Matematická analýza pro fyziky I

ZS 2016/17

4. Cvičení

1. Nechť $f(x) = \left(\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{2}{3x+5}\right)\dfrac{1}{x-1}, \quad (x \neq 1).$

   a) Ukažte $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{32}$.

   b) Udejte $\delta > 0$ takové, že pro všechna x s $|x-1| < \delta$ platí: $|f(x) - \frac{1}{32}| < \frac{1}{100}$.

2. a) Vyjádřete

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

   pro $a \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}$ pomocí kvantifikátorů.

   b) Definujme

$$\begin{aligned}
U(a,\delta) &= (a-\delta, a+\delta) \quad \text{pro} \quad a \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0,\\
U(+\infty,\delta) &= (1/\delta, \infty) \quad \text{pro} \quad \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0,\\
U(-\infty,\delta) &= (-\infty, -1/\delta) \quad \text{pro} \quad \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0,\\
U^+(a,\delta) &= [a, a+\delta) \quad \text{pro} \quad a \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0,\\
U^-(a,\delta) &= (a-\delta, a] \quad \text{pro} \quad a \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0,\\
P^+(a,\delta) &= U^+(a,\delta) \setminus \{a\}, P^-(a,\delta) = U^-(a,\delta) \setminus \{a\}, P(a,\delta) = U(a,\delta) \setminus \{a\}.
\end{aligned}$$

   Vyjádřete pomocí této notace výše uvedené limity.

3. Spočtěte následující limity:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}, \quad (b \neq 0)$

   b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{x-4}\left(\sqrt{3x-1} - \sqrt{11}\right)$

   c) $\lim\limits_{x\to \infty} x^{1000}\, e^{-\sqrt{x}}$

   d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x-1} \quad (n \in \mathbb{N})$

   e) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x^{10} + 10^{10}\right)^{-1} \sum\limits_{k=0}^{1000} (x+k)^{10}$

   f) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(2 + x\sqrt{1 + \dfrac{4}{x^2}}\right)$

   g) $\lim\limits_{x\to 0-} \left(2 + x\sqrt{1 + \dfrac{4}{x^2}}\right)$

4. a) Funkce $f : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ budiž definována jako : $f\left(\frac{1}{2n}\right) := 1,\ f\left(\frac{1}{2n-1}\right) := 0,\ n \in \mathbb{N}$, a na každém intervalu $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ nechť jsou funkční hodnoty na koncích intervalu spojeny úsečkou. Načrtněte průběh funkce a ukažte, že limita $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

   b) Nechť $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$ Pro která $x_0 \in \mathbb{R}$ existuje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$?

5. Budiž $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá na $\mathbb{R}$. Funkce f_+ a f_- jsou definovány jako:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{pokud} \quad f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{pokud} \quad f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{pokud} \quad f(x) \leq 0 \\ 0, & \text{pokud} \quad f(x) > 0 \end{cases}.$$

Ukažte:

a) Platí $f = f_+ - f_-$ a $|f| = f_+ + f_-$.

b) f_+ a f_- jsou spojité na $\mathbb{R}$.

6. a) Dokažte: $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

b) $16 \arctan \dfrac{1}{5} - 4 \arctan \dfrac{1}{239} = \pi$

7. Spočtěte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-2x} - \dfrac{x}{x^2-4}\right)$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)\dots(1+nx)-1}{x}$, $n \in \mathbb{N}$,

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1-x)}{x}$, g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

8. Vyšetřete následující funkce na spojitost:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-3x+2} & x \notin \mathbb{N} \\ \frac{4x-6}{x+1} & x \in \mathbb{N} \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ c) $f(x) = x + \dfrac{x}{|x|}$

d) $f(x) = x - [x]$, wobei $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : \ k \le x\}$.

9. Zjistěte, zda jsou následující funkce ryze monotóní a (pokud ano) najděte inverzní funkci.

a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 0]$ b) $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ c) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

10. Najděte přirozené definiční obory funkcí, vyšetřete funkce na diferencovatelnost a najděte jejich derivace:

a) $e^{x^3 \cos x}$, b) $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$, c) $\left|\pi^2 - x^2\right| \sin^2 x$, d) $\cos^2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$, e) x^{2x},

f) $|\cos x|$, g) $2^{\sin \frac{1}{x}}$, h) $\sqrt{1-e^{-x^2}}$, i) $\left|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\right|$

11. Zjistěte, zda jsou funkce v bodě $x_0 = 1$ diferencovatelné!

a) $f(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1-x^2 \ , \ x \le 1 \\ x^2 - 1 \ , \ x > 1 \end{array} \right\}$ b) $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{x} & , \ 0 < x < 1 \\ -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2} \ , & x \ge 1 \end{array} \right\}$ c) $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{x+2}{x+1} & , \ 0 < x < 1 \\ -\dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{4} \ , & x \ge 1 \end{array} \right\}$

12. Najděte rovnici tečny

a) k parabole $y = 3x - x^2$ v bodě $(1, 2)$,

b) k elipse $(x-1)^2 + 4y^2 = 4$ v bodě $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

13. Najděte rozměry válcové konzervy, která má při daném objemu 1 dm^3 minimální plochu.

14. Určete derivace $\left(f^{-1}\right)'(y)$ a $\left(g^{-1}\right)'(y)$ pro funkce

a) $f(x) = \ln \sqrt{1+x^4}$, $x \in (0, \infty)$, b) $g(x) = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

15. Pro následující funkce nalezněte lokální a globální extrémy:

a) $f(x) = x^n e^{-x}$ na $[0, \infty)$ $(n \in \mathbb{N})$, b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ na $(0, \infty)$

16. Pro následující funkce nalezněte lokální a globální extrémy:

a) $f(x) = |x^2 - 1|$ na [-2,2] *b)* $f(x) = \sin x \sin 2x$ na $\mathbb{R}$