Připomenutí: Vnější diferenciál v $\mathbb{R}^n$

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $\omega \in \mathcal{E}^k(U)$. Potom na U máme

$$\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I \, dx_I \quad \text{s} \quad \omega_I \in \mathcal{E}^\infty(U) \text{ a}$$

$$d\omega := \sum_{|I|=k} d\omega_I \wedge dx_I ,$$

kde $d\omega_I(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_I(x)}{\partial x_i} dx_i$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$, viz Geom 2.

Vnější diferenciál (= de Rhamův dif.)

DEF. Nechť X je (hlad.) varieta dimenze n. Potom definujeme zobrazení $d: \mathcal{E}^*(X) \longrightarrow \mathcal{E}^*(X)$ následovně:

(i) Pro $f \in \mathcal{E}^0(X) = \mathcal{E}^\infty(X)$ jsme df definovali dříve.

(ii) Nechť $\omega \in \mathcal{E}^*(X)$. Jsou-li $u = \varphi(x)$, $x \in U$ lokální souřadnice na X (tzn. (U, φ) je mapa na X), potom na U definujeme

$$d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge du_I,$$

pokud $\omega = \underbrace{\sum_I \omega_I \, du_I}_{\text{na } U}$, kde $I \subset \{1, \dots, n\}$ a $\omega_I \in \mathcal{E}^\infty(U)$.

VĚTA: (i) Zobrazení d je dobře definováno, je lineární a $d\omega \in \mathcal{E}^{k+1}(X)$ $\forall \omega \in \mathcal{E}^k(X)$.

(ii) Je-li $\omega \in \mathcal{E}^k(X)$ a $\tau \in \mathcal{E}^\ell(X)$, potom

$$d(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge d\tau$$

(iii) $d \circ d = 0$

(iv) Je-li $F: X \longrightarrow Y$ hladké zobrazení mezi rovnostmi, potom $F^*\circ d_Y = d_X \circ F^*$.

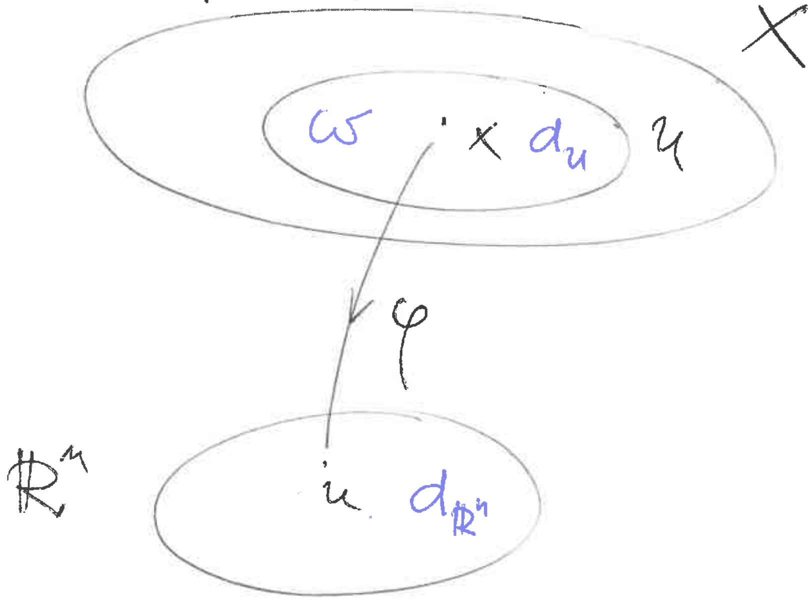
$\ulcorner$ na Y $\lrcorner$ $\qquad$ $\ulcorner$ na X $\lrcorner$

<u>DŮKAZ</u>: (a) Nechť $u=\varphi(x)$, $x\in\mathcal{U}$ je lokál. souřad. systém na X. Potom je

$$d = d_{\mathcal{U}} \overset{\text{ozn.}}{:=} \varphi^*\circ d_{\mathbb{R}^n}\circ(\varphi_{-1})^* \text{ na } \mathcal{U} \ (\text{tzn. na } \mathcal{E}^*(\mathcal{U})),$$

kde d vpravo je vnější diferenciál na $\varphi(\mathcal{U})\subset\mathbb{R}^n$.

$\| \ d_{\mathbb{R}^n}$



Skutečně, nechť $\omega(x) = \sum_I \omega_I(x)\, du_I(x)$, $x\in\mathcal{U}$,

kde $du_i = d\varphi_i$.

Potom $\left((\varphi_{-1})^*\omega\right)(u) = \sum_I \omega_I(\varphi_{-1}(u))\, du_I(u)$, kde

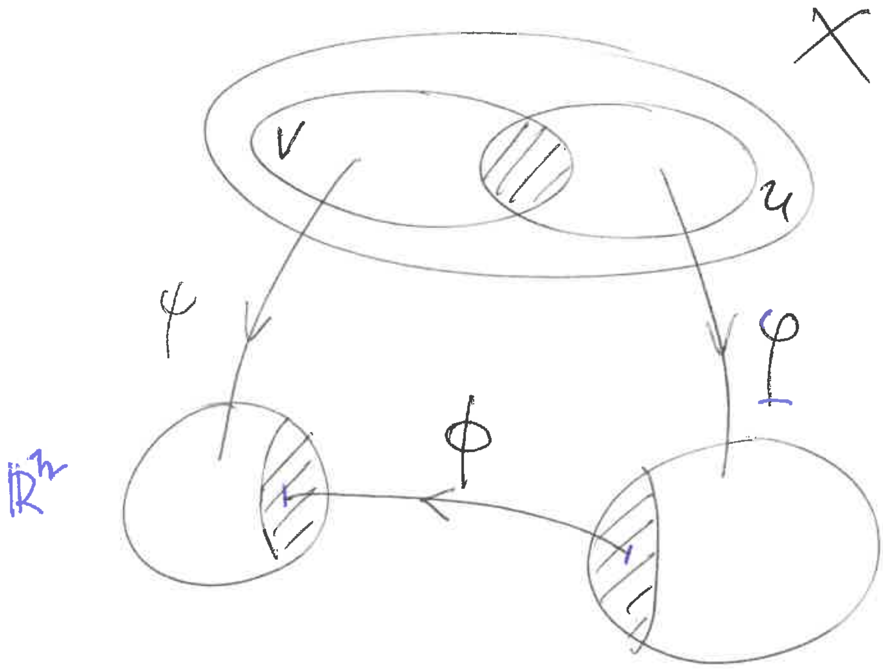
$du_i = d\pi_i$ s $\pi_i(u) = u_i$,

$u=(u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n$.

Dále $d((\varphi_{-1})^*\omega) = \sum_I d(\omega_I(\varphi_{-1}(u)))\wedge du_I$ na $\varphi(\mathcal{U})$,

tudíž $\varphi^*(d(\varphi_{-1})^*\omega) = \sum_I d\omega_I\wedge du_I = d\omega$ na $\mathcal{U}$.

(b) d je dobře definováno. Skutečně, nechť $v=\psi(x)$, $x\in V$ je jiný lokál. souřad. systém na X. Nechť $\Phi := \psi\circ\varphi_{-1}$ je příslušná přechodová funkce.



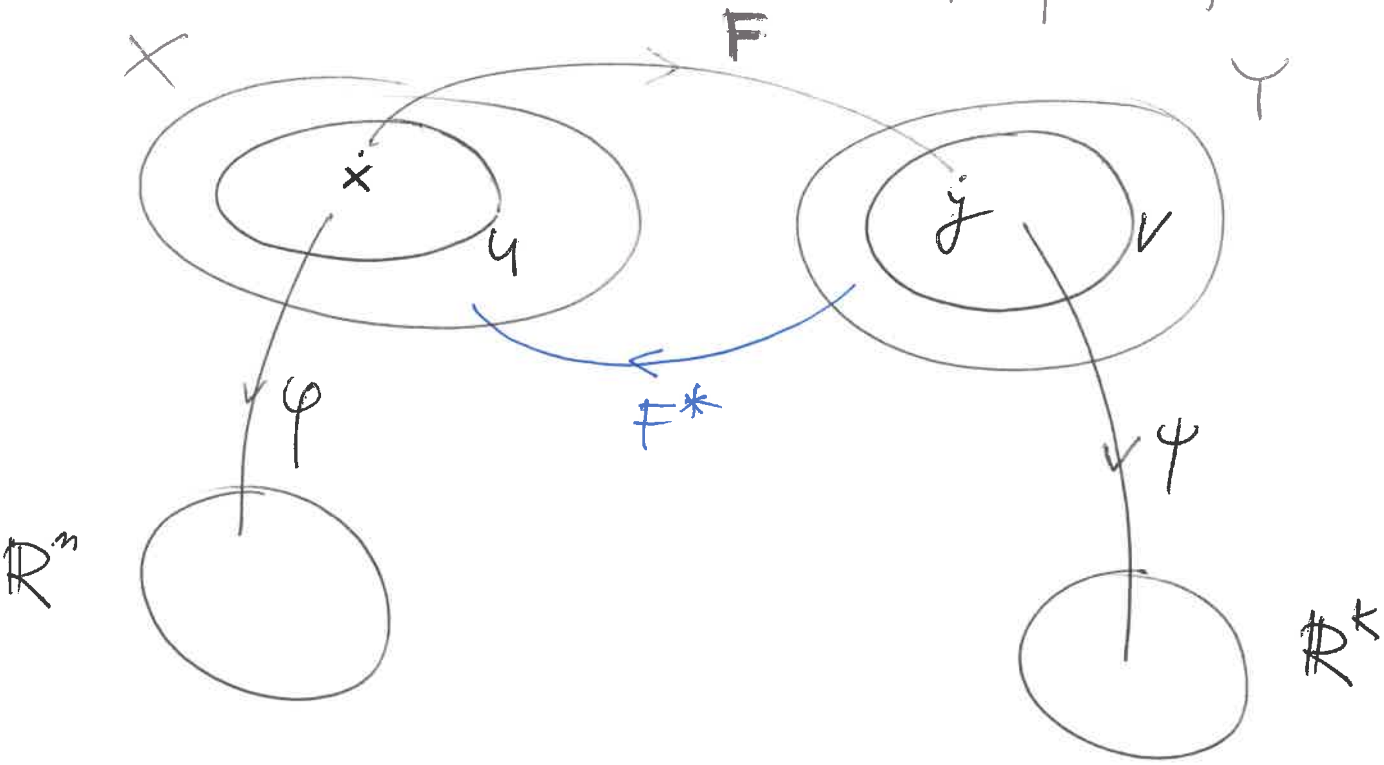
Potom na $U\cap V$ je $\psi = \Phi\circ\varphi$ a máme

$$\underbrace{\psi^*\circ d\circ(\psi_{-1})^*}_{=d_V} = \varphi^*\circ\underbrace{\Phi^*\circ d\circ\Phi_{-1}^*}_{=d}\circ\varphi_{-1}^* = \underbrace{\varphi^*\circ d\circ\varphi_{-1}^*}_{=d_U}$$

Vlastnosti (i)–(iv) má d v $\mathbb{R}^n$, díky (a) rovněž d (lokálně) na X na při

(c) Ukážeme (iv).

Nech (U,φ) je mapa na X a (V,ψ) je mapa na Y.



Potom na $U \cap F^{-1}(V)$ máme

$$F^* \circ \underset{\Gamma_V Y}{d_Y} = \varphi^* \circ \varphi_{-1}^* \circ F^* \circ \psi^* \circ \underset{\Gamma_V \mathbb{R}^k}{d} \circ (\psi_{-1})^* =$$

$$= \varphi^* \circ (\underbrace{\psi \circ F \circ \varphi_{-1}}_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k})^* \circ \underbrace{d}_{v\ \mathbb{R}^k} \circ (\psi_{-1})^* =$$

$$= (\varphi^* \circ \underset{\Gamma_V \mathbb{R}^n}{d} \circ \varphi_{-1}^*) \circ F^* \circ \psi^* \circ (\psi_{-1})^* = \underset{\Gamma_V X}{d_X} \circ F^* \quad \blacksquare$$

RJ1

Rozklad jednotky

- množiny je řadu konstrukcí, které jsou možné udělat lokálně na souřadnicových okolích, převést / poslepovat globálně na celé variety

Označení: Nechť $\omega \in \mathcal{E}^*(X)$. Potom

$$\operatorname{supp}\omega := \overline{\{x \in X \mid \omega(x) \neq 0\}}$$

je nosič ω.

DEF. Nechť X je hlad. varieta. Potom systém $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{E}^\infty(X)$ nazveme rozkladem jednotky na X, pokud

① $f_\alpha \geq 0$ na X;

② $\{\operatorname{supp} f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ je lokálně konečný, tzn.
$\forall x \in X$ $\exists$ okolí U bodu x: $\{\alpha \in A \mid \operatorname{supp} f_\alpha \cap U \neq \emptyset\}$ je konečný;

③ $\sum_{\alpha\in A} f_\alpha = 1$ na X

~~Pozn: Součet v ③ je díky ② dobře definovaný.~~

Nechť $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí X. Potom říkáme, že rozklad jednotky $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{E}^\infty(X)$ je podřízen $\mathcal{U}$, pokud

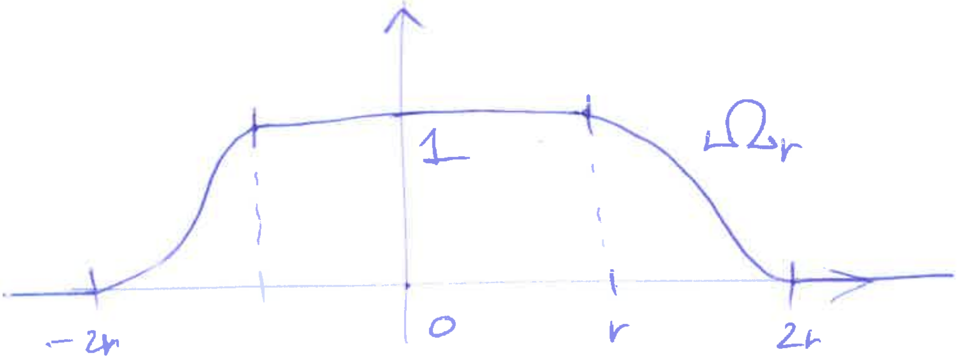
④ $\forall \alpha \in A\ \exists U \in \mathcal{U} : \operatorname{supp} f_\alpha \subset U.$ RJ2

VĚTA: Pro každé otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ hl. variety X existuje spočetný rozklad jednotky na X podřízený $\mathcal{U}$.

$\boxed{\text{LEMMA A}}$ (bump function = "hladký hrbol")

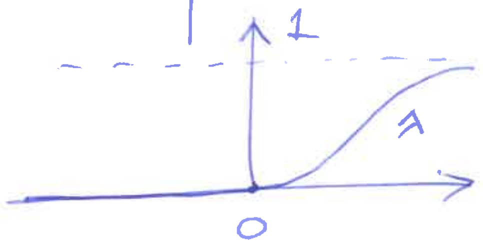
Pro každé $r>0$ ex. hladká $\Omega_r : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ taková, že (i) $\Omega_r(x) = 1 \iff \|x\| \le r$;

(ii) $\Omega_r(x) = 0 \iff \|x\| \geq 2r$.



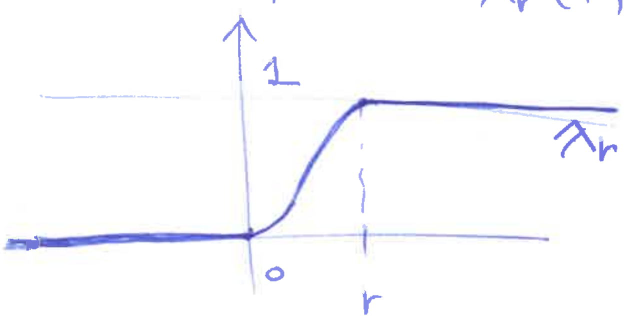
DŮKAZ: Uvažme $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ definovanou jako

$$\lambda(t) := e^{-1/t^2},\quad t>0,$$
$$:= 0,\quad t \le 0$$



Pro $r>0$ položme

$$\lambda_r(t) := \frac{\lambda(t)}{\lambda(t)+\lambda(r-t)},\quad t \in \mathbb{R},$$



a konečně

$$\Omega_r(x) := 1 - \lambda_r(\|x\| - r),\quad x \in \mathbb{R}^n. \qquad \blacksquare$$

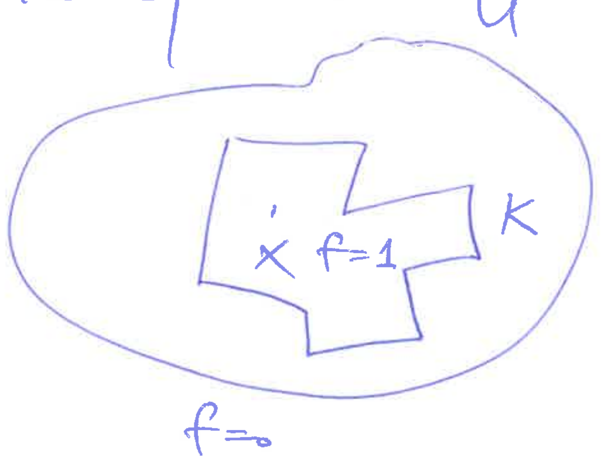
RJ3

Důsledek Nechť $U \subset X$ (X hl. mnoh.) je otevřená a $x \in U$. Potom existuje kompaktní okolí K bodu x a existuje $f \in C^\infty(X)$ taková, že

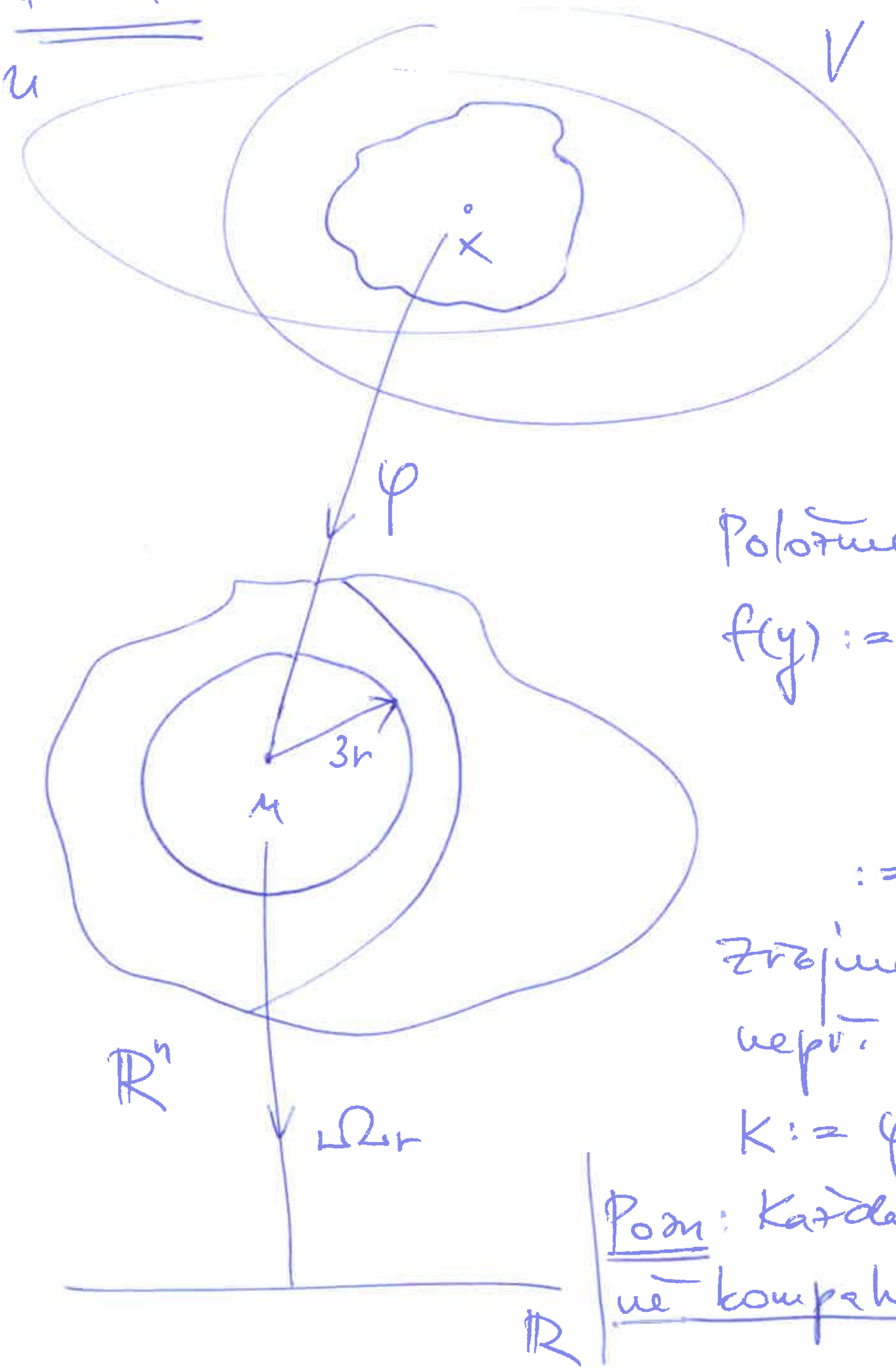
(i) $f = 1$ na $K \subset U$;

(ii) $0 \le f \le 1$ na X;

(iii) $\operatorname{supp} f \subset U$.



Důkaz:



Nechť (V, φ) je mapa na X, $x \in X$ a $u = \varphi(x)$. Volme $r > 0$, aby $\varphi^{-1}(\underbrace{B(u, 3r)}_{\text{koule v } \mathbb{R}^n}) \subset U \cap V$.

Položme

$$f(y) := \Omega_r(\varphi(y) - \overset{u}{\overset{\shortparallel}{\varphi(x)}}), \quad y \in V \cap U,$$
$$:= 0, \quad y \in X \setminus (V \cap U).$$

Zřejmě f je hledaná fce, neboť $f = 1$ na kompaktu $K := \varphi^{-1}(\overline{B(u, r)})$.

Pozn: Každá mnoh. X je lokálně kompaktní, tzn. $\forall x \in X$

má kompaktní okolí K_x.

RJ4

$\boxed{\text{LEMMA B}}$ Na každé varietě X existují kompakty K_j, $j\in\mathbb{N}$ takové, že $X=\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ a $K_j \subset \operatorname{int}(K_{j+1})$ pro všechna $j\in\mathbb{N}$.

Důkaz: (i) Ex. spočetná báze $\{O_j\}_{j=1}^{\infty}$ otevřených množin X taková, že $\overline{O_j}$ je kompaktní pro vš. $j\in\mathbb{N}$.

——— x ———

Nechť $\tilde{\mathcal{O}}$ je spočetná báze topologie X a
$\mathcal{O} := \{O\in\tilde{\mathcal{O}} \mid \overline{O}$ je kompakt$\}$.
Potom $\mathcal{O}$ je spočetná báze topologie X.
Skutečně, nechť $U\subset X$ je otevřená a $x\in U$. Nechť K_x je kompaktní okolí x. ~~Potom ex. $O\in\tilde{\mathcal{O}}$ takové, že~~ Potom $U\cap K_x$ je okolí x a existuje $O\in\tilde{\mathcal{O}}$ takové, že

$$x\in O\subset U\cap K_x .$$

Zřejmě $\overline{O}\subset K_x$ je kompakt, tudíž $O\in\mathcal{O}$.

RJT

(ii) • Položme $K_1 := \overline{O_1}$ a $n_1 := 1$.

• Existuje $n_2 > n_1$ takové, že

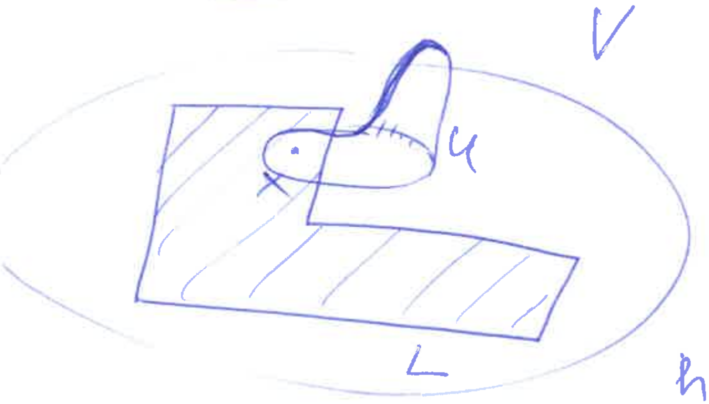
$$\underbrace{K_1}_{\text{kompakt}} \subset \bigcup_{i=1}^{n_2} O_i .$$

Položme $K_2 := \bigcup_{i=1}^{n_2} \overline{O_i}$ a indukcí sestrojíme rostoucí posl. $1 = n_1 < \dots < n_j < n_{j+1} < \dots$ tak, že

$$\underbrace{K_j \overset{\text{def.}}{:=} \bigcup_{i=1}^{n_j} \overline{O_i}}_{\text{kompakt}} \subset \bigcup_{i=1}^{n_{j+1}} O_i . \quad \blacksquare$$

DŮKAZ VĚTY O ROZKLADU JEDNOTKY:

(a) Nechť $L \subset V \subset X$, L je kompakt a V je otevřená. Potom existují $\{f_j\}_{j=1}^{k} \subset C^\infty(X)$ tak, že platí (1.), (4.), $\operatorname{supp} f_j \subset V$ pro všechna $j = 1, \dots, k$ a $\sum_{j=1}^{k} f_j > 0$ na L.



Skutečně, pro každé $x \in L$ ex. $U \in \mathcal{U}$ tak, že $x \in U$. Pro $U \cap V \ni x$ existuje dle DŮSLEDKU hladký hrbol f_x na X.

Položme $V_x := \{y \in X \mid f_x(y) \neq 0\}$.

RJ6

Protože $\{V_x \mid x \in L\}$ je otevřené pokrytí kompaktu L, existuje jeho konečné podpokrytí $V_{x_1}, \dots, V_{x_k}$. Za $\{f_j\}_{j=1}^k$ vezmeme $\{f_{x_j}\}_{j=1}^k$.

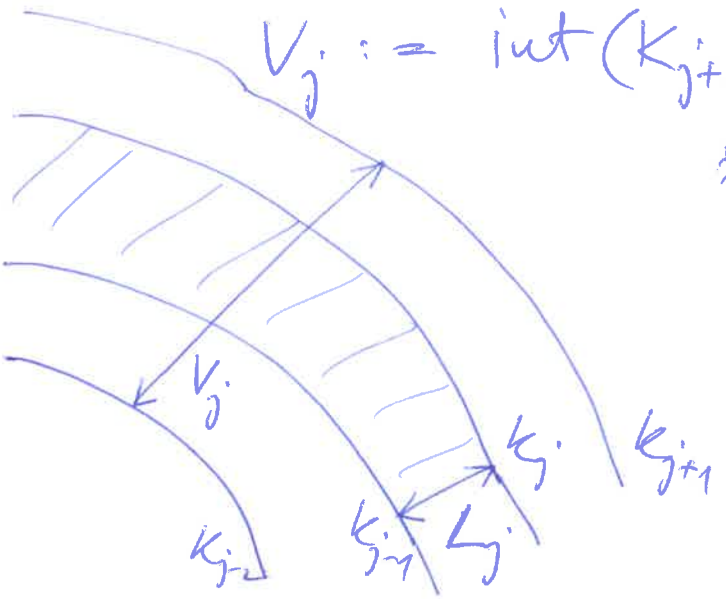
Pozn: Nechť X je kompakt a $L = V = X$. Je-li $\{f_j\}_{j=1}^k$ jako v (a), potom $\{\tilde{f}_j\}_{j=1}^k$ je rozklad jednotky na X podřízený $\mathcal{U}$, pokud

$$\tilde{f}_j := f_j \Big/ \left(\sum_{i=1}^k f_i \right), \quad j = 1, \dots, k.$$

(b) Podle LEMMATU B ex. na X kompakty K_j, $j \in \mathbb{N}$ takové, že $X = \bigcup_{j=1}^\infty K_j$ a $K_j \subset \operatorname{int}(K_{j+1})$. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ položme

$$L_j := K_j \setminus \operatorname{int}(K_{j-1}) \quad \text{a}$$

$$V_j := \operatorname{int}(K_{j+1}) \setminus K_{j-2}.$$



Potom $L_j \subset V_j$, L_j je kompakt a V_j je otevřená podmnožina v X.

RJ7

Pro $L_j \subset V_j$ zkonstruujeme dle (a) $\{f_{j,i}\}_{i=1}^{k_j}$. Položme $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A} := \{f_{j,i} \mid j \in \mathbb{N},\ i = 1, \dots, k_j\}$. Potom $\{\tilde{f}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je spojitý rozklad jednotky na X podřízený $\mathcal{U}$, pokud položíme $\forall \alpha \in A$

$$\tilde{f}_\alpha := f_\alpha \Big/ \Big(\sum_{\beta \in A} f_\beta\Big) \text{ na } X. \quad \blacksquare$$