Matematická analýza pro fyziky I

ZS 2016/17

1. Cvičení

1. Für welche reellen Zahlen x gilt:

a) $x^2 > 4x - 5$ **b)** $|x+1| - |x-1| = 1$ **c)** $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x}{x+1} < \dfrac{1}{x^2-1}$

d) $\Big|\, |x-1| - 5 \,\Big| < 1$ **e)** $\dfrac{x}{|x+3|} < \dfrac{1}{x-1}$ **f)** $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x-1} \le 1$

g) $\sqrt{(3x-7)(x-1)} \le 2(x-2)$ **h)** $\cos x \le \sin x$ **i)** $\cos^2 x \ge \sin^2 x$

j) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 3) \ge 0$?

zu (a)

Es gilt: $x^2 > 4x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 > 0$. Nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen besitzt $x^2 - 4x + 5 = 0$ keine Lösungen. Da die Ungleichung aber beispielsweise für $x = 0$ erfüllt ist, gilt sie demnach für alle $x \in \mathbb{R}$.

zu (b)

Hinweis Ausdrücke in denen Beträge vorkommen, löst man, indem man diese durch *Fallunterscheidungen* gemäss der Definition von $|x|$ beseitigt.

Man kann $|x+1| - |x-1| = 1$ dementsprechend wie folgt lösen:

Fallunterscheidung zur Beseitigung der Betragsstriche

1.Fall: $x+1 \ge 0$ und $x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -1$ und $x \ge 1 \Leftrightarrow \boxed{x \in [1, \infty)}$

2.Fall: $x+1 \ge 0$ und $x-1 < 0 \Leftrightarrow x \ge -1$ und $x < 1 \Leftrightarrow \boxed{x \in [-1, 1)}$

3.Fall: $x+1 < 0$ und $x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x < -1$ und $x \ge 1 \Leftrightarrow \boxed{x \in \emptyset}$

4.Fall: $x+1 < 0$ und $x-1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$ und $x < 1 \Leftrightarrow \boxed{x \in (-\infty, -1)}$

Der dritte Fall ist ausgeschlossen und muss daher nicht weiter betrachtet werden.

Beseitigung der Betragsstriche

1.Fall: $\boxed{x \in [1, \infty)} \quad \Rightarrow \quad |x+1| - |x-1| = 1 \Leftrightarrow x+1-x+1 = 1 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

2.Fall: $\boxed{x \in [-1, 1)} \quad \Rightarrow \quad |x+1| - |x-1| = 1 \Leftrightarrow x+1+x-1 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

4.Fall: $\boxed{x \in (-\infty, -1)} \quad \Rightarrow \quad |x+1| - |x-1| = 1 \Leftrightarrow -x-1-(-(x-1)) = 1 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

Die Fälle eins und zwei sind für kein x lösbar und fallen daher aus der weiteren Betrachtung heraus. Zusammenfassend ergibt sich:

x löst die Ungleichung $\Leftrightarrow x \in [-1, 1) \wedge x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

zu (c)

Es gilt: $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x}{x+1} < \dfrac{1}{x^2-1} \Leftrightarrow \dfrac{x(x+1) - x(x-1)}{x^2-1} < \dfrac{1}{x^2-1} \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2-1} < \dfrac{1}{x^2-1}$ $(\star)$.

Da sich das Relationszeichen einer Ungleichung umkehrt, wenn diese mit einer negativen Zahl multipliziert wird, ergibt sich durch die Nullstellen 1 und -1 des Nenners von $(\star)$ folgenden Fallunterscheidung:

$$
\begin{aligned}
-\infty < x < -1: &\quad \frac{2x}{x^2-1} < \frac{1}{x^2-1} \Leftrightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \Rightarrow L_1 = (-\infty,-1)\\
-1 < x < 1: &\quad \frac{2x}{x^2-1} < \frac{1}{x^2-1} \Leftrightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \Rightarrow L_2 = \left(\frac{1}{2},1\right)\\
1 < x < \infty: &\quad \frac{2x}{x^2-1} < \frac{1}{x^2-1} \Leftrightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \Rightarrow L_3 = \emptyset
\end{aligned}
$$

Also erfüllt $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x}{x+1} < \dfrac{1}{x^2-1}$, wenn gilt:

$x \in L = L_1 \cup L_2 = (-\infty,-1) \cup (\frac{1}{2},1)$.

<u>zu (d)</u>

Für $\Big||x-1|-5\Big| < 1$ ergibt sich folgende Fallunterscheidung:

Fall 1: $|x-1|-5 \geq 0 \wedge x-1 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \in [6,\infty)}$

Fall 2: $|x-1|-5 \geq 0 \wedge x-1 < 0 \Rightarrow \boxed{x \in (-\infty,-4]}$

Fall 3: $|x-1|-5 < 0 \wedge x-1 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \in [1,6)}$

Fall 4: $|x-1|-5 < 0 \wedge x-1 < 0 \Rightarrow \boxed{x \in (-4,1)}$

<u>Beseitigung der Betragsstriche</u>

Fall 1: $\boxed{x \in [6,\infty)} \quad \Rightarrow \quad x-1-5 < 1 \Leftrightarrow x < 7 \quad \Rightarrow L_1 = [6,7)$

Fall 2: $\boxed{x \in (-\infty,-4]} \quad \Rightarrow \quad 1-x-5 < 1 \Leftrightarrow x > -5 \quad \Rightarrow L_2 = (-5,-4]$

Fall 3: $\boxed{x \in [1,6)} \quad \Rightarrow \quad 5-x-1 < 1 \Leftrightarrow x > 5 \quad \Rightarrow L_3 = (5,6)$

Fall 4: $\boxed{x \in (-4,1)} \quad \Rightarrow \quad 5+x-1 < 1 \Leftrightarrow x < -3 \quad \Rightarrow L_4 = (-4,-3)$

$x \in \mathbb{R}$ erfüllt die Ungleichung $\Big||x-1|-5\Big| < 1$ also, wenn gilt:

$x \in L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 = [6,7) \cup (-5,-4] \cup (5,6) \cup (-4,-3) = (5,7) \cup (-5,-3)\,.$

<u>zu (e)</u>

Für $\dfrac{x}{|x+3|} < \dfrac{1}{x-1}$ $(\star)$ ergibt sich folgende Fallunterscheidung:

Fall 1: $x+3 > 0 \wedge x-1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -3 \wedge x > 1 \quad \Rightarrow \quad x \in (1,\infty)$

Fall 2: $x+3 > 0 \wedge x-1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -3 \wedge x < 1 \quad \Rightarrow \quad x \in (-3,1)$

Fall 3: $x+3 < 0 \wedge x-1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -3 \wedge x > 1 \quad \Rightarrow \quad x \in \emptyset$

Fall 4: $x+3 < 0 \wedge x-1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -3 \wedge x < 1 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty,-3)$

Fall 3 ist offenbar für kein $x \in \mathbb{R}$ lösbar und fällt daher aus der weiteren Betrachtung heraus.

<u>Beseitigung der Betragsstriche</u>

Für den ersten Fall $x > 1$ führt $(\star)$ auf die Ungleichung $x^2-2x-3 < 0$, welche für $x \in L_1 = (1,3)$ erfüllt ist, da $x^2-2x-3 = 0$ in $x=-1$ und $x=3$ Nullstellen besitzt.

Im zweiten Fall $x \in (-3,-1)$ ergibt sich aus $(\star)$ die Ungleichung $x^2-2x-3 > 0$, die dementsprechend für $x \in L_2 = (-3,-1)$ erfüllt ist.

Für den vierten Fall $x < -3$ ist $(\star)$ mit der Ungleichung $x^2+3 > 0$ äquivalent. Da diese aber für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist gilt: $L_3 = (-\infty,-3)$

$x \in \mathbb{R}$ erfüllt die Ungleichung $\dfrac{x}{|x+3|} < \dfrac{1}{x-1}$ also, wenn gilt:

$x \in L = L_1 \cup L_2 \cup L_4 = (1,3) \cup (-3,-1] \cup (-\infty,-3) = (1,3) \cup (-\infty,-1) \setminus \{-3\}\,.$

<u>zu (f)</u>

Da unter einer reellen Wurzel stets nur positive Zahlen stehen dürfen, ergibt sich für $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x-1} \leq 1$ von vornherein die Beschränkung $x \geq 2$. Weiter folgt:
$\sqrt{2x-4}-\sqrt{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow 2x-4 \leq 1+2\sqrt{x-1}+x-1 \Leftrightarrow x-4 \leq 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2-8x+16 \leq 4x-4 \Leftrightarrow x^2-12x+20 \leq 0$. Da die Nullstellen von $x^2-12x+20=0$ bei $x=2$ und $x=10$ liegen, ist die Ungleichung $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x-1} \leq 1$ für $x \in L=[2,10]$ erfüllt.

zu (g)

Zunächst muss für $\sqrt{(3x-7)(x-1)} \leq 2(x-2)$, $(3x-7)(x-1) \geq 0$ gesichert werden, da reelle Wurzeln nur für positive Zahlen definiert sind. Folglich ist $x \geq \frac{7}{3}$ bzw. $x < 1$. Da jedoch stets auch $2(x-2) \geq 0$, also $x \geq 2$ delten muss, da sonst $\sqrt{(3x-7)(x-1)} < 0$ sein müsste, entfällt der Fall $x < 1$. Die Lösung ergibt sich nun durch folgende Umformungen: $\sqrt{(3x-7)(x-1)} \leq 2(x-2) \Rightarrow (3x-7)(x-1) \leq 4(x-2)^2 \Leftrightarrow 3x^2-10x+7 \leq 4x^2-16x+16 \Leftrightarrow 0 \leq x^2-6x+9$. Da $f(x) := x^2-6x+9$ eine doppelte Nullstelle bei $x=3$ hat, sind ihre Funktionswerte stets positiv und $\sqrt{(3x-7)(x-1)} \leq 2(x-2)$ ist für alle $x \geq \frac{7}{3}$ erfüllt.

zu (h)

Wir lösen erstmal die Gleichung $\cos x = \sin x$. Der Fall $\cos x = \sin x = 0$ kommt nie vor; es gilt also $\cos x = \sin x \neq 0$. Das ist äquivalent zu $\tan x = 1$, d.h.

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die Ungleichung ist sicher auf den Stellen $x = 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$, nicht erfüllt und auf den Stellen $x = (2l+1)\pi, l \in \mathbb{Z}$, erfüllt.

Als Lösung der Ungleichung ergeben sich also Intervalle der Form

$$\left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + (k+1)\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z},$$

die einen Punkt der Form $x = (2l+1)\pi, l \in \mathbb{Z}$, enthalten. Also

$$\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z},$$

zu (i)

Wir schreiben die Ungleichung um:

$$\begin{aligned} \cos^2 x &\geq \sin^2 x, \\ 1 - \sin^2 x &\geq \sin^2 x, \\ \frac{1}{2} &\geq \sin^2 x, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} &\geq |\sin x|, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} &\geq \sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Die Lösung lautet dann

$$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

zu (j)

$$\log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)},$$

wobei ln der *natürliche* Logarithmus ist. Die Ungleichung ist also äquivalent zu

$$\frac{\ln(x^2-3x+3)}{\ln(1/3)} = \frac{\ln(x^2-3x+3)}{-\ln 3} \geq 0.$$

Man überzeugt sich leicht, dass $x^2 - 3x + 3 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\ln 3 > \ln 1 = 0$. Also ist die Ungleichung äquivalent zu

$$\ln(x^2-3x+3) \leq 0$$

und, nach bekannten Eigenschaften von Logarithmus, ist das wieder äquivalent zu

$$x^2 - 3x + 3 \leq 1 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) \leq 0,$$

d.h. $x \in [1, 2]$.

2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $|x^2 - 4x + 3| \leq |x^2 - 4|$,

b) $|x+1| - |x| + |x-1| < 2$,

c) $|x^2 + x - 2| < x$,

d) $\frac{x+1}{x} \leq |x|$.

Zu a)

Wir schreiben die Ungleichnug erstmal um:

$$|(x-3)(x-1)| \leq |(x-2)(x+2)|.$$

Die "wichtige" Punkte sind also $-2, 1, 2, 3$. Wir machen folgende Fallunterscheidung:

I. Fall $x \in (-\infty, -2]$:

$x^2 - 4x + 3 < x^2 - 4$, d.h. $\frac{7}{4} < x$, also keine Lösung im Interval $(-\infty, -2]$. $L_1 = \emptyset$.

II. Fall $-2 \leq x \leq 1$:

$x^2 - 4x + 3 \leq -x^2 + 4$, d.h. $x \in [1 + \sqrt{\frac{3}{2}}, 1 - \sqrt{\frac{3}{2}}]$. Es ergibt sich $L_2 = [1 - \sqrt{\frac{3}{2}}, 1]$.

III. Fall $1 \leq x \leq 2$:

$-(x^2 - 4x + 3) \leq -(x^2 - 4)$, d.h. $\frac{7}{4} \geq x$, d.h. $L_3 = [1, \frac{7}{4}]$.

IV. Fall $2 \leq x \leq 3$:

$-x^2 + 4x - 3 \leq x^2 - 3$, d.h. $x \in [1 + \sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$, d.h. $L_4 = [1 + \sqrt{\frac{3}{2}}, 3]$.

V. Fall $x \in [3, \infty)$:

$x^2 - 4x + 3 < x^2 - 4$, d.h. $\frac{7}{4} \leq x$, d.h. $L_5 = [3, \infty)$.

$L = \bigcup_{i=1}^{5} L_i = [1 - \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{7}{4}] \cup [1 + \sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$.

Zu b)

Fallunterscheidung:

I. Fall $x \leq -1$:

$-x - 1 + x - x + 1 < 2$, d.h. $x > -2$, d.h. $L_1 = (-2, -1]$.

II. Fall $x \in [-1, 0]$:

$x + 1 + x - x + 1 < 2$,d.h. $x < 0$, d.h. $L_2 = [-1, 0)$.

III. Fall $x \in [0, 1]$:

$x + 1 - x - x + 1 < 2$, d.h. $x > 0$, d.h. $L_3 = (0, 1]$.

IV. Fall $x \geq 1:$

$x+1-x+x-1<2$, d.h. $x<2$, d.h. $L_4=[1,2)$.

$L=(-2,2)\setminus\{0\}$.

Zu c)

Alle Fälle mit $x \leq 0$ kann man sofort ausschließen.

I. Fall $x \in (0,1]$:

$-x^2-x+2<x$, d.h. $x \in (-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3})$, d.h. $L_1=(-1+\sqrt{3},1]$.

II. Fall $x \geq 1$:

$x^2+x-2<x$, d.h. $x \in (-\sqrt{2},\sqrt{2})$, d.h. $L_2=[1,\sqrt{2})$.

$L=(-1+\sqrt{3},\sqrt{2})$.

Zu d)

I. Fall $x<0:$

$\frac{x+1}{x} \leq -x$, d.h. $x+1 \geq -x^2$, d.h. $x^2+x+1>0$. Das stimmt für alle $x \in \mathbb{R}$, also $L_1=(-\infty,0)$.

II. Fall $x>0:$

$x+1 \leq x^2$, d.h. $x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, also $L_2=[\frac{1+\sqrt{5}}{2},\infty)$.

$L=L_1 \cup L_2$.

3. Loesen Sie die Ungleichungen
   a) $\frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{2x-2}$
   b) $|x^2-2x-3|>x^2-2x-3$
   c) $\sqrt{x-12}<x$

   a)

$$\begin{array}{lcl} \text{FĂĽr } x<-2 & : & \frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{2x-2} \Leftrightarrow 2x-2 \leq x+2 \Leftrightarrow x \leq 4 \\ \text{FĂĽr } -2<x1 & : & \frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{2x-2} \Leftrightarrow 2x-2 \geq x+2 \Leftrightarrow x \geq 4 \\ \text{FĂĽr } 1<x & : & \frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{2x-2} \Leftrightarrow 2x-2 \leq x+2 \Leftrightarrow x \leq 4 \end{array}$$

   Insgesamt: $(-\infty,-2) \cup (1,4]$

   b)

$$|x^2-2x-3|>x^2-2x-3 \Leftrightarrow x^2-2x-3<0 \qquad (-1,3)$$

   c)

$$\sqrt{x-12}<x \Leftrightarrow x \geq 12 \wedge x-12<x^2 \Leftrightarrow x \geq 12$$

4. Beweisen Sie für alle $a,b \in \mathbb{R}$: a) $|a+b| \leq |a|+|b|$, b) $||a|-|b|| \leq |a-b|$.

   Wir führen eine Fall-Unterscheidung durch.

   I. $a \geq 0, b \geq 0$, II. $a \geq 0, b \leq 0$, III. $a \leq 0, b \geq 0$, IV. $a \leq 0, b \leq 0$.

   Zu I: aus $a,b \geq 0$ folgt auch $a+b \geq 0$. Die Ungleichung hat also die Form $a+b \leq a+b$ und ist offensichtlich richtig.

   Zu IV: aus $a,b \leq 0$ folgt auch $a+b \leq 0$. Die Ungleichung hat also die Form $-(a+b) \leq -a-b$ und ist ebenfalls richtig.

   Zu II: Die Gleichung lautet $|a+b| \leq a-b$. Falls $a+b \geq 0$ ist, dann ist es zu zeigen, dass $a+b \leq a-b$ ist, d.h. $b \leq 0$. Das ist aber in dem Fall II. erfüllt. Falls $a+b \leq 0$ ist, dann muss man zeigen, dass $-(a+b) \leq a-b$, d.h. $a \geq 0$. Das ist in dem Fall II. wieder erfüllt.

   Zu III: Völlig analog zu II.

b) Wir beweisen eine äquivalente Ungleichung, nämlich:

$$-|a-b| \le |a| - |b| \le |a-b|.$$

Die erste Hälfte folgt aus a)

$$|b| = |b-a+a| \le |b-a| + |a| = |a-b| + |a|,$$

d.h. $|a-b| + |a| - |b| \ge 0$, d.h. $|a| - |b| \ge -|a-b|$.

Die zweite Hälfte folgt analog:

$$|a| = |a-b+b| \le |a-b| + |b|.$$

5. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen richtig sind und geben Sie ihre Negationen!

a) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}:\ y > x$

b) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}:\ x > y$

c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}:\ x > y$

d) $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ \forall c \in \mathbb{R}:\ |a-b+c| \ge |a| - |b| - |c|$

e) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}:\ z > x \implies y < z$

f) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \epsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}:\ x \in (a, a+\epsilon) \Leftrightarrow |x-\alpha| < 1$

g) $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \epsilon > 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}:\ x \in (a, a+\epsilon) \Leftrightarrow |x-\alpha| < 1$

Zu a) Ja, die Aussage stimmt. Für alle $x \in \mathbb{N}$ gibt es nämlich wirklich ein $y \in \mathbb{N}$ (man nehme z.B. $y = x+1$), so dass $y > x$ ist.

Negation lautet: $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}:\ y \le x$.

Zu b) Nein. Die Negation lautet $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}:\ x \le y$ und diese Aussage stimmt. Wenn $x = 1$ ist, dann gilt tatsächlich für alle $y \in \mathbb{N}$, dass $1 \le y$ ist.

Zu c) Ja. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ findet man wirklich ein $y \in \mathbb{R}$ (z.B. $y = x-1$), so dass $y < x$. Die Negation lautet $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}:\ x \le y$

Zu d) Ja. Der Beweis folgt aus

$$|a| = |a-b+c+b-c| \le |a-b+c| + |b| + |-c| = |a-b+c| + |b| + |c|.$$

Die Negation lautet $\exists a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbb{R}:\ |a-b+c| < |a| - |b| - |c|$ und diese Aussage ist falsch.

Zu e) Ja. Zu jedem $x \in \mathbb{N}$ finden wir ein $y \in \mathbb{N}$ (Wahl: $y = x$), so dass für alle $z \in \mathbb{N}$ die Implikation $z > x \implies y < z$ gilt. Negation: $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}:\ z > x$ und $y \ge z$.

Zu f) Ja. Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ finden wir ein ϵ (Wahl: $\epsilon = 2$) und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ (Wahl: $\alpha = a+1$), so dass $x \in (a, a+\epsilon) = (a, a+2)$ äquivalent zu $|x-(a+1)| < 1$ ist.

Negation:

$\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \epsilon > 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}:\ (x \in (a, a+\epsilon)$ und $|x-\alpha| \ge 1)$ oder $(x \notin (a, a+\epsilon)$ und $|x-\alpha| < 1)$

Zu g) Ja. Wir wählen $a = 0$. Zu jedem $\epsilon > 0$ und zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ finden wir dann ein x, (z. B. $x = \max(a+\epsilon, \alpha+1)$), so dass die beide Aussagen $x \in (a, a+\epsilon)$ und $|x-\alpha| < 1$ falsch sind (und daher äquivalent).

Negation:

$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \epsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}:\ (x \in (a, a+\epsilon)$ und $|x-\alpha| \ge 1)$ oder $(x \notin (a, a+\epsilon)$ und $|x-\alpha| < 1)$

6. Sei $A, B, C \subset X$. Beweisen Sie:

a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,

c) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$,

d) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Zu a)

x liegt in $(A \cup B) \cap C$ genau dann, wenn x in $A \cup B$ und gleichzeitig in C liegt, also genau dann, wenn es in einer der Mengen A und B und in C liegt.

Wenn x in A und C liegt, dann liegt es auch in $A \cap C$ und dann auch in $(A \cap C) \cup (B \cap C)$. Wenn es aber in B und C liegt, dann ist es auch in $B \cap C$, also auch in $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Wenn x in $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ liegt, dann liegt es in $A \cap C$ oder in $B \cap C$, also in A und C oder in B und C. Es liegt also auf jeden fall in C und in einer der Mengen A und B.

Zu b) Analog zu a).

Zu c)

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (A \setminus B) &\Leftrightarrow (x \in A) \ \wedge \ (x \notin A \setminus B) \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \ \wedge \ \neg(x \in A \ \wedge \ x \notin B) \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \ \wedge \ (\neg(x \in A) \ \vee \neg(\ x \notin B)) \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \ \wedge \ ((x \notin A) \ \vee (x \in B)) \\
&\Leftrightarrow ((x \in A) \ \wedge \ (x \notin A)) \ \vee ((x \in A) \wedge (x \in B)) \\
&\Leftrightarrow 0 \ \vee ((x \in A) \wedge (x \in B)) \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B) \\
&\Leftrightarrow x \in A \cap B
\end{aligned}$$

Zu d)

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \setminus C) &\Leftrightarrow (x \in A) \ \wedge \ x \notin (B \setminus C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \ \wedge \ ((x \notin B) \ \vee (x \in C)) \\
&\Leftrightarrow ((x \in A) \ \wedge \ (x \notin B)) \ \vee (x \in A) \ \wedge \ (x \in C)) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \ \vee \ (x \in A \cap C) \\
&\Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (A \cap C).
\end{aligned}$$

Versuchen Sie c) und d) auch “deutsch” zu sagen!

7. Sei $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ und $h = g \circ f : X \to Z$.

Entscheiden Sie, ob folgende Aussage richtig sind:

a) Sind f und g injektiv, ist auch h injektiv.

b) Sind f und g surjektiv, ist auch h surjektiv.

c) Sind f und g bijektiv, ist auch h bijektiv.

Kann man in a), b) oder c) eine der Voraussetzungen weglassen? Und gelten in a), b) oder c) auch die umgekehrte Implikationen?

Falls h bijektiv ist, geben Sie eine Formel für h^{-1} an!

Zu a)

Sei f injektiv, d. h. $f(x) = f(y) \implies x = y$.

Sei auch g injektiv, d. h. $g(\alpha) = g(\beta) \implies \alpha = \beta$.

Nach der Definition von h ist $h(\aleph) = h(\beth)$ äquivalent zu $g(f(\aleph)) = g(f(\beth))$. Daraus folgt ($\alpha = f(\aleph), \beta = f(\beth)$), dass $f(\aleph) = f(\beth)$, und daraus wieder $\aleph = \beth$. Also ist h auch injektiv.

Zu b)

Sei f und g surjektiv, d.h. $f(X) = Y$ und $g(Y) = Z$. Oder noch anders, für jedes $z \in Z$ gibt es ein $y \in Y$, so dass $g(y) = z$ ist. Und für jedes $y \in Y$ gibt es ein $x \in X$, so dass $f(x) = y$. Insgesamt gibt es für jedes $z \in Z$ ein $x \in X$, so dass $h(x) = g(f(x)) = z$. h ist also surjektiv.

Zu c)

Folgt aus a) und b)

Keine der Voraussetzungen darf man weglassen. Die Gegenbeispiele sind nahliegend und trivial. Z. B. findet man eine Funktion f und eine injektive Funktion g, so dass h nicht injektiv ist.

Sei $X = \{1,2,3\}, Y = \{1,2,3,4\}$ und $Z = \{1,2,3\}$. Weiter sei $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$ und $g(1) = 1, g(2) = 2, g(3) = 3, g(4) = 1$. Dann ist $h(1) = 1, h(2) = 2, h(3) = 3$, also h ist injektiv, aber g ist nicht! Die Umgekehrte Richtung zu a) gilt also nicht allgemein. h ist auch surjektiv, aber f nicht. Also auch in b) kann man die Richtung nicht umdrehen, sowohl wie in c).

Die Formel für h^{-1} lautet $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, d.h. $h^{-1}(x) = f^{-1}(g^{-1}(x))$.

Der Beweis dieser Formel ist direkt, wenn auch f und g bijektiv sind. Sonst wäre eine Verallgemeinerung der Definition f^{-1} nötig.

8. Sei $f : X \to Y, A, B \subset X, C, D \subset Y$. Gilt allgemein:

   a) $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$,

   b) $f(A \setminus B) \subset f(A) \setminus f(B)$,

   c) $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$,

   d) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,

   e) $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) = f^{-1}(C \cup D)$?

   Zu a) Ja, diese Formel stimmt.

   Setzen wir voraus, dass $x \in f(A) \cup f(B)$ liegt. Dann liegt es in $f(A)$ oder in $f(B)$. In dem ersten fall gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) = x$, in dem zweiten $b \in B$ mit $f(b) = x$. In beiden Fällen gibt es dann ein Element $c \in A \cup B$ mit $f(c) = x$, also $x \in f(A \cup B)$.

   Rückrichtung: Sei $x \in f(A \cup B)$. Dann existiert ein $c \in A \cup B$ mit $f(c) = x$. Weil c in $A \cup B$ liegt, muss es in A oder in B liegen. In dem ersten Fall liegt dann $x = f(c)$ in $f(A)$, in dem zweiten dann in $f(B)$. In jedem Fall liegt aber x in $f(A) \cup f(B)$.

   Zu b) Nein.

   Man betrachte z. B. $X = \{1,2,3\}, Y = \{0,1\}, A = \{1,2\}, B = \{3\}$ und $f(1) = f(3) = 0, f(2) = 1$.

   Also $f(A \setminus B) = \{0,1\}$ und $f(A) \setminus f(B) = \{1\}$.

   Zu c) Ja.

   Sei $x \in f(A) \setminus f(B)$. D.h. $x \in f(A)$ und $x \notin f(B)$. Also es gibt ein $a \in A$ mit $f(a) = x$ aber kein $b \in B$ mit $f(b) = x$. Daraus folgt, dass $a \notin B$ und $x \in f(A \setminus B)$.

   Zu d) Nein. Man kann z. B. dasselbe Beispiel als in b) benutzen. $f(A \cap B) = \emptyset$, $f(A) \cap f(B) = \{0\}$.

   Zu e) Ja.

   Wenn $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ liegt, dann liegt es in $f^{-1}(C)$ oder in $f^{-1}(D)$. D. h. $f(x) \in C$ oder $f(x) \in D$. In beiden Fällen gilt, dass $f(x) \in C \cup D$, also dass $x \in f^{-1}(C \cup D)$.

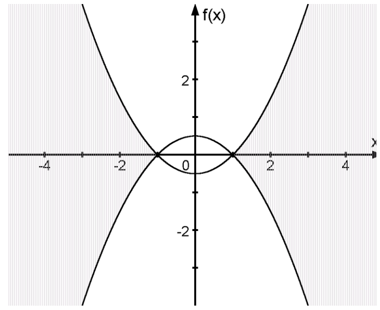
   Wenn $x \in f^{-1}(C \cup D)$, dann liegt $f(x)$ in $C \cup D$. Also liegt $f(x)$ in C oder in D, und dementsprechend x in $f^{-1}(C)$ oder in $f^{-1}(D)$. In beiden Fällen liegt aber x in $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

9. Man skizziere in der $(x,y)-$ Ebene die Menge aller Punkte (x,y) mit:

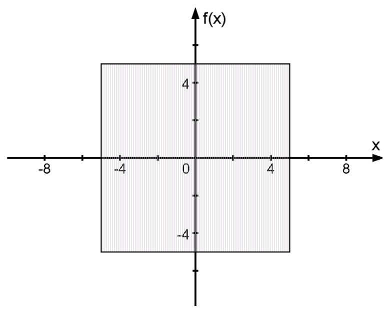
   a) $x^2 - 2|y| > 1$ **b)** $|x| \leq 5$ und $|y| \leq 5$ **c)** $|x| \leq 5$ oder $|y| \leq 5$ **d)** $x^2 + y^2 - 2(x-y) \leq 2$
   e) $|x| + |y| = 2$ **f)** $(x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 4$ **g)** $|x-y|^2 - |x+y|^2 < 1$ **h)** $x^2 + y^2 \leq 4,\ (x-1)^2 + y^2 \geq 1$.

   zu (a)

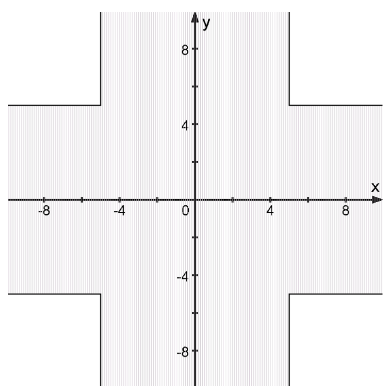
$$x^2 - 2|y| > 1 \Leftrightarrow 2|y| < x^2 - 1 \Leftrightarrow |y| < \frac{x^2-1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} y < \dfrac{x^2-1}{2}, \text{ falls } y \geq 0 \\ y > \dfrac{1-x^2}{2}, \text{ falls } y < 0 \end{cases}$$



zu (b)



zu (c)



zu (d)

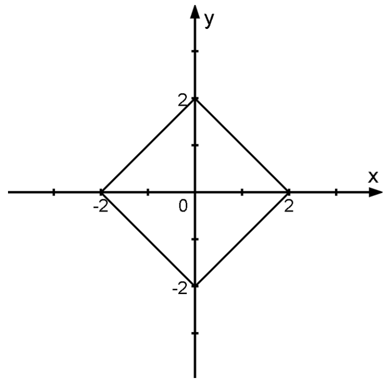
$x^2 + y^2 - 2(x - y) \leq 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4$. Die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die also der Ungleichung $x^2 + y^2 - 2(x - y) \leq 2$ genügen, liegen in der abgeschlossenen Kreisschreibe (mit Rand) mit dem Radius 2 um den Punkt $(1, -1)$.

zu (e)

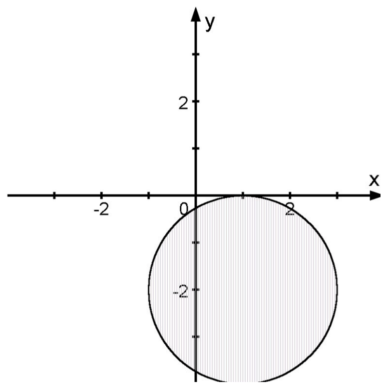
$|x| + |y| = 2$

Fallunterscheidung

1. Fall: $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \Rightarrow y = 2 - x$
2. Fall: $x \geq 0 \wedge y < 0 \Rightarrow y = x - 2$
3. Fall: $x < 0 \wedge y \geq 0 \Rightarrow y = x + 2$
4. Fall: $x < 0 \wedge y < 0 \Rightarrow y = -(x + 2)$



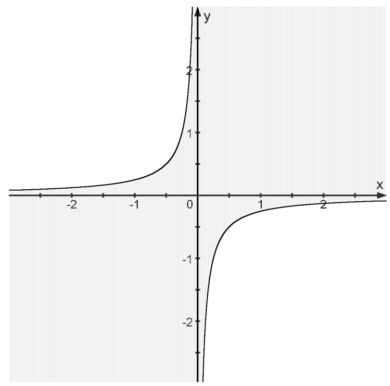
zu (f)



zu (g)

Da $|x|^2 = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, folgt: $|x-y|^2 - |x+y|^2 < 1 \Leftrightarrow (x-y)^2 - (x+y)^2 < 1$. Und weiter: $(x-y)^2 - (x+y)^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 - (x^2 + 2xy + y^2) < 1 \Leftrightarrow$

$$-4xy < 1 \Leftrightarrow xy > -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} y > -\dfrac{1}{4x}, \text{ falls } x > 0 \\ y < -\dfrac{1}{4x}, \text{ falls } x < 0 \end{cases}$$



zu (h)

10. Skizieren Sie die Graphen der Funktionen

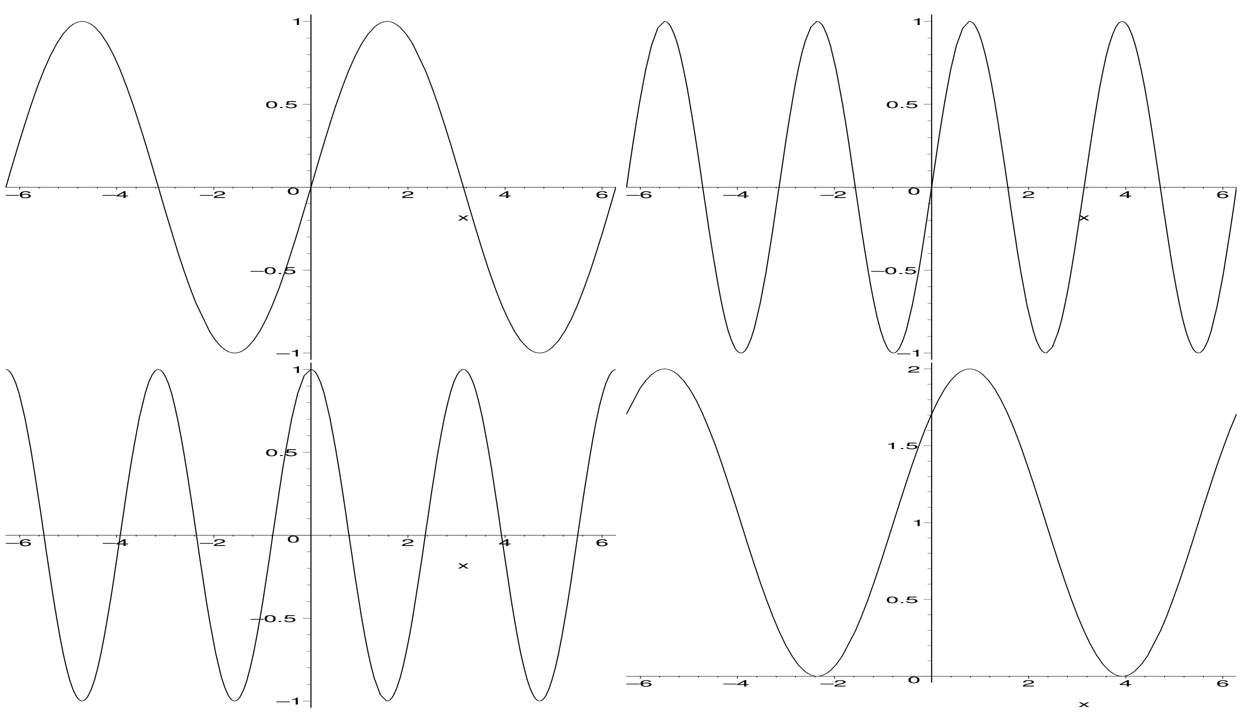
a) $f_1(x) = \sin(x)$, $\quad f_2(x) = \sin(2x)$, $\quad f_3(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$, $\quad f_4(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4}) + 1$,

b) $g_1(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad g_2(x) = \dfrac{1}{x+3}$, $\quad g_3(x) = \dfrac{x}{x+3}$

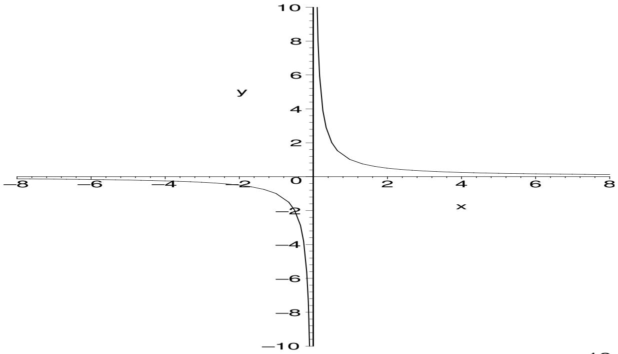
c) $h_1(x) = ||||x| - 1| - 1| - 1|$, $\quad h_2(x) = ||||5x| - 1| - 1| - 1|$, $\quad h_3(x) = ||||x+3| - 1| - 1| - 1|$.

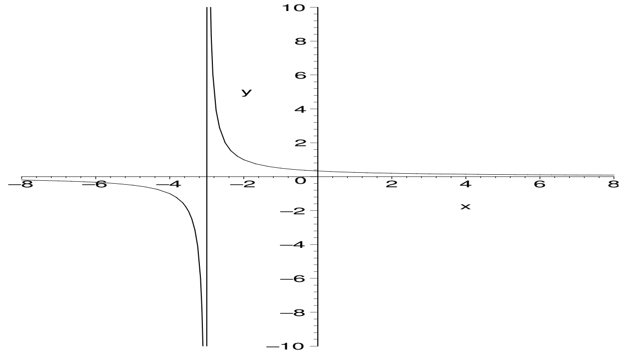
Geben Sie für die Funktionen in b) ihre Definitionsgebiete und Umkehrfunktionen!

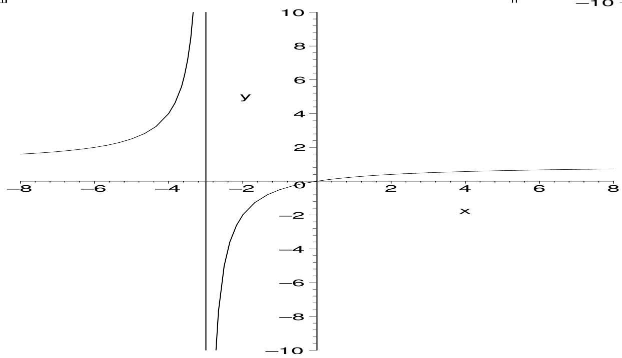
a)



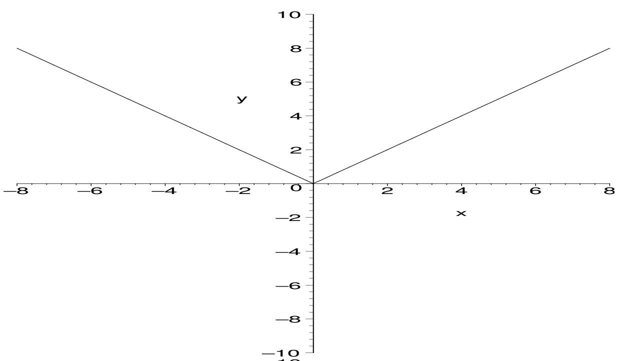
b)

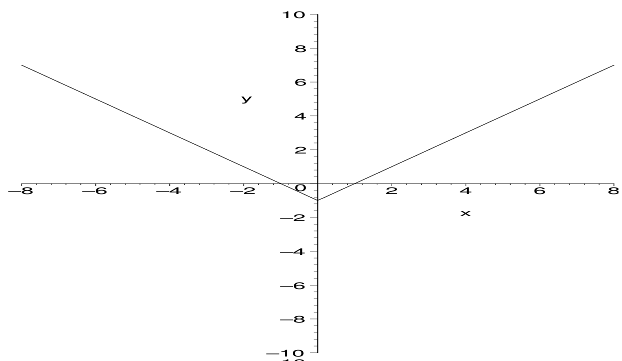


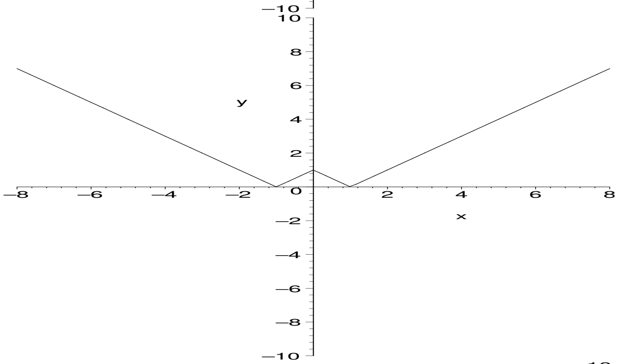


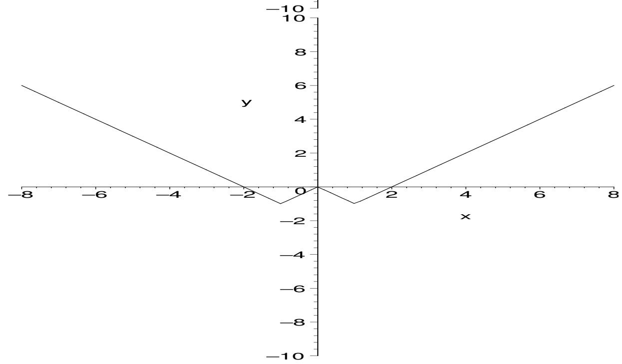


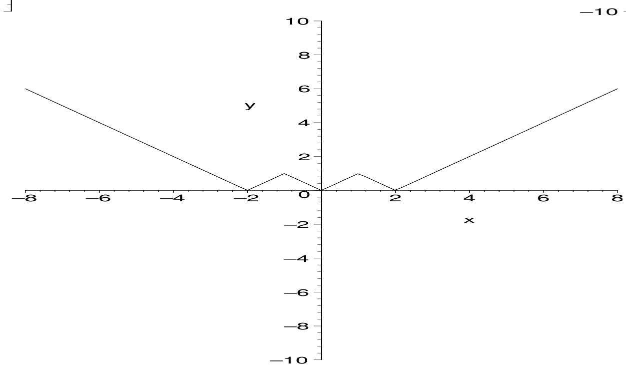
c) Erstmal machen wir Skizzen von $|x|, |x|-1, ||x|-1|, ||x|-1|-1$ und $|||x|-1|-1|$:

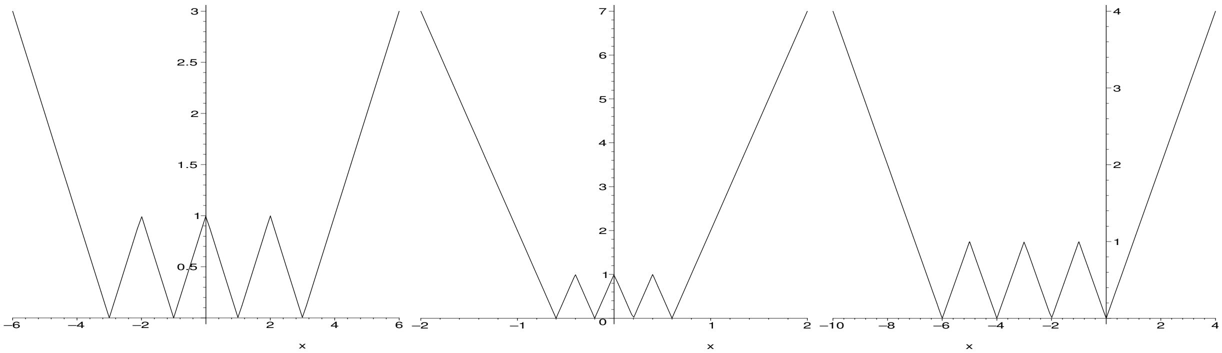












11. a) Sei $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}$. Finden Sie $D(f)$ - maximales Definitionsbereich von f, $W(f)$ - Wertebereich von f und f^{-1}.

b) Sei $f(x) = \frac{2x+3}{3x+2}$. Finden Sie $D(f)$, $W(f)$ und f^{-1}.

Damit der Ausdruck wohl definiert ist, muss $x \geq 0$ sein und $4 \neq \sqrt{x}$, also $x \in [0, \infty) \setminus \{16\}$.

$$\frac{2\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}} = \frac{-2(4-\sqrt{x})+8}{4-\sqrt{x}} = -2 + \frac{8}{4-\sqrt{x}}.$$

Wenn $x \in [0, 16)$ liegt, ist $x \in [0, 4)$ und $4 - \sqrt{x} \in (0, 4]$, und schließlich $\frac{8}{4-\sqrt{x}}$ in $[2, \infty)$ und $-2 + \frac{8}{4-\sqrt{x}}$ in $[0, \infty)$.

Man überlegt sich, dass man diese Kette Implikationen auch umdrehen kann.

Falls $x \in (16, \infty)$, ist $\sqrt{x} \in (4, \infty)$, $4 - \sqrt{x} \in (-\infty, 0)$, und schließlich $\frac{8}{4-\sqrt{x}}$ in $(-\infty, 0)$ und $-2 + \frac{8}{4-\sqrt{x}}$ in $(-\infty, -2)$.

Also $W(f) = (-\infty, -2) \cup [0, \infty)$.

Aus der Betrachtung folgt auch, dass $f : D(f) \to W(f)$ bijektiv ist.

Falls $y \in W(f)$ und $y = f(x)$, dann gilt

$$\frac{2\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}} = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{4y}{2+y} \Leftrightarrow x = \left(\frac{4y}{2+y}\right)^2.$$

Die letzte Äquivalenz gilt, weil $x \in D(f)$ immer nicht-negativ ist, also $f^{-1}(y) = \left(\frac{4y}{2+y}\right)^2$.

Zu b)

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$.

Um den Wertebereich zu finden, schreiben wir die Formel für $f(x)$ um:

$$f(x) = \frac{2x+3}{3x+2} = \frac{2}{3} + \frac{-\frac{4}{3}+3}{3x+2} = \frac{2}{3} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{3x+2}.$$

$$x \in \left(-\frac{2}{3}, \infty\right) \Leftrightarrow 3x+2 \in (0, \infty) \Leftrightarrow \frac{1}{3x+2} \in (0, \infty) \Leftrightarrow f(x) \in \left(\frac{2}{3}, \infty\right).$$

Genauso folgt $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow f(x) \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$.

Also $W(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$.

Aus der Gleichung $f(x) = y$ folgt sofort $x = f^{-1}(y) = \frac{2y-3}{2-3y}$.