Stokesova věta pro variety

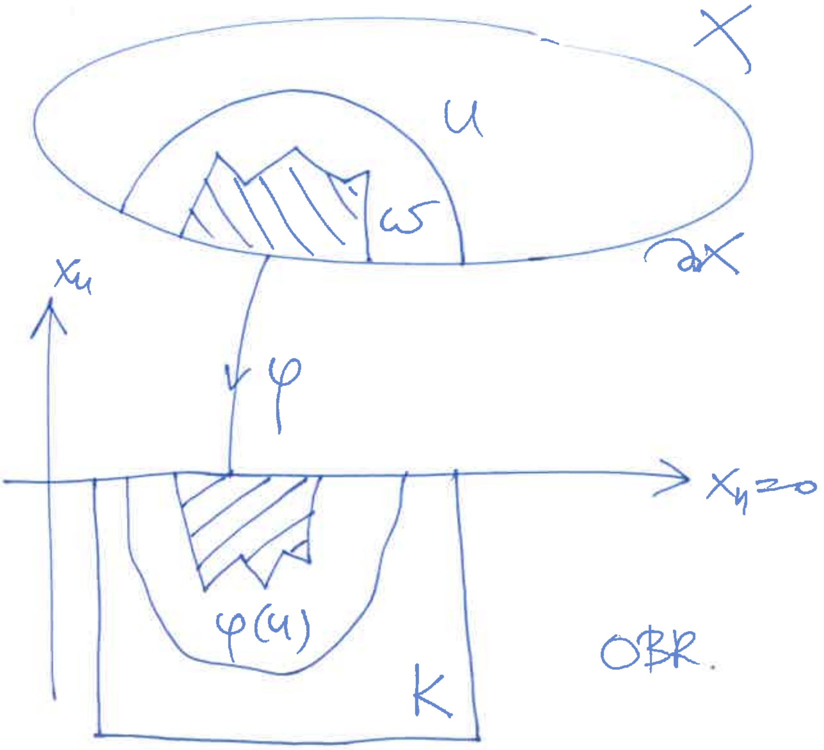
STO:

Připomenutí: V Geom. 2 byla Stokesova věta pro kvádr K v $\mathbb{R}^n$, spec. $K=[0,1]^n$.

VĚTA (Stokes) Nechť X je orientovaná varieta dimenze n a ∂X je její okraj s indukovanou orientací. Je-li $\omega \in \mathcal{E}^{n-1}(X)$ s kompaktním nosičem, potom

$$\int_{\partial X} \omega = \int_X d\omega$$

DŮKAZ: (1) Nechť (U,φ) je kladně orientovaná mapa na X taková, že $\operatorname{supp}\omega \subset U$.



OBR.

BÚNO: $\varphi(U)$ je omezená v H^n.

Jinak: Protože $\operatorname{supp}\omega$ je kompakt, ex. omezená otevřená $V \subset \mathbb{R}^n$ tak, že

$$\underbrace{\varphi(\operatorname{supp}\omega)}_{\text{kompakt}} \subset V.$$

Místo U uvažme

$$\tilde{U} := \varphi^{-1}(\underbrace{\varphi(U)\cap V}_{\text{omez. otevř. v } H^n}).$$

Potom ex. uzavřená krychle K v H^n jako ve OBR. taková, že $\varphi(U) \subset K$ a $\varphi(U) \cap \partial K \subset \partial H^n$.

Potom

$$\int_X d\omega = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*(d\omega) = \int_{\varphi(U)} d\big(\underbrace{(\varphi^{-1})^*\omega}_{\text{dodefinujeme } 0 \text{ na } H^n \setminus \varphi(U)}\big) =$$

$$= \int_K d((\varphi^{-1})^*\omega) \overset{\substack{\text{Stokesova} \\ \text{věta pro} \\ \text{krychli } K \text{ v } \mathbb{R}^n}}{=} \int_{\partial K} (\varphi^{-1})^*\omega = \int_{\varphi(U) \cap \partial H^n} (\varphi^{-1})^*\omega =$$

$$= \int_{\partial X} \omega,$$ protože $(U \cap \partial X, \varphi|_{U \cap \partial X})$ je hledaná orient. mapa na ∂X.

(2) Nechť $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ je orientovaný atlas na X a $\{f_\beta\}_{\beta \in B}$ jsou podřízený rozklad jednotky na X. Potom zřejmě $\{f_\beta|_{\partial X}\}_{\beta \in B}$ je rozklad jednotky na ∂X podřízený orient. atlasu $\mathcal{A}|_{\partial X}$. Potom

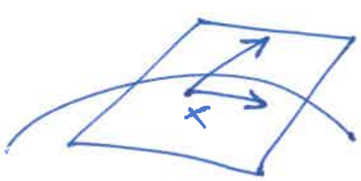
$$\int_X d\omega = \int_X d\Big(\sum_{\beta \in B} f_\beta \omega\Big) = \sum_{\beta \in B} \int_X d(f_\beta \omega) \overset{(1)}{=}$$

[až na konečně mnoho $\beta \in B$ je $f_\beta \omega \equiv 0$]

$$= \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \int_{\partial X} f_\beta \omega = \int_{\partial X} \omega. \qquad \blacksquare$$

ST03

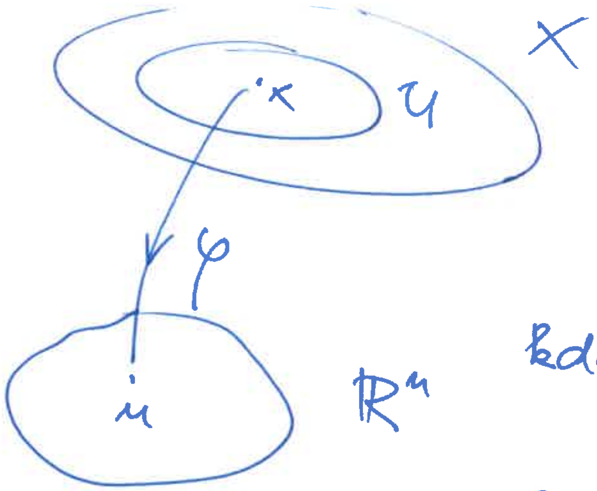
Riemannovy variety



RV1

DEF: Riemannovou metrikou na hlad. varietě X nazveme hladké tenzorové pole g na X typu $\binom{0}{2}$ takové, že v každém bodě $x \in X$ je $g(x)$ skalární součin na T_xX, tzn. bilineární forma $g(x) : T_xX \times T_xX \longrightarrow \mathbb{R}$ je symetrická a pozitivně definitní. Varieta X s danou Riemannovou metrikou g se nazývá Riemannova varieta.

Pozn.: (i) Nechť $u = \varphi(x)$, $x \in U$ jsou lokální souřadnice na X a $u = (u^1, \dots, u^n) \in \mathbb{R}^n$.



Potom na U máme

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, du^i \otimes du^j,$$

kde $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)$,

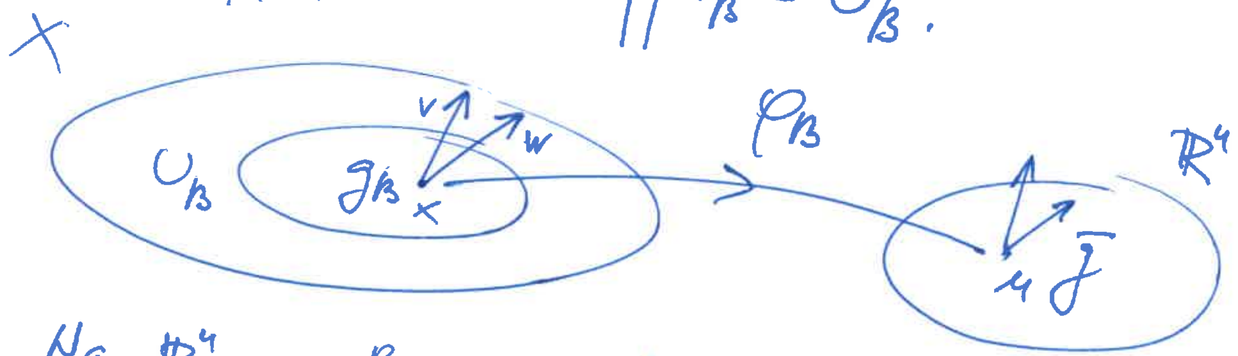
$g_{ij} = g_{ji} \in \mathcal{C}^\infty(U)$ a matice

$\Gamma(x) := (g_{ij}(x))_{i,j=1}^{n}$ je pozit. definitní $\forall x \in U$.

RV 1.0

(ii) g není metrika ve smyslu metrických prostorů; $g(x)$ umožňuje měřit délku vektorů z T_xX, úhel mezi vektory atd.

(iii) Na každé hladké varietě X existuje Riemannova metrika. X Skutečně, nechť $\mathcal{A}$ je hl. atlas na X a $\{f_\beta\}_{\beta\in B}$ je rozklad jednotky na X podřízený $\mathcal{A}$, tzn. $\forall \beta\in B$ $\exists (U_\beta,\varphi_\beta)\in\mathcal{A}$: $\operatorname{supp} f_\beta \subset U_\beta$.



Na $\mathbb{R}^n$ máme kanonickou Riem. metriku $\bar g := du_1^2+\dots+du_n^2$. Na U_β uvažme $g_\beta := \varphi_\beta^* \bar g$, tzn. v každém $x\in U_\beta$ je

$$g_\beta(v,w) = \bar g\big((\varphi_\beta)_* v, (\varphi_\beta)_* w\big), \quad v,w\in T_xX.$$

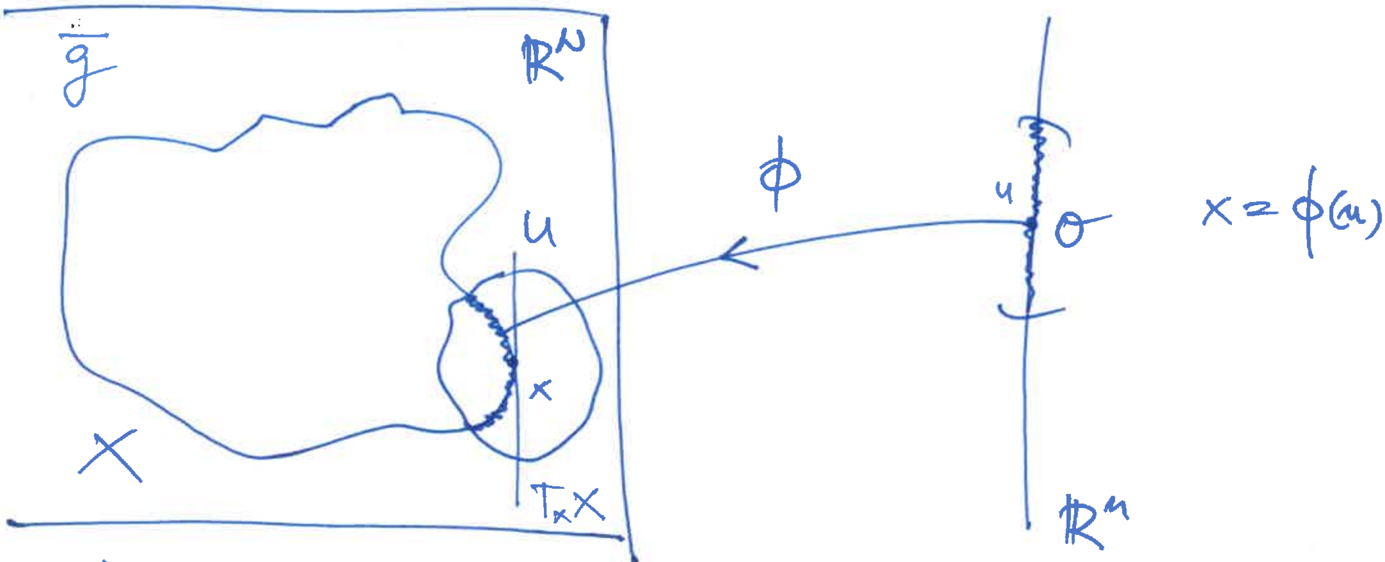
Položme $g := \sum_{\beta\in B} f_\beta g_\beta$ na X, kde $f_\beta g_\beta \overset{def}{:=} 0$ na $X\setminus U_\beta$. Potom g je zřejmě Riemannova metrika na X. Cv.

RV2

Př: Euklid. prostor $\mathbb{R}^n$, $g = dx_1^2 + \dots + dx_n^2$, kde $dx_i^2 = dx_i \otimes dx_i$.

Př: Na každé hladké n-ploše X v $\mathbb{R}^N$ máme přirozenou Riemannovu metriku indukovanou z $\mathbb{R}^N$. *)

Skutečně, $X \subset \mathbb{R}^N$ lze lokálně parametrizovat n souřadnicemi, tzn. pro každé $x \in X$ ex. otevřená $U \subset \mathbb{R}^N$, $x \in U$, ex. otevřená $O \subset \mathbb{R}^n$ a ex. hladké zobrazení $\phi : O \to \mathbb{R}^N$ tak, že $\phi(O) = X \cap U$ a ϕ je homeomorfismus O na $X \cap U$.



Víme, že X má strukturu hladké variety danou mapami tvaru $(U \cap X, \phi^{-1})$.

---

*) Pozn.: Speciálně pro 2-plochu X v $\mathbb{R}^3$ je takovou Riem. metrikou tzv. první fundamentální forma na X.

RV3

Potom Riemannovou metriku v $x \in X$ definujeme jako restrikci Eukl. skalárního součinu z $\mathbb{R}^N$ na $T_x X$, tzn. na $U \cap X$ položíme

$$g = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\, du^i \otimes du^j, \qquad (X)$$

kde $g_{ij} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_i}, \frac{\partial \phi}{\partial u_j}\right)_{\mathbb{R}^N}$ a $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{R}^N}$ je Eukl. skalár. součin na $\mathbb{R}^N$.

Zřejmě $g\left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right) = g_{ij} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_i}, \frac{\partial \phi}{\partial u_j}\right)_{\mathbb{R}^N}$.

• Pozn: viz druhou stranu

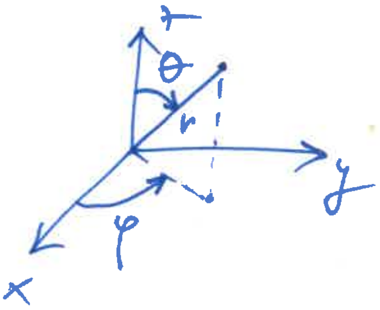
Př. $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ $r=1$

* sférické souřadnice:

$x = r \cdot \sin\theta \cos\varphi$

$y = r \cdot \sin\theta \sin\varphi$

$z = r \cdot \cos\theta$



* $g = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$ [Cv., Geom. 2], $(x,y,z) = \phi(\theta,\varphi)$

1. fund. forma S^2

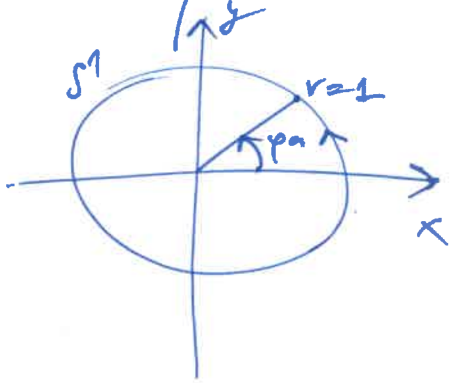
Př. $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ $r=1$

* polární souřadnice: $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$

* $g = d\varphi^2$, protože

$dx = -\sin\varphi\, d\varphi$, $dy = \cos\varphi\, d\varphi$

$dx^2 = \sin^2\varphi\, d\varphi^2$, $dy^2 = \cos^2\varphi\, d\varphi^2$



Pozn: (i) Pro 1-formy α, β označme jejich symetrický součin

$$\alpha\beta \overset{\text{ozn.}}{:=} \frac{1}{2}(\alpha\otimes\beta + \beta\otimes\alpha) = \frac{1}{2}\,\alpha\odot\beta.$$

Z (x) dostaneme, že

$$g = \sum_{i=1}^{n} g_{ii}(du^i)^2 + \sum_{1\le i<j\le n} \overset{\text{symetr.}}{g_{ij}} \underbrace{(du^i\otimes du^j + du^j\otimes du^i)}_{2\,du^i du^j}$$

$$\boxed{g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, du^i du^j} \qquad (xx)$$

(ii) Riemannova metrika g v lokálních souřadnicích $x = \phi(u)$, $u \in \mathcal{O}$ je rovna

$$(\phi^*\bar{g})(u)(v,w) \overset{\text{def.}}{:=} \bar{g}(x)\big(\phi_*(u)v, \phi_*(u)w\big), \quad v,w\in\mathbb{R}^n,$$

$$= \big(\partial_v\phi(u), \partial_w\phi(u)\big)_{\mathbb{R}^N},$$

kde $\bar{g} = dx_1^2 + \dots + dx_N^2$ je 'Euklid.' metrika v $\mathbb{R}^N$.

Příklad: $H^2 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$,

$$g = 4\cdot \frac{dx^2+dy^2}{(1-(x^2+y^2))^2}$$

Poincarého model hyperbolické roviny

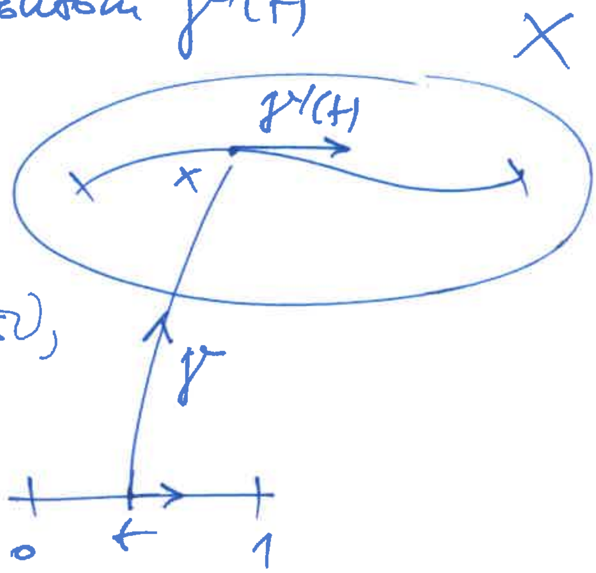
DÉLKA KŘIVKY

Nechť $\gamma:[0,1]\to X$ je hladká křivka.
Potom délkou γ rozumíme číslo

$$L(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{g(\gamma(t))(\gamma'(t),\gamma'(t))}\,dt,$$

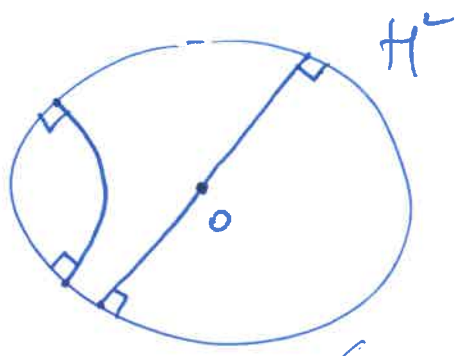
délka tečného vektoru $\gamma'(t)$

kde $\gamma'(t) := \gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)$.



Pozn: Geodetika na X je křivka, která je nejpřímější, nejkratší spojnice mezi jejími blízkými dvěma body. V Geom. 2 jste je studovali na plochách dimenze 2 v $\mathbb{R}^3$.

Příklad: Geodetiky:
* v $\mathbb{R}^n$: přímky,
* na S^2: hlavní kružnice
* v H^2: oblouky kružnic svírající pravý úhel s S^1, úsečky procházející 0



5. Eukleidův axiom

Formy objemu

Připomeň: Element objemu

Nechť na vektorovém prostoru V máme skalární součin $(\cdot|\cdot)$ a $e_1,\dots,e_n$ je ortonormální (ON-) báze V. Nechť $\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^n$ je duální báze V^*, tzn. $\varepsilon^i(e_j)=\delta^i_j$. Položme

(*) $\quad \omega := \varepsilon^1\wedge\dots\wedge\varepsilon^n.$

Potom ω je tzv. element objemu na V, pro který platí (i) Je-li $v_1,\dots,v_n$ jiná báze V, potom

(1) $\quad \omega(v_1,\dots,v_n)=\det(v_i^j),$

kde $v_i=\sum_{j=1}^{n} v_i^j e_j,\ i=1,\dots,n$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{array}\right)$$

Spec. je-li $e_1',\dots,e_n'$ ON-báze V, která je souhlasně/opačně orientovaná vůči $e_1,\dots,e_n$, potom příslušné objemové elementy jsou stejné/opačné, tzn. $\omega'=\pm\omega$.

(ii) Navíc $|\omega(v_1,\dots,v_n)|$ je objem rovnoběžnostěnu ve V se stranami $v_1,\dots,v_n$ a z Geom 2 víme, že

(2) $\quad |\omega(v_1,\dots,v_n)| = |\det(v_i^j)| = \sqrt{\det\Gamma},$

kde $\Gamma=(g_{ij})$ s $g_{ij}:=(v_i|v_j)$ je tzv. Gramova matice pro $v_1,\dots,v_n$.

RVT

Pozn: Nechť X je orientovaná varieta. Potom daná orientace na X zadává orientaci T_xX v každém $x \in X$. Skutečně, nechť $\mathbb{R}^n \ni u = \varphi(x)$, $x \in U$ jsou kladně orientované lokál. souřadnice na X. Potom vektory $\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n}$ tvoří kladně orientovanou bázi T_xX. Orientace T_xX nezávisí na volbě kladně orient. map. Nechť totiž $\mathbb{R}^n \ni v = \psi(x)$, $x \in V$ jsou jiné kladně orient. lokál. souřadnice na X. Je-li $x \in U \cap V$, potom $\frac{\partial}{\partial v^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^n}$ v x je jiná souhlasně orient. báze T_xX, protože matice přechodu mezi bázemi je Jacobiho matice příslušné přechodové funkce a ta má kladný determinant.

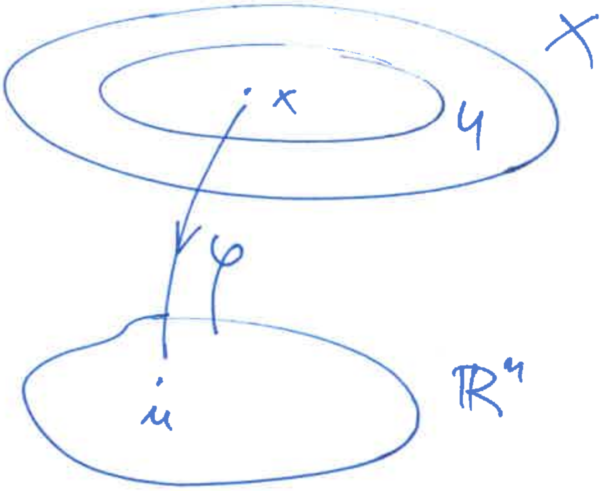
Formy objemu:

Nechť (X, g) je orientovaná Riemannova varieta. Potom pro každý $x \in X$ je na $T_x X$ dána orientace a skalární součin $g(x)$, tudíž i příslušný objemový element $\omega(x) \in \Lambda^n(T_x^* X)$ pro lib. kladně orientovanou ON-bázi $T_x X$, je-li $n = \dim X$.

Navíc $x \in X \longmapsto \omega(x) \in \Lambda^n(T_x^* X)$ je hladké, tzn. $\omega \in \mathcal{E}^n(X)$, a nazývá se forma objemu na X.

— x —

Skutečně, nechť $\mathbb{R}^n \ni u = \varphi(x)$, $x \in U$ jsou kladně orient. lokální souřadnice na X.



Z (1) a (2) dostaneme, že v $x \in U$ je

$$(3) \quad \omega\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n}\right) = \sqrt{\det \Gamma},$$

kde $\Gamma = (g_{ij})$, $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)$ je matice g v těchto lokálních souřadnicích a rovněž je to Gramova matice pro $\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n}$. Z (3) je zřejmé $\omega \in \mathcal{E}^n(X)$, protože

$$(4) \quad \boxed{\omega = \sqrt{\det \Gamma}\, du^1 \wedge \dots \wedge du^n} \text{ na } U$$

RV7

Integrál 1. druhu

DEF. Nechť X je orientovaná Riemannova varieta a ω je forma objemu na X. Je-li $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ s kompaktním nosičem, potom definujeme tzv. integrál 1. druhu

$$\int_X f\,dS := \int_X f\omega.$$

Pozn.: (i) $\int_X f\,dS$ nezávisí na volbě orientace X

⌈ **BÚNO:** X je souvislá (jinak pro každou komponentu X). Označíme-li Riemannovu varietu s opačnou orientací X_-, potom zřejmě její objemová forma $\omega_- = -\omega$. Dále

$$\int_{X_-} f\omega_- = -\int_X f\omega_- = \int_X f\omega.$$

⌋

(ii) Tato definice $\int_X f\,dS$ je v souladu s definicí pro n-plochu X v $\mathbb{R}^N$, viz Geom. 2.

Fakt Nechť X je orientovaná Riemannova varieta dimenze n. Nechť $f \in C^\infty(X)$ s kompaktním nosičem, (U,φ) je kladně orientovaná mapa na X a $\operatorname{supp} f \subset U$. Potom

$$\int_X f\,dS := \int_{\varphi(U)} f(\varphi_{-1}(u)) \sqrt{\det \Gamma(\varphi_{-1}(u))}\, d\lambda^n(u),$$

kde λ^n je Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^n$ a Γ je jako v (3) na str. $\boxed{RV6}$.

<u>DŮKAZ</u>: Podle definice je $\int_X f\omega = \int_{\varphi(U)} (\varphi_{-1})^*(f\omega)$.

Z (4) na str. $\boxed{RV6}$ můžeme na $\varphi(U)$

$$(\varphi_{-1})^*(f\omega) = (f\circ\varphi_{-1}) \sqrt{\det(\Gamma\circ\varphi_{-1})}\, du^1\wedge\ldots\wedge du^n. \quad ▨$$

Př. $$\int_{S^2} f\,dS = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta,\varphi)\cdot \sin\theta \cdot d\theta\, d\varphi,$$

kde $\Phi(\theta,\varphi) := (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ je 'transformace sférických souřadnic na kartézské' a $F(\theta,\varphi) := f(\Phi(\theta,\varphi))$. Zřejmě je

$$(\Phi)^*\omega = \sin\theta\, d\theta\wedge d\varphi, \quad \theta\in(0,\pi),\ \varphi\in(0,2\pi)$$

RVG

Pozn: Integrál 1. druhu lze definovat i na obecné (tzn. ne nutně orientovatelné) Riemannově varietě X.

(1) Skutečně, zcela analogicky jako v Geom. 2 na n-ploše v $\mathbb{R}^n$ definujeme na X vhodnou borelovskou míru μ_X.

Nechť $\mathcal{B}(X)$ je σ-algebra všech borelovských podmnožin X, tzn. nejmenší σ-algebra obsahující všechny otevřené podmnožiny X.

(a) Nechť (U,φ) je mapa na X. Potom na U definujeme borelovskou míru μ_φ předpisem

$$\mu_\varphi(B) := \int_{\varphi(B)} \sqrt{\det \Gamma(\varphi_{-1}(u))}\, d\lambda^n(u), \quad B \in \mathcal{B}(U).$$

(b) Nechť $\mathcal{A} := \{(U_i,\varphi_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ je spočetný atlas na X. Uvažme rozklad $X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} X_i$, kde $X_1 := U_1$, $X_2 := U_2 \setminus U_1$, $X_3 := U_3 \setminus (U_1 \cup U_2)$, ...

Položme

$$\mu_X(B) := \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_{\varphi_i}(B \cap X_i), \quad B \in \mathcal{B}(X).$$

Zcela analogicky jako v Geom. 2 lze ověřit, že μ_X je dobře definovaná a nezávisí na provedených volbách.

DEF. Nechť X je Riemannova křivka a μ_X příslušná borelovská míra na X definovaná výše. Je-li $f: X \to \mathbb{R}$ borelovsky měřitelná funkce, potom definujeme

$$\int_X f \, ds := \int_X f \, d\mu_X,$$

má-li Lebesgueův integrál vpravo smysl.

RV1.