

6. Cvičení

1. Řešte následující diferenciální rovnice;

a) $y' = e^{2x-y}$ b) $y' = \sin(x-y)$ substitute: $z(x) = x - y(x)$

c) $y' + \sin \frac{x+y}{2} = \sin \frac{x-y}{2}$ d) $y' - y \cdot \cos x = 3 \cos x$

e) $x^3 + y - 2xy' = 0$ f) $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$ substitute $z(x) = \frac{y(x)}{x}$

2. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice:

a) $y'' - 2y' + y = e^x$

b) $y'' - y = f(x)$ s $f(x) = x$, $f(x) = \sin x$

c) $y'' + y = f(x)$ s $f(x) = x$, $f(x) = \sin x$

3. Najděte řešení diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou:

a) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, & x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 2x_2, & x_2(0) = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - 4x_2, & x_1(0) = 3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2, & x_2(0) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_2, & x_1(0) = 2 \\ \dot{x}_2 = -5x_1 + x_2, & x_2(0) = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 + x_2 - 36t, & x_1(0) = -2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + x_2 - 2e^t, & x_2(0) = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + 2x_2 + e^t, & x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 6x_2 + e^{2t}, & x_2(0) = 0 \end{cases}$

4. Řešte diferenciální rovnice

a) $y''' - y' = e^{2x}$

b) $y'' - y = (1+x)e^{2x}$

c) $y''' - 7y' + 6y = 0$

d) $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$

e) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (x > 0)$.

5. Řešte diferenciální rovnice

a) $x^2 y'' + 5x y' + 4y = 0$

b) $(1+x)^2 y'' + (1+x)y' + y = 4 \cos(\ln(1+x))$

6. Řešte diferenciální rovnice - separace proměnných

- a) $y' = xy^2$
- b) $y' = -y \ln x \ln y$
- c) $y' = \left(\frac{2y+3}{4x+5}\right)$
- d) $y' = (y+3) \tan x$
- e) $y' = -\frac{xy}{1+x^2}$
- f) $y' = y^2 \cos x$
- g) $y' = \frac{-e^{y^2}}{x^2 y}$
- h) $y' = \frac{1-y^2}{x}$

7. Řešte diferenciální rovnice - separace proměnných

- a) $x(x+1)y(y+1) - y' = 0; \quad y(0) = -1$
- b) $y' = \frac{2xy^2}{1-x^2}, \quad y(0) = 1$
- c) $y' = \frac{y}{x}, \quad x > 0$
- d) $y' = \frac{y^2}{x^2}, \quad x > 0$
- e) $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}y' = 0$
- f) $2\sqrt{y} = y'$
- g) $(1+x^2)(1+y^2)y' + 2xy(1-y^2) = 0, \quad (0, -2)$
- h) $y' \tan(x) - y = 1, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad \left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$
- i) $y' = \frac{x}{y}$
- j) $y' = \frac{y}{x}$
- k) $y' = \tan x \tan y$ s $x, y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ a $k \in \mathbb{N}$
- l) $y' + 2xy = 0$

8. Řešte diferenciální rovnice - variace konstant

- a) $x^3 + y - 2xy' = 0$
- b) $xy' - 2y = e^x(x-2)$
- c) $y' - y \cos x = 3 \cos x$
- d) $xy' + 2y = x^2$
- e) $y' = y \tan(x) + 1$ s počáteční podmínkou $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2}$
- f) $y' - \frac{y}{x} = -\sqrt{x}$ s počáteční podmínkou $y(1) = 3$
- g) $(1+x^2)y' + xy = 1$ s počáteční podmínkou $y(0) = 1$.
- h) $y' + \frac{1}{2x}y = \sqrt{x} \sin(x)$ s $y(\pi) = 2\sqrt{\pi}$
- i) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$
- j) $y' = \frac{\sin x}{\cos x}y + \cos x$