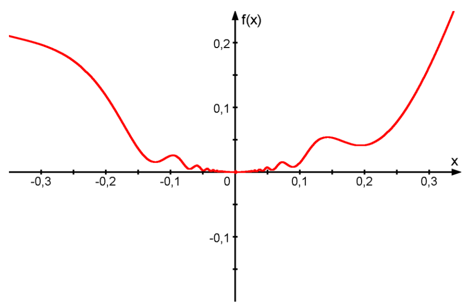
Matematická analýza pro fyziky I

ZS 2016/17, MFF UK

8. Cvičení

1. Nechť $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$

   Ukažte, že f je v $x = 0$ diferencovatelná a má tam lokální minimum. Dále ukažte, že neexistuje okolí 0, na kterém je $f'(x) < 0$ pro $x < 0$ a $f'(x) > 0$ pro $x > 0$.

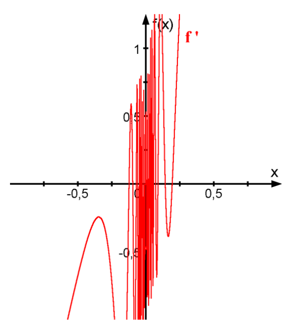


   Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ besitzt im Punkt $x_0 = 0$ ein lokales Minimum, denn aus der Definition der Funktion kann man ablesen, dass $f(x) \geq f(x_0 = 0),\ x \in \mathbb{R}$ gilt.

   Aus Aufgabe 4b der 11. Serie ergibt sich, dass f auch differenzierbar ist:

   $f'(x) = \begin{cases} 2x\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right) - \cos\dfrac{1}{x} & \text{für } |x| \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

   $f'(x) < 0$ für $x < 0$ und $f'(x) > 0$ für $x > 0$, gilt jedoch nicht, da f' in jeder Umgebung von 0 positive und negative Werte hat.



2. Vypočtěte co možná nejefektivněji Taylorovy polynomy n-tého řádu následujících funkcí se středem v $x_0 = 0$:

   a) $f(x) = e^{2x-x^2}$, $n = 5$ *b)* $f(x) = \sin^2 x - x^2 e^{-x}$, $n = 4$

   c) $f(x) = \ln(1 + \sin x)$, $n = 5$

   Wir bezeichnen im Folgenden eine Funktion $g(x)$ als $O(h(x))$, falls eine Konstante $C > 0$ existiert mit

   $$|g(x)| \leq C|h(x)| \quad \text{für} \quad x \to 0$$

   a) Wir haben die Darstellung

   $$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{y^5}{5!} + O(y^6)$$

zur Verfügung. Damit

$$\begin{aligned} e^{2x-x^2} &= e^{2x}e^{-x^2} \\ &= \left(1+2x+\frac{4x^2}{2}+\frac{8x^3}{6}+\frac{16x^4}{24}+\frac{32x^5}{120}+O(x^6)\right)\cdot\left(1-x^2+\frac{x^4}{2}+O(x^6)\right) \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren bringt dann

$$e^{2x-x^2} = 1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+O(x^6)$$

b) Wir nutzen das Additionstheorem

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1-2\sin^2 x \quad \Longrightarrow \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)$$

und die Entwicklung

$$\cos y = 1-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{4!}+O(y^6)$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \sin^2 x - x^2e^{-x} &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{4x^2}{2\cdot 2}-\frac{16x^4}{2\cdot 4!}+O(x^6)\right)+\left(-x^2+x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{6}+O(x^6)\right) \\ &= x^3-\frac{5}{6}x^4+\frac{x^5}{6}+O(x^6) \end{aligned}$$

c) Wir nutzen die Darstellung

$$\ln(1+y) = y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\frac{y^5}{5}+O(y^6)$$

Mit

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+O(x^6)$$

erhalten wir durch ausmultiplizieren

$$\sin^2 x = x^2-\frac{x^4}{6}-\frac{x^4}{6}+O(x^6) = x^2-\frac{x^4}{3}+O(x^6) \quad ,$$

$$\sin^3 x = x^3-\frac{x^5}{3}-\frac{x^5}{6}+O(x^6) = x^3-\frac{x^5}{2}+O(x^6) \quad ,$$

$$\sin^4 x = x^4+O(x^6) \quad , \quad \sin^5 x = x^5+O(x^6) \quad \text{und} \quad \sin^6 x = O(x^6)$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} \ln(1+\sin x) &= \sin x-\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^4 x}{4}+\frac{\sin^5 x}{5}+O(\sin^6(x)) \\ &= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(x^3-\frac{x^5}{2}\right)-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+O(x^6)+O(\sin^6 x) \\ &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{24}+O(x^6) \end{aligned}$$

3. a) Pro která x platí přibližná formule $\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ s chybou nejvýše $0,00005$?
   b) Vypočtěte $\cos 5$ s chybou menší než 10^{-5}.
   c) Ukažte, že se hodnoty $\sin(\alpha+h)$ a $\sin\alpha+h\cos\alpha$ pro všechna α liší nejvýše o $\frac{h^2}{2}$.

a) $\cos(x)$ und $\sin(x)$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und es gilt:

$$\sin' x = \cos(x) \quad \text{und} \quad \cos'(x) = -\sin(x).$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt also

$$\cos^{(2n)} x = (-1)^n \cos x \quad \text{und} \quad \cos^{(2n-1)} x = (-1)^n \sin x. \tag{1}$$

und insbesondere

$$\cos^{(2n)} 0 = (-1)^n \quad \text{bzw} \quad \sin^{(2n-1)} 0 = 0 \tag{2}$$

Sei $N \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert nach dem Satz von Taylor ein $\vartheta(N, x) \in (0, 1)$ mit

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^{2N+1} \cos^{(k)}(0) \cdot \frac{x^k}{k!} + \cos^{(2N+2)}(\vartheta x) \frac{x^{2N+2}}{(2N+2)!} \\ &\underset{(1),(2)}{=} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{N+1} \cos(\vartheta x) \frac{x^{(2N+2)}}{(2N+2)!}. \end{aligned}$$

Für $N = 2$ erhalten wir also

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cos(\vartheta x) \frac{x^6}{6!}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \left| \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) \right| &\leq \left| \cos(\vartheta x) \frac{x^6}{6!} \right| \\ &\underset{|\cos(\cdot)| \leq 1}{\leq} \frac{x^6}{6!}. \end{aligned}$$

Somit erreichen wir für die x mit $x^6/6! < 10^{-5}$ die geforderte Genauigkeit:

$$\frac{x^6}{6!} < 10^{-5} \quad \Leftrightarrow \quad x^6 < \frac{720}{100000} \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \left(\frac{720}{100000}\right)^{\frac{1}{6}} \approx 0.439.$$

b)

$$x = 5\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{36} \quad \Rightarrow \quad x^6 = \left(\frac{\pi}{36}\right)^6 < \left(\frac{1}{10}\right)^6 < \frac{720}{100000}$$

Mit Aufgabe a) folgt

$$\cos x \approx 1 - \frac{(\pi/36)^2}{2} + \frac{(\pi/36)^4}{4!} \approx 0.9961946$$

bis auf einen Fehler von 10^{-5}.

c) Aufgrund des Taylorschen Satzes existiert ein $\vartheta(\alpha, h) \in (0, 1)$

$$\sin(\alpha + h) = \sin(\alpha) + \cos(\alpha) \cdot h - \sin(\alpha + \vartheta h) \cdot \frac{h^2}{2}.$$

Und damit

$$\begin{aligned} |\sin(\alpha + h) - (\sin(\alpha) + \cos(\alpha) \cdot h)| &= \left| \sin(\alpha + \vartheta h) \cdot \frac{h^2}{2} \right| \\ &\underset{|\sin(\cdot)| \leq 1}{\leq} \frac{h^2}{2}. \end{aligned}$$

4. Diskutujte průběh funkce (definični obor, spojitost, diferencovatelnost, průsečíky se souřadnými osami, chování v nekonečnu a na krajích definičního oboru, monotonie, extrémy, konvexita, obor hodnot, obrázek)

$$a) \quad f(x) = \frac{x^3}{4-x^2} \qquad\qquad b) \quad f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

a)

1. Funktion
$$f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$$
2. Definitionsbereich
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$
3. Stetigkeit
   stetig auf D_f, da Komposition elementarer stetiger Funktionen
4. Differenzierbarkeit
   beliebig oft diffbar auf D_f, da Komposition elementarer diffbarer Funktionen
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(4-x^2)+2x^4}{(4-x^2)^2} \\ &= \frac{12x^2-x^4}{(4-x^2)^2} \\ f''(x) &= \frac{8x(12+x^2)}{(4-x^2)^3} \\ f'''(x) &= \frac{384+576x^2+24x^4}{(4-x^2)^4} \end{aligned}$$
5. Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$
   $\Rightarrow$ einzige Nullstelle $x = 0$ $\quad\Rightarrow$ einziger Schnittpunkt mit den Achsen $(0, 0)$.
6. Verhalten im unendlichen und an den Rändern
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\frac{4}{x^2}-1} = \pm\infty$$
   ausserdem ist offensichtlich
$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty \qquad && \lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty \\ &\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty \qquad && \lim_{x\to -2^-} f(x) = \infty \end{aligned}$$
7. Symmetrie
   Es liegt Punktsymmetrie im Nullpunkt vor, d.h.
$$f(x) = -f(-x)$$
8. Extremwerte
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(12-x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad x = \sqrt{12} \quad \text{oder} \quad x = -\sqrt{12}$$
   Wir haben $f''(0) = 0$ aber $f'''(0) > 0$. Somit liegt in $x = 0$ ein Wendepunkt und kein lokales Extremum vor. Ausserdem haben wir
$$f''(\sqrt{12}) < 0 \quad \text{und} \quad f''(-\sqrt{12}) > 0.$$

Somit ist

$$\left(\sqrt{12}\,;-\frac{12^{3/2}}{8}\right) \text{ ein lok. Maximum und } \left(-\sqrt{12}\,;\frac{12^{3/2}}{8}\right) \text{ ein lok. Minimum}$$

Dies sind keine globalen Extrema (siehe 6.)

9. Monotonie

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(12-x^2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12-x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \leq \sqrt{12}$$

Also ist die Funktion im Bereich $[-\sqrt{12}, \sqrt{12}] \cap D_f$ monoton steigend und sonst monoton fallend

10. Wendepunkte

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

$(0,0)$ ist damit der einzige Wendepunkt

11. Krümmungsverhalten

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{(4-x^2)^3} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x < 2 \text{ oder } x < -2$$

Also ist f auf $(-\infty, -2) \cup [0,2)$ konvex und ansonsten konkav.

12. Wertevorrat
    f bildet auf die ganze reelle Achse ab.

b)

1. Funktion

$$f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

2. Definitionsbereich

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

3. Stetigkeit
   stetig auf D_f, da Komposition elementarer stetiger Funktionen
4. Differenzierbarkeit
   beliebig oft diffbar auf D_f, da Komposition elementarer diffbarer Funktionen

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{1}{x}}\left(2x - x^2\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}(2x-1) \\ f''(x) &= e^{\frac{1}{x}}\left(2 - \frac{2x-1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \\ f'''(x) &= -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4} \end{aligned}$$

5. Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
   keine
6. Verhalten im Unendlichen und an den Rändern

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \infty \quad \text{wegen} \quad \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$$

7. Symmetrie
   Es liegt keinerlei Symmetrie vor

8. Extremwerte
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$
Wir haben $f''(1/2) = 2e^2 > 0$. Also ist $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{e^2}{4}\right)$ ein lokales Minimum. Es gibt keine weiteren.

9. Monotonie
$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{1}{2}$$
Also f monoton wachsend auf $[1/2, \infty)$ und monoton fallend auf $(-\infty, 1/2) \cap D_f$.

10. Wendepunkte und Krümmungsverhalten
$$f''(x) = \frac{2}{x^2} e^{\frac{1}{x}} (x^2 - x + \frac{1}{2}) = \frac{2}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right] > 0$$
Es gibt also keine Wendepunkte und f ist auf ganz D_f konvex.

11. Wertevorrat
Der Wertebereich von f ist das offene Intervall $(0, \infty)$.

5. Ukažte, že funkce $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$ je na $\mathbb{R}$ nekonečněkrát diferencovatelná. Rozviňte tuto funkci v Taylorovu řadu u 0 a vyšetřete její konvergenci.

Zu zeigen ist, daß alle Ableitungen von $g(x) := e^{-\frac{1}{x^2}}$ für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gegen 0 konvergieren für $x \to 0$. Man sieht leicht, daß
$$g^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot P_n\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{, wobei } P_n \text{ ein Polynom ist.}$$
Nun erhält man mit der Substitution $y = \frac{1}{x}$:
$$\lim_{x \to 0} g^{(n)}(x) = \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot P_n\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \to \pm\infty} e^{-y^2} \cdot P_n(y) = 0,$$
da die Exponentialfunktion schneller gegen Null geht als jedes Polynom (l'Hospital).
Also ist $f(x)$ beliebig oft differenzierbar.
<u>Taylorpolynom in x_0:</u>
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$
In $x_0 = 0$ gilt $f^{(k)}(x_0) = 0$, also ist das n-te Taylorpolynom gegeben durch
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{0}{k!} x^k + R_n(x) = R_n(x) \quad \text{und somit gilt} \quad \lim_{n \to \infty} R_n(x) = f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
Also ist $f(x)$ nicht in eine Taylorreihe um $x_0 = 0$ entwickelbar da das Restglied außer in Null nicht gegen Null strebt.

6. Vypočtěte koeficient u x^7 v Taylorově rozvoji funkce $f(x) = \tan x$ u 0.
Es gilt
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{und somit} \quad \cos x \cdot \tan x = \sin x.$$
Wir kennen schon die Taylorreihen von Sinus und Kosinus im Punkt $x_0 = 0$:
$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

und mit dem Ansatz $\tan x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ erhalten wir:

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots\right) \cdot (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + \ldots)$$
$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots\right).$$

Nun Multiplizieren wir aus und ein Koeffizientenvergleich bei $x^0 = 1$ bis x^7 gibt uns:

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = \frac{1}{3} \quad a_4 = 0 \quad a_5 = \frac{2}{15} \quad a_6 = 0 \quad a_7 = \frac{17}{315}$$

also ergibt sich

$$T_7(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7.$$