\varphi_{-1})^* \omega$ je n-forma na otevřené $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Pozn: *) tzn. mapa z daného orientov. atlasu.

(2.) Nechť $\mathcal{A} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ je orientovaný atlas na X a $\{f_\beta\}_{\beta \in B}$ je rozklad jednotky na X podřízený $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$.
Definujeme

$$\int_X \omega = \sum_{\beta \in B} \int_X (f_\beta \omega)$$

Pozn: Integrály vpravo jsou definovány v (1.).

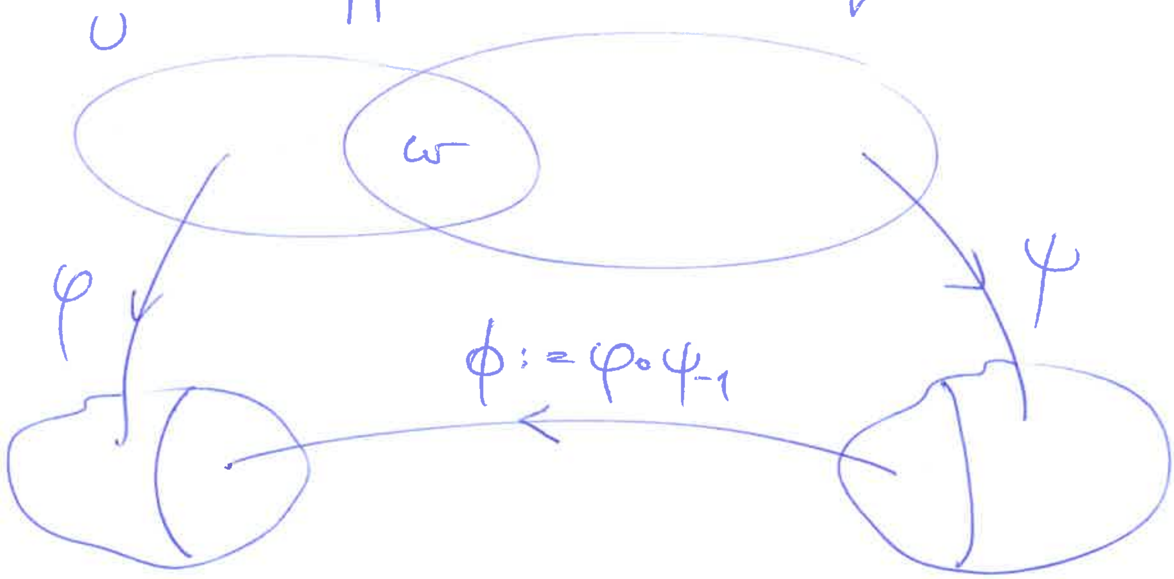
LEMMA: Definice integrálu je korektní, Fut J

tzn. nezávisí na provedených volbách.

Za uvedených předpokladů integrál vždy existuje a je konečný.

DŮKAZ: ad (1.) Integrál zřejmě ex. a je konečný.

Nechť (V, ψ) je jiná kladně orientovaná mapa (záporně) na X a $\operatorname{supp} \omega \subset V$.



Potom $\varphi = \Phi \circ \psi$ na $U \cap V$ a $\psi_{-1} = \varphi_{-1} \circ \Phi$

$$\Phi^*\left((\varphi_{-1})^*(\omega)\right) = \psi_{-1}^*(\omega),$$ tudíž

$$\int_{\varphi(U \cap V)} (\varphi_{-1})^* \omega = \pm \int_{\psi(U \cap V)} (\psi_{-1})^* \omega.$$

ad ② Nechť $\mathcal{A}' := \{(V_\gamma, \varphi_\gamma) \mid \gamma \in C\}$ je jiný (stejně hladce) orientovaný atlas na X, a $\{g_\delta\}_{\delta \in D}$ je rozklad jednotky na X podřízený $\{V_\gamma\}_{\gamma \in C}$. Potom zřejmě $\{f_\beta \cdot g_\delta\}_{\substack{\beta \in B \\ \delta \in D}}$ je rozklad jednotky podřízený $\{U_\alpha \cap V_\gamma\}_{\substack{\alpha \in A \\ \gamma \in C}}$.

Potom
$$\sum_{\beta \in B} \int_X f_\beta \omega = \sum_{\beta \in B} \int_X f_\beta \Big(\underbrace{\sum_{\gamma \in D} g_\gamma}_{=1}\Big) \omega =$$
$$= \sum_{\beta \in B} \sum_{\gamma \in D} \int_X f_\beta \cdot g_\gamma \cdot \omega = \sum_{\gamma \in D} \int_X g_\gamma \omega. \quad (*)$$

Všechny sumy v (*) jsou ve skutečnosti "konečné".

Skutečně, pro každé $x \in \operatorname{supp} \omega$ ex. otevřené okolí U_x bodu x takové, že
$$B_x := \{\beta \in B \mid \operatorname{supp} f_\beta \cap U_x \neq \emptyset\}$$
je konečná. Je-li $U_{x_1}, \dots, U_{x_k}$ konečné podpokrytí $\underbrace{\operatorname{supp} \omega}_{\text{kompakt}}$, potom $f_\beta \omega = 0$ na X pro vš. $\beta \in B \setminus B_0$, kde $B_0 := \bigcup_{i=1}^{k} B_{x_i}$ je konečná. $\blacksquare$

Pozn: Označme X^- hranu s opačnou orientací než má X.

Potom zřejmě $\int_X \omega = -\int_{X^-} \omega$.