

1. Cvičení

1. Pro která reálná čísla x platí:

a) $x^2 > 4x - 5$

b) $|x + 1| - |x - 1| = 1$

c) $\frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1} < \frac{1}{x^2-1}$

d) $\left| |x-1| - 5 \right| < 1$

e) $\frac{x}{|x+3|} < \frac{1}{x-1}$

f) $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x-1} \leq 1$

g) $\sqrt{(3x-7)(x-1)} \leq 2(x-2)$

h) $\cos x \leq \sin x$

i) $\cos^2 x \geq \sin^2 x$

j) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 3) \geq 0?$

2. Pro která $x \in \mathbb{R}$ platí:

a) $|x^2 - 4x + 3| \leq |x^2 - 4|,$

b) $|x + 1| - |x| + |x - 1| < 2,$

c) $|x^2 + x - 2| < x,$

d) $\frac{x+1}{x} \leq |x|.$

3. Řešte nerovnosti pro $x \in \mathbb{R}$:

a) $\frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{2x-2}$

b) $|x^2 - 2x - 3| > x^2 - 2x - 3$

c) $\sqrt{x-12} < x$

4. Dokažte pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$: a) $|a + b| \leq |a| + |b|$, b) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

5. Rozhodněte, zda platí následující výroky a uveďte jejich negace!

a) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} : y > x$

b) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} : x > y$

c) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x > y$

d) $\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R} \forall c \in \mathbb{R} : |a - b + c| \geq |a| - |b| - |c|$

e) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N} : z > x \implies y < z$

f) $\forall a \in \mathbb{R} \exists \epsilon > 0 \exists \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : x \in (a, a + \epsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$

g) $\exists a \in \mathbb{R} \forall \epsilon > 0 \forall \alpha \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : x \in (a, a + \epsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$

6. Nechť $A, B, C \subset X$. Dokažte:

a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$

b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$

c) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B,$

d) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$

7. Nechť $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ a $h = g \circ f : X \rightarrow Z$.

Rozhodněte, zda jsou následující výroky pravdivé:

a) Je-li f a g injektivní, je i h injektivní.

b) Je-li f a g surjektivní, je i h surjektivní.

c) Je-li f a g bijektivní, je i h bijektivní.

Lze v a), b) nebo c) vynachat některý z předpokladů? A platí v a), b) nebo c) i obrácená implikace?

8. Nechť $f : X \rightarrow Y, A, B \subset X, C, D \subset Y$. Platí obecně

a) $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$,

b) $f(A \setminus B) \subset f(A) \setminus f(B)$,

c) $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$,

d) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,

e) $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) = f^{-1}(C \cup D)$?

9. Načrtněte v (x, y) - rovině množinu všech bodů (x, y) , pro které platí:

a) $x^2 - 2|y| > 1$ b) $|x| \leq 5$ a $|y| \leq 5$ c) $|x| \leq 5$ nebo $|y| \leq 5$ d) $x^2 + y^2 - 2(x - y) \leq 2$

e) $|x| + |y| = 2$ f) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 \leq 4$ g) $|x - y|^2 - |x + y|^2 < 1$ h) $x^2 + y^2 \leq 4, (x - 1)^2 + y^2 \geq 1$.

10. Načrtněte grafy funkcí:

a) $f_1(x) = \sin(x), f_2(x) = \sin(2x), f_3(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right), f_4(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$,

b) $g_1(x) = \frac{1}{x}, g_2(x) = \frac{1}{x + 3}, g_3(x) = \frac{x}{x + 3}$

c) $h_1(x) = |||x| - 1| - 1| - 1|, h_2(x) = |||5x| - 1| - 1| - 1|, h_3(x) = |||x + 3| - 1| - 1| - 1|$.

Pro funkce v bodě b) udejte definiční obory a příslušné inverzní funkce!

11. a) Buď $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{4 - \sqrt{x}}$. Najděte $D(f)$ - maximální definiční obor f , $H(f)$ - obor hodnot f a f^{-1} .

b) Buď $f(x) = \frac{2x+3}{3x+2}$. Najděte $D(f)$, $H(f)$ a f^{-1} .