Součinová topologie

TP 14

Nechť $(X_1, \mathcal{T}_1), \dots, (X_k, \mathcal{T}_k)$ jsou topol. prostory.
Uvažme kartézský součin

$$X := X_1 \times \dots \times X_k = \{(x_1, \dots, x_k) \mid x_i \in X_i\}$$

a projekce pro $i = 1, \dots, k$

$$\pi_i : X \longrightarrow X_i, \quad \pi_i(x) = x_i \text{ pro } x = (x_1, \dots, x_k) \in X.$$

Na X uvažujme nejmenší topologii $\mathcal{T}$ takovou, že všechny π_i, $i = 1, \dots, k$ jsou spojité. Potom $\mathcal{T}$ je tzv. součinová topologie a $(X, \mathcal{T})$ je součinový prostor.

$\boxed{\text{Fakt}}$ ① Báze $\mathcal{T}$ je systém

$$\mathcal{B} := \{U_1 \times \dots \times U_k \mid U_i \in \mathcal{T}_i\}.$$

② Zobrazení $f : Z \longrightarrow X$ (top. pr.) je spojité, právě když všechny složky $f_i := \pi_i \circ f : Z \longrightarrow X_i$ jsou spojité pro $i = 1, 2, \dots, k$.

③ Jsou-li $X_1, \dots, X_k$ kompaktní, je i X kompaktní.

TP 15

Důkaz: (1.) Topologie $\mathcal{T}$ je generována

$$\mathcal{S} := \bigcup_{i=1}^{k} \{ \pi_i^{-1}(U_i) \mid U_i \in \mathcal{T}_i \}.$$

Protože $\pi_i^{-1}(U_i) = X_1 \times \dots \times \underset{i\text{-tá}}{U_i} \times \dots \times X_k$ a $\mathcal{S} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{T}$

$\pi_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \pi_k^{-1}(U_k) = U_1 \times \dots \times U_k$, je $\mathcal{B}$ báze $\mathcal{T}$.
uz. na konečné $\cap$

(2.) $\boxed{\Rightarrow}$ složení spojitých zobrazení je spojité;

$\boxed{\Leftarrow}$ Nechť $U_i \in \mathcal{T}_i$, $i = 1, \dots, k$. Stačí ověřit, že $f_{-1}(U_1 \times \dots \times U_k)$ je otevřená v Z. Máme ale

$$f_{-1}(U_1 \times \dots \times U_k) = f_{-1}\left(\pi_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \pi_k^{-1}(U_k)\right) =$$

$$= f^{-1}(\pi_1^{-1}(U_1)) \cap \dots \cap f^{-1}(\pi_k^{-1}(U_k)) =$$

$$= \underbrace{(\pi_1 \circ f)_{-1}(U_1)}_{\text{ot. v } Z} \cap \dots \cap \underbrace{(\pi_k \circ f)_{-1}(U_k)}_{\text{ot. v } Z} \text{ je}$$

otevřená v Z.

(3.) Nebudeme dokazovat. Platí dokonce, že je kompaktní i kartézský součin libovolného počtu kompaktních prostorů, tzv. TICHONOVOVA VĚTA. ▨

Př. 2-torus $T^2 \simeq S^1 \times S^1$

n-torus $T^n := \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ krát}}$

VARIETY

- zakřivený prostor, angl. manifolds
- Gauss: 2-rozměr. plochy v $\mathbb{R}^3$ (jako v Geom. 2)
- Riemann (1854, habilitační přednáška):
  zakřivený prostor, který lokálně vypadá jako (rovný) prostor $\mathbb{R}^n$; není vnořen do vnějšího $\mathbb{R}^N$?
  podobně jako každá diferenc. (hladká) funkce lokálně vypadá jako funkce lineární

×

- Newton: • Philosophiae Naturalis Principia Mathematica[1] (1687)
  • "absolutní čas a prostor"
  $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^3$
- Einstein: • STR (1905): prostoročas $\mathbb{R}^{1,3} = \mathbb{R}^4 + (\cdot,\cdot)_{1,3}$
  "čas a prostor jsou relativní"
  • OTR (1915): vesmír je 4-rozměrný zakřivený prostor, který lokálně vypadá jako $\mathbb{R}^{1,3}$ (prostoročas)

gravitace

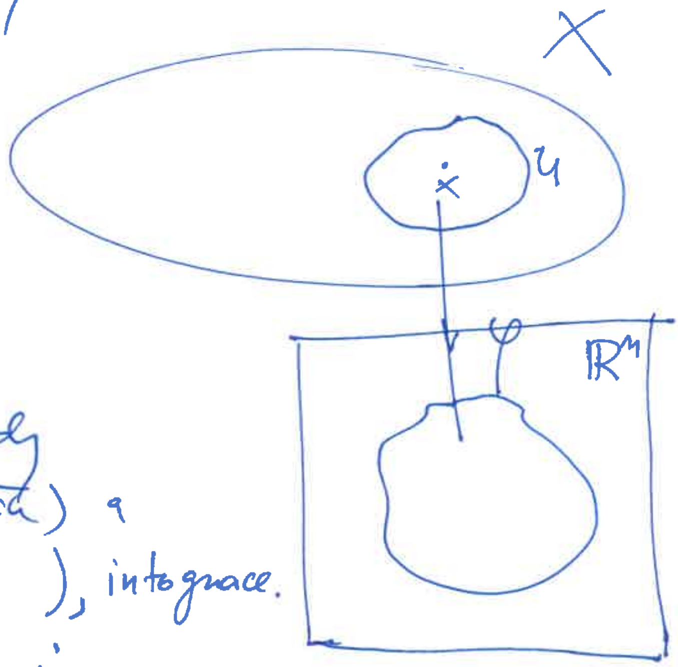
více v části o Riemannových varietách ?

---

1) Matematické principy přírodní filosofie

DEF. Topolog. prostor $(X, \mathcal{T})$ je <u>topologická varieta dimenze n</u>, pokud

(1.) X je <u>lokálně homeomorfní s $\mathbb{R}^n$</u>, tzn. každé $x \in X$ má otevřené okolí $U \subset X$ a homeomorfismus φ množiny U na <u>otevřenou</u> množinu $\varphi(U)$ v $\mathbb{R}^n$;



(2.) X je <u>Hausdorffův</u>;

(3.) X má <u>spočetnou bázi</u> topologie $\mathcal{T}$.

<u>Pozn.:</u> (i) technické předpoklady (2.) (dost otevřených množin) a (3.) (ne příliš —||—), integrace.

(ii) <u>Dimenze</u> topologické variety je jednoznačně určena. Jak ukážeme, to plyne z <u>Brouwerovy věty o invarianci</u>:

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ a $V \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené, neprázdné. Jsou-li U a V <u>homeomorfní</u>, potom $n = m$.

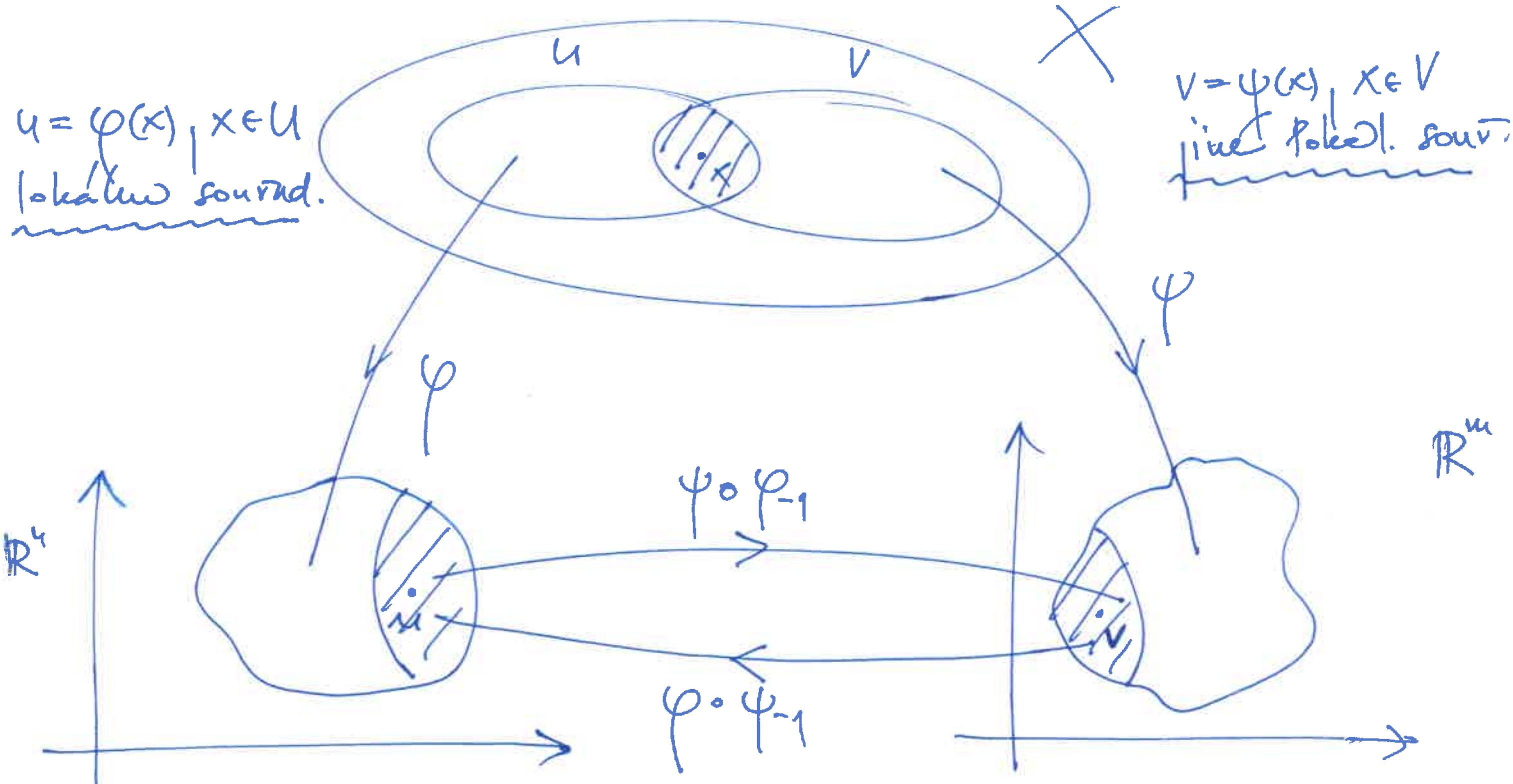
[hluboká věta, důkaz nad rámec přednášky]

Nechť $(X,\mathcal{T})$ je topologický prostor.

(i) Potom mapou (lokálním souřadnicovým systémem) dimenze n na $(X,\mathcal{T})$ nazveme (U,φ), kde $U\subset X$ je otevřená a φ je homeomorfismus U na otevřenou $\varphi(U)\subset\mathbb{R}^n$.

— x —

Nechť (V,ψ) je jiná mapa na X dim n.



změna lokál. souřadnic: $u=\varphi(\psi^{-1}(v))$

$v=\psi(\varphi^{-1}(u))$

Potom buď $U\cap V=\emptyset$, anebo $U\cap V\neq\emptyset$ a tzv. přechodové funkce

$$\psi\circ\varphi^{-1}: \varphi(U\cap V)\xrightarrow{\text{na}}\psi(U\cap V)$$

$$\varphi\circ\psi^{-1}: \psi(U\cap V)\xrightarrow{\text{na}}\varphi(U\cap V)$$

jsou homeomorfismy mezi otevřenými množinami. Z Brouwerovy věty máme, že $\boxed{n = m}$ a zřejmě platí $(\varphi \circ \psi_{-1})_{-1} = \psi \circ \varphi_{-1}$.

VAR 4

Pozn: Tedy dimenze topolog. variety je jednoznačně určena.

(ii) Systém map dimenze n $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ na X nazveme $\mathcal{C}^0$–atlas dimenze n na X, pokud $\mathcal{A}$ pokrývá X, tzn. $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Pozn: Zřejmě X je lokálně homeomorfní s $\mathbb{R}^n$, právě když na X existuje $\mathcal{C}^0$–atlas $\mathcal{A}$ dimenze n.

(iii) Řekneme, že mapy (U, φ) a (V, ψ) na X jsou $\mathcal{C}^k$–kompatibilní, kde $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, pokud buď $U \cap V = \emptyset$, anebo $U \cap V \neq \emptyset$ a $\psi \circ \varphi_{-1}$, $\varphi \circ \psi_{-1}$ jsou třídy $\mathcal{C}^k$ (tzn. jsou to $\mathcal{C}^k$–difeomorfismy).

Pozn: Nechť $G_1 \subset \mathbb{R}^n$ a $G_2 \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené. Řekneme, že prosté $f: G_1 \xrightarrow{\text{na}} G_2$ je $\mathcal{C}^k$–difeomorf., pokud f i f_{-1} jsou třídy $\mathcal{C}^k$. Pro $k=0$ je f homeomorfismus. Je-li $k \geq 1$, potom rovnost $\boxed{n = m}$ plyne z věty o lokálním difeomorfismu z MA.

DEF: C^0-atlas $\mathcal{A}$ na topologickém prostoru ~~varieta~~ X se nazývá C^k-atlas, jsou-li každé dvě mapy z $\mathcal{A}$ C^k-kompatibilní.

VAR J

$\boxed{\text{DOČASNÁ DEFINICE}}$ C^k-varieta dimenze n je topologická varieta X dim n s daným C^k-atlasem $\mathcal{A}$ na X.

$\boxed{\text{Úmluva}}$ Dále nás budou zajímat především hladké (tzn. C^∞-) variety.
Pokud neřekneme něco jiného, varieta znamená hladká varieta, atlas je hladký (tzn. C^∞-) atlas apod.

Pozn: (i) každý (C^k-) atlas $\mathcal{A}$ na $(X, \mathcal{T})$ jednoznačně určuje topologii $\mathcal{T}$. Skutečně, jsou-li $\dim \underset{\mathcal{A}}{X} = n$, potom

(*) $\mathcal{B} := \{ \varphi^{-1}(V) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A},\ V \subset \mathbb{R}^n \text{ je otevřená} \}$

je báze $\mathcal{T}$.

zřejmě $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Nechť $G \in \mathcal{T}$. Potom

$$G = \bigcup_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}} (G \cap U) \quad \text{a} \quad G \cap U = \varphi^{-1}\big(\underbrace{\varphi(G \cap U)}_{\text{ot. v } \mathbb{R}^n}\big) \in \mathcal{B}.$$

VAR 6

(ii) Pokrývá-li top. prostor $(X, \mathcal{T})$ nejvýše spočetný (C^∞-) atlas $\mathcal{A} := \{(U_k, \varphi_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$, $k = 1, 2, \dots$ potom $\mathcal{T}$ má spočetnou bázi. (Cv.)

Skutečně, nechť $\mathcal{G}$ je spočetná báze Eukleid. top. v $\mathbb{R}^n$. Položme

$$\tilde{\mathcal{B}} := \{\varphi_k^{-1}(V) \mid \underbrace{(U_k, \varphi_k) \in \mathcal{A}}_{\text{spoč.}} \text{ a } \underbrace{V \in \mathcal{G}}_{\text{spoč.}}\}.$$

Potom $\tilde{\mathcal{B}}$ je spočetná, $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ a $\forall G \in \mathcal{B}\ \exists G_\alpha \in \tilde{\mathcal{B}}, \alpha \in A$, $G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, kde $\mathcal{B}$ je jako v (*). Protože $\mathcal{B}$ je báze, je i $\tilde{\mathcal{B}}$ báze topologie $\mathcal{T}$.

Nechť $G \in \mathcal{B}$, tzn. $G = \varphi_k^{-1}(V)$ pro nějaké $(U_k, \varphi_k) \in \mathcal{A}$ a $V \subset \mathbb{R}^n$ otevřenou! Navíc $V = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ pro nějaká $V_\alpha \in \mathcal{G}$. Tudíž $G = \bigcup_{\alpha \in A} \underbrace{\varphi_k^{-1}(V_\alpha)}_{\in \tilde{\mathcal{B}}}$.