

7. Cvičení

1. Řešte diferenciální rovnice - speciální pravé strany

a) $y'' + y = 4 \sin x$

b) $y'' - y = e^x \cos x$

c) $y'' + y' + y = e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x$

d) $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$

e) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x - x + 16$

f) $2y''' - 3y'' - 3y' + 2y = (e^x + e^{-x})^2$

g) $y'''' - 2y'' + y'' = e^x + 1$

h) $y'''' + y = (x + 1)^4$

2. Řešte diferenciální rovnice - Variace konstant

a) $y'' + y = \tan x$

b) $y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}$

c) $y'' + y = \cos^{-3} x$

d) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$

e) $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1 + e^x}$

f) $4y'' - 4y' + y = e^{x/2} \sqrt{1 - x^2}$

3. Necht $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Dokažte, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ pro $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

4. Spočtete všechny parciální derivace prvního řádu

a) $f(x, y, z) := z \cdot \arctan(x/y)$ b) $f(x, y, z) := x^{(y^z)}$

5. Spočtete smíšené parciální derivace druhého řádu

a) $f(x, y) := \arccos \sqrt{(y/x)}$ b) $f(x, y) := x^{(y^2)}$

6. *Základní pojmy vektorové analýzy.* Budiž $f = (f_1, f_2, f_3)$ a $f_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$. Necht mají funkce f_1, f_2 a f_3 spojitě parciální derivace prvního řádu v každém směru. Definujeme rotaci vektorového pole f

$$\operatorname{rot} f := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right),$$

divergenci vektorového pole f

$$\operatorname{div} f := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}.$$

Dokažte následující identity:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad \text{pro } f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) \equiv (0, 0, 0) \quad \text{pro } f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

a

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) \equiv 0 \quad \text{pro } f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

7. Dokažte následující odhady pro $n \in \mathbb{N}$:

$$(1) \quad \left(\frac{n}{e}\right)^n < \frac{n!}{e} < n \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}.$$

8. Spočtěte následující limity:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1} \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 6n}{n^3 - 7n + 7} \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 3n - 2}{n^5 - 3n^3 + 1},$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n + n \sin 2n}{n \cos 3n + (2n + \sin 4n)^2}, \quad e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n + n^2)^2}{\left(5 + \frac{1}{n}\right)^n}, \quad f)^* \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}.$$

Nápověda k f)

Z Bernoulliho nerovnosti plyne pro $x \geq -\frac{2}{n}$, že

$$(1+x)^n = \left[(1+x)^{n/2}\right]^2 \geq \left[1 + \frac{n}{2}x\right]^2 = 1 + nx + \frac{n^2x^2}{4}.$$

9. Spočtěte následující limity:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{1}{n}\right) \quad d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \quad f)^* \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt[3]{n^3+1}\right).$$

10. Určete limity následujících posloupností pro $n \rightarrow \infty$.

$$a) \frac{(n+1)!}{(n+2)! - n!} \quad b) n^2 \left[\left(1 + \frac{3}{n}\right)^5 - \left(1 + \frac{5}{n}\right)^3\right] \quad c) \frac{(-1)^n n}{2n^2 + 5} \quad d) \frac{n!}{n^n}$$

$$e) \sqrt[3]{3^n + 5^n + 7^n} \quad f) \sqrt{(n+a)(n+b)} - n, \quad a, b > 0$$

11. Ukažte, že posloupnost reálných čísel $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ definovaná pomocí $\xi_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\xi_n + \frac{a}{\xi_n}\right)$, $a \geq 0$, $\xi_1 > 0$ konverguje k \sqrt{a} .

12. Spočtěte následující limity:

$$a) \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n} \quad b) \left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2} \quad c) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad d) \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

13. Spočtěte následující limity:

$$a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 9x + 20} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}} \quad d) \lim_{x \uparrow 1} \ln x \ln(1-x)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin \frac{\pi}{2}x}{(x-3)^2} \quad f) \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(\sin 5x)}{\ln(\sin 3x)} \quad g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^x - 2^x}{x^2} \quad h) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

14. Spočtěte následující limity:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\pi/2 - \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan x)^{1/x},$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} (\cos x)^{x-\pi/2}.$$