Matematická analýza pro fyziky I

ZS 2016/17, MFF UK

9. Cvičení

---

1. Určete horní a dolní součty funkce $f(x) = x^2$ pro rovnoměrné rozdělení intervalu $[0, a]$. Spočtěte takto integrál $\int\limits_0^a x^2\, dx$.

   Da die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[0, a]$ für alle $a \in \mathbb{R}_+$ stetig und streng monoton wachsend ist, können mit Blick auf die Unter- und Obersummen sowie für die dazu gehörige (Äquidistante) Zerlegung folgende Festsetzungen getroffen werden:

   Zerlegung der Intervalls $[0, a]$:

   $$Z = \{I_1, \cdots, I_n\} \text{ mit } I_k = \left[\frac{(k-1)\cdot a}{n}, \frac{k\cdot a}{n}\right] \;;\; \Delta x = \frac{a}{n} \;;\; m_k = f\left(\frac{(k-1)a}{n}\right) \;;\; M_k = f\left(\frac{ka}{n}\right)$$

   Berechnung der Ober- bzw. Untersumme von f bzgl. Z auf $[0, a]$:

   $$\Longrightarrow \quad \underline{S}(f, Z) = \sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot m_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{(k-1)a}{n}\right)^2 = \frac{a^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = \frac{a^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{a^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a^3}{3}$$

   $$\Longrightarrow \overline{S}(f, Z) = \sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot M_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{ka}{n}\right)^2 = \frac{a^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{a^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a^3}{3}$$

   $$\Longrightarrow \int\limits_0^a x^2\, dx = \frac{a^3}{3}$$

2. Spočtěte : a) $\int\limits_0^{\ln 2} x\, e^{-x} dx$ b) $\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$ c) $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx$ d) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)} dx$

   <u>*Návod*</u> *: V* **d)** *použijte substituci* $t = x + \frac{1}{x}$.

   <u>zu a)</u> $$\int\limits_0^{\ln 2} x\, e^{-x} dx = \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -xe^{-x} \Big|_0^{\ln 2} - \int\limits_0^{\ln 2} -e^{-x} dx = -xe^{-x} \Big|_0^{\ln 2} + \int\limits_0^{\ln 2} e^{-x} dx$$

   $$= -xe^{-x} \Big|_0^{\ln 2} + \left(-e^{-x} \Big|_0^{\ln 2}\right) = -\ln 2 e^{-\ln 2} - e^{-\ln 2} + e^0 = -\ln 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$$

   <u>zu b)</u> $$\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{bmatrix} = x^2 \sin x \Big|_0^{2\pi} - 2 \int\limits_0^{2\pi} x \sin x dx = \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{x^2 \sin x \Big|_0^{2\pi}}_{=0} -2 \left(-x \cos x \Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} -\cos x dx \right) = 2x \cos x \Big|_0^{2\pi} - \underbrace{2 \sin x \Big|_0^{2\pi}}_{=0} = 4\pi$$

zu c) $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx = -\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x dx + \int\limits_{1}^{e} \ln x dx \qquad \left(\text{NR: } \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\left(\ln x - 1\right)\right)$

$$\Longrightarrow \int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx = -x\left(\ln x - 1\right) \Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + x\left(\ln x - 1\right) \Big|_1^e = 2 - \frac{2}{e}$$

zu d)

$$I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx = \underbrace{\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_{1}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx}_{I_2}$$

$I_1 = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx$. Mit der Substitution $t = x + 1/x$ ergibt sich $x^2 - tx + 1 = 0$. Also $x_{1/2} = \frac{1}{2}\left(t \pm \sqrt{t^2 - 4}\right)$. Das Integral wurde gerade so zerlegt, dass bei I_1 die kleinere Lösung von Interesse ist, d.h.:

$$x = \frac{1}{2}\left(t - \sqrt{t^2 - 4}\right), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}\right)$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_{\frac{5}{2}}^{2} e^t \left(1 + \frac{1}{2}\left(t - \sqrt{t^2 - 4}\right) - \frac{2}{t - \sqrt{t^2 - 4}}\right) \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}\right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{5}{2}}^{2} e^t \left(1 - \sqrt{t^2 - 4}\right)\left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}\right) dt \end{aligned}$$

Für I_2 gilt mit obiger Substitution:

$$x = \frac{1}{2}\left(t + \sqrt{t^2 - 4}\right), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}\right)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_{2}^{\frac{5}{2}} e^t \left(1 + \frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2 - 4}) - \frac{2}{t + \sqrt{t^2 - 4}}\right) \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}\right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int\limits_{2}^{\frac{5}{2}} e^t \left(1 + \sqrt{t^2 - 4}\right)\left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}\right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I = I_1 + I_2 &= \frac{1}{2}\int\limits_2^{\frac{5}{2}} e^t\left(-1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}+\sqrt{t^2-4}-t+1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}+\sqrt{t^2-4}+t\right)dt \\
&= \int\limits_2^{\frac{5}{2}} e^t\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}+\sqrt{t^2-4}\right)dt \\
&= \int\limits_2^{\frac{5}{2}} \left(e^t\sqrt{t^2-4}\right)' dt \\
&= \left[e^t\sqrt{t^2-4}\right]_2^{\frac{5}{2}} = e^{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{25}{4}-4} = \frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}
\end{aligned}$$

3. Pomocí Riemannova integrálu spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

$$\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

Die Summe kann als Untersumme der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ bezüglich des Intervalls $[1,2]$ interpretiert werden. Dabei wird $[1,2]$ in n äquidistante Teilintervalle $I_i := \left[1+\frac{i-1}{n}, 1+\frac{i}{n}\right]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, der Länge $\frac{1}{n}$ zerlegt.
Da f im betrachteten Bereich monoton fallend ist, gilt: $\inf\limits_{x\in I_i} f(x) = f(x_i) = \frac{1}{1+\frac{i}{n}}$.
Damit wird obige Summe tatsächlich zur Untersumme. Im Grenzwert $n\to\infty$ strebt das Feinheitsmaß der Zerlegung gegen 0, die Untersumme strebt dabei gegen das Unterintegral der Funktion. Da f stetig, damit Riemann-integrierbar ist, folgt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$$

4. Spočtěte

$$a)\ \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} \qquad b)\ \int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x}\ dx$$

$$c)\ \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x} \qquad d)\ \int\limits_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln\frac{1+x}{1-x}\ dx$$

zu a)

Die Funktion $(2\sin x - \cos x + 5)^{-1}$ ist 2π-periodisch. Zum Berechnen des Integrals genügt es über eine Periode zu integrieren.

$$\int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$$

Zunächst werde eine Stammfunktion mittels bekannter Substitution $\tan\frac{x}{2} = t$ gesucht.

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \int \frac{1}{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} \cdot \frac{2\ dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{3t^2+2t+2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}}$$
$$= \frac{3}{5}\int \frac{dt}{\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \arctan\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \arctan\left(\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}\right) + C =: F(x)$$

Das obige Integral kann nicht einfach als $2[F(\pi) - F(-\pi)]$ berechnet werden, da F an diesen Stellen nicht definiert ist. Es kann jedoch als Grenzwert verstanden werden.

$$\int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \lim_{\epsilon\to 0+} 2[F(\pi-\epsilon) - F(-\pi+\epsilon)] = 2\left(\frac{\pi}{2\sqrt{5}} - \frac{-\pi}{2\sqrt{5}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$$

Ein Begründung dieses Grenzübergangs liefert folgende Abschätzung:

$$\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} - \int\limits_{-\pi+\epsilon}^{\pi-\epsilon} \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}\right| \le \int\limits_{\pi-\epsilon}^{\pi} \left|\frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}\right| dx + \int\limits_{-\pi}^{-\pi+\epsilon} \left|\frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}\right| dx$$
$$\le \int\limits_{\pi-\epsilon}^{\pi} \frac{dx}{2} + \int\limits_{-\pi}^{-\pi+\epsilon} \frac{dx}{2} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

zu b)

$1 + \cos 2x = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x}\ dx = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{2}\,|\cos x|\ dx = \sqrt{2}\left(\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\ dx - \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos x\ dx\right) = \sqrt{2}\left(\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right) = 2\sqrt{2}$$

zu c)

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x} \overset{(\tan\frac{x}{2}=t)}{=} \int\limits_0^1 \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2\ dt}{1+t^2} = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

zu d)

$\cos x$ ist gerade. ($\cos x = \cos[-x]$)

Dagegen gilt: $h(x) := \ln\frac{1+x}{1-x} = -\ln\frac{1-x}{1+x} = -h(-x)$

$\Rightarrow \quad h(x)$ ist ungerade.

Das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ist wieder eine ungerade Funktion. Das Integral einer ungeraden Funktion über ein Intervall symmetrisch zur 0 verschwindet, folglich:

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln\frac{1+x}{1-x}\ dx = 0$$

5. Riemannova funkce

   Buď $R(x) = 0$ pokud x je iracionální, a $f(x) = \frac{1}{q}$ pokud $x = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ a p, q nesoudělné.) Ukažte, že R je na $[0,1]$ riemannovsky integrovatelná.

Finden Sie eine Folge von Zerlegungen Z_n, so dass die entsprechenden Obersummen gegen Null konvergieren. Die Untersummen sind alle Null. Dadurch ist $\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x = 0$. Eine mögliche Wahl ist z.B.

$$Z_n = \{0, \frac{1}{n!}, \frac{2}{n!}, \ldots, 1\}.$$

Die entsprechende Obersummen sind dann kleiner als

$$\frac{3}{n!}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot k + \frac{n!}{n!} \cdot \frac{1}{n} \to 0.$$

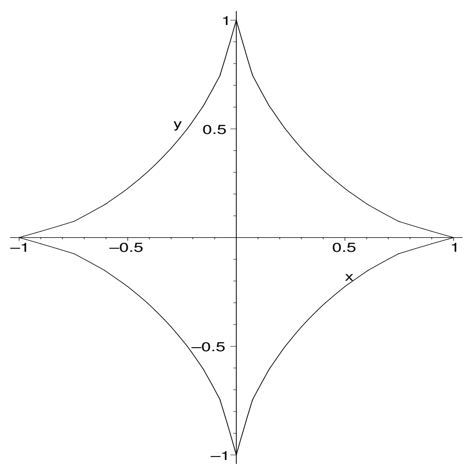
6. Spočtěte plochu množiny ohraničené křivkou

$$\mathcal{K} := \Big\{(x,y): \quad x^{2/3} + y^{2/3} = 1\Big\}.$$

Udělejte si nejprve obrázek. Tato křivka se nazývá asteroida.
Návod: Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ platí

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{\sin x\, \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx\,.$$

Skizze:



Die Fläche ist symmetrisch, Subst. $x^{1/3} = \sin t$:

$$F = 4 \cdot \int_0^1 (1 - x^{2/3})^{3/2} \mathrm{d}x = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^3 3 \sin^2 t \cos t \mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
\int (\cos t)^3 \sin^2 t \cos t \mathrm{d}t &= \int (\cos^4 t - \cos^6 t)\mathrm{d}t = \\
&= \int \cos^4 t \mathrm{d}t - \frac{\sin t \cos^5 t}{6} - \frac{5}{6} \int \cos^4 t \mathrm{d}t = \\
&= -\frac{\sin t \cos^5 t}{6} + \frac{1}{6}\left\{\frac{\sin t \cos^3 t}{4} + \frac{3}{4}\int \cos^2 t \mathrm{d}t\right\} = \\
&= -\frac{\sin t \cos^5 t}{6} + \frac{\sin t \cos^3 t}{24} + \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{2}\cos t \sin t + \frac{t}{2}\right\}
\end{aligned}$$

$$F = 4F_1 = 4 \cdot 3 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin^2 t \mathrm{d}t = 12 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

7. Vyšetřete konvergenci nebo divergenci následujících nevlastních integrálů:

$$a)\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+x}}, \qquad b)\int_0^\infty x^n e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x, \qquad c)\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t, \qquad d)\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t}\mathrm{d}t.$$

Zu a)

Die Funktion ist stetig, also Riemann-integrierbar auf jedem Interval $[1,N]$. Auf $[1,\infty)$ gilt

$$0 \le \frac{1}{\sqrt{x^3+x}} \le \frac{1}{x^{3/2}}$$

und Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}}$ konvergiert. Also konvergiert auch Integral in a).

Zu b)

$n \in \mathbb{N}$ ist ein Parameter. Bei Null ist die Funktion stetig und beschränkt, Konvergenz von

$$\int_0^\infty x^n e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

ist also äquivalent zu Konvergenz von

$$\int_1^\infty x^n e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

Finden Sie eine Konstante c_n, so daß auf $[1,\infty]$ folgende Abschätzung gilt:

$$x^n e^{-\sqrt{x}} \le c_n x^{-2}.$$

Das Integral in b) konvergiert also für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zu c)

Wir zeigen, daß die Funktion $F : t \to \displaystyle\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$ das Cauchy-Prinzip erfüllt, wenn $s \to \infty$ strebt. Wir müssen also

$$|F(u) - F(v)| = \left|\int_u^v \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right|$$

von oben abschätzen für $v > u$ gross. Durch partielle Integration ergibr sich aber

$$\int_u^v \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_u^v - \int_u^v \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x,$$

also gilt

$$\left|\int_u^v \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \int_u^v \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \left[-\frac{1}{x}\right]_u^v = \frac{2}{u}.$$

Das Integral ist konvergent.

Zu d)

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t}\mathrm{d}t \ge \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin^2 t\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\pi \sin^2 t\mathrm{d}t \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k+1} = \infty.$$

Das Integral ist also divergent.

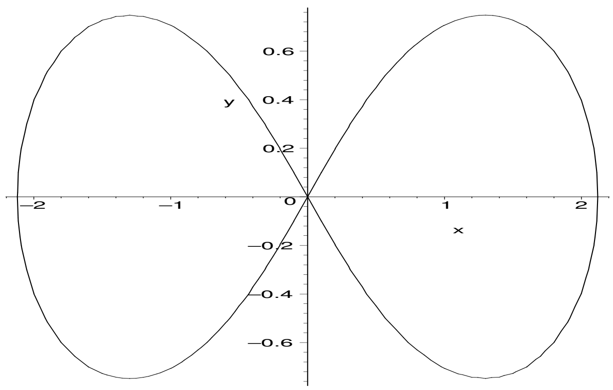
8. (i) Spočtěte plochu *elipsy*

$$\mathcal{K} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}, \quad a,b > 0.$$

(ii) Spočtěte plochu ohraničenou *Bernoulliho lemniskátou*:

$$\mathcal{K} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2) \right\}, \quad a > 0.$$

Návod:



Odvoďte parametrické vyjádření v polárních souřadnicích.

$$r = a\sqrt{2\cos(2\varphi)}, \quad r \in (0, \sqrt{2}a).$$

Integrujte pak od nuly do $\sqrt{2}a$ délku paprsku, který je omezen lemniskátou, tedy $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}a} r\varphi(r)\mathrm{d}r.$

Zu (i):

Die Fläche ist symmetrisch:

$$F = 4F_1$$

wobei F_1 die Fläche von

$$(\{\,(x,y) : x,y > 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\,\})$$

ist.

Also ist (Subst. $s = x/a$)

$$F = 4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}x = 4ab\int_0^1 \sqrt{1-s^2}\mathrm{d}s = 4ab\frac{\pi}{4} = \pi ab.$$

Zu (ii):

Die Fläche ist wieder symmetrisch, wir betrachten also nur den Teil, wo $x,y > 0$. Die Polarkoordinaten werden durch

$$\tan\varphi = \frac{x}{y}, \qquad x^2+y^2 = r^2$$

definiert. Also

$$x^2 = \frac{r^2}{1+\tan^2\varphi}, \quad y^2 = \frac{\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}r^2.$$

Die parametrische Darstellung lautet also

$$r^4 = 2a^2r^2\frac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi} = 2a^2r^2\cos(2\varphi), \qquad \frac{r^2}{2a^2} = \cos 2\varphi.$$

Nach dem Hinweis integrieren wir also (Subst. $s = \dfrac{r^2}{2a^2}$)

$$\int_0^{\sqrt{2}a} r\varphi(r)\mathrm{d}r = \int_0^{\sqrt{2}a} r\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{2a^2}\mathrm{d}r = \frac{a^2}{2}\int_0^1 \arccos(s)\mathrm{d}s = \frac{a^2}{2}.$$

Die gesamte Fläche ergibt sich dann als $4 \cdot \dfrac{a^2}{2} = 2a^2$.

9. Ukažte, že

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^t e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x}{\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{t}} = 1.$$

Es gilt

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{2t} = \infty.$$

Wir können also die Regel von L'Hospital anwenden. Dabei gilt

$$\left(\int_0^t e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\right)' = e^{\frac{t^2}{2}}, \qquad \left(\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{t}\right)' = \frac{t^2e^{\frac{t^2}{2}} - e^{\frac{t^2}{2}}}{t^2}.$$

Also gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^t e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x}{\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{t^2-1} = 1.$$

10. Buď $f : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ dána.
(i) Plyne z $\int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$ vždy $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$?
(ii) Plyne z $\int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$ vždy existence limity $\lim_{x\to\infty} f(x)$?
(iii) Buď f navíc stejnoměrně spojitá. Plyne pak z $\int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$ vždy $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$?

Zu (i) und (ii):

Nein. Man betrachtet z.B. die Funktion (*Machen Sie sich eine Skizze!*)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(2^k \cdot x)\chi_{[\pi 2^k, \pi 2^k + \frac{\pi}{2^k}]}(x).$$

Zu (iii): Ja.

Sei f gleichmäßig stetig mit $\int_0^\infty f(x)dx < \infty$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine monotone Folge $x_n \to \infty$, so daß$f(x_n) > \epsilon, n = 1, 2, \ldots$. Man kann voraussetzen, daß $|x_{n+1} - x_n| = x_{n+1} - x_n > 1$ für alle $n = 1, 2, \ldots$.
Aus der gleichmäßige Stetigkeit folgt die Existenz von einem $1 > \delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{für} \quad |x - y| < \delta.$$

Auf jedem Interval $(x_n - \delta, x_n + \delta)$ ist also f größer als $\frac{\epsilon}{2}$. Insgesamt gilt

$$\int_0^\infty f(x)dx \geq \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} f(x)dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} 2\delta\frac{\epsilon}{2} = \infty,$$

also ein Widerspruch.

11. Vyšetřete konvergenci nebo divergenci následujících nevlastních integrálů

$$a) \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx \qquad b) \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx \qquad c) \int_0^\infty \frac{\sin(1/x)\arctan x}{x} dx \qquad d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}.$$

Zu a)

Die Funktion ist stetig auf $(0,1)$ und beschränkt auf jedem $(\epsilon, 1-\epsilon), 0 < \epsilon < 1/2$. Wir untersuchen also nur Konvergenz von

$$\int_0^\epsilon \ldots \qquad \text{und} \qquad \int_{1-\epsilon}^1 \ldots .$$

Wir sagen, daß $f(x) \approx g(x)$ bei x_0 ist, falls

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existiert und ungleich Null und ungleich $\pm\infty$ ist. In dem Sinne ist

$$\frac{\ln x}{1-x^2} \approx \ln x, \qquad x \to 0^+.$$

Aus der Konvergenz des Integrals $\int_0^\epsilon \ln x \; dx$ (siehe Aufg. 5b) folgt dann auch die Konvergenz von $\int_0^\epsilon \frac{\ln x}{1-x^2} \; dx$. Ebenso gilt

$$\frac{\ln x}{1-x^2} \approx \frac{\ln x}{1-x} \approx -1, \qquad x \to 1^-.$$

Das Integral $\int_{1-\epsilon}^1 \frac{\ln x}{1-x^2} \; dx$ ist also auch konvergent. Insgesamt ist $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ konvergent.

Zu b)

Bei Null gilt wieder

$$\frac{\ln x}{1+x^2} \approx \ln x, \qquad x \to 0^+$$

und das Integral $\int_0^\epsilon \frac{\ln x}{1+x^2} \; dx$ ist konvergent. Die Konvergenz von $\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} \; dx$ folgt aus der Abschätzung

$$\frac{\ln x}{1+x^2} \leq c \frac{1}{x^{3/2}}, \qquad x > 1$$

und Konvergenz von $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} \; dx$.

Zu c)

Wir diskutieren wieder Konvergenz bei Null und bei ∞. Für $0 < x < \epsilon$ gilt

$$\left| \frac{\sin(1/x)\arctan x}{x} \right| \leq \frac{\arctan x}{x} \approx 1, \qquad x \to 0^+.$$

Weiter gilt

$$\frac{\sin(1/x)\arctan x}{x} \approx \frac{\sin(1/x)}{x} \approx \frac{1}{x^2}, \qquad x \to \infty.$$

Das Integral ist also konvergent.

Zu d)

Die einzige Singularität liegt bei Null vor. Es gilt

$$\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} \approx \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \qquad x \to 0^+$$

und das Integral $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \; dx$ ist konvergent. Folglich ist auch $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} \; dx$ konvergent.

12. Spočtěte

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \qquad b) \int_0^1 \ln x \; dx \qquad c) \int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} \; dx \qquad d) \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} \; dx.$$

Zu a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \arctan t - \lim_{t\to-\infty} \arctan t = \pi.$$

Zu b)

Die Stammfunktion zu $\ln x$ auf $(0,1)$ ist $F(x) = x \ln x - x$.

$$\int_0^1 \ln x \; dx = \lim_{x\to 1} F(x) - \lim_{x\to 0} F(x) = -1.$$

Zu c)

Die Stammfunktion ist (partielle Integration!)

$$F(x) = -\frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\frac{x^2 \ln x}{1+x^2}$$

und

$$\int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} \; dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to 0^+} F(x) = 0.$$

Zu d)

Nach der Subst. $t = \arctan x$ ergibt sich

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} \; dx = \int_0^{\pi/2} \frac{t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} \; dt = \int_0^{\pi/2} t \cos t \; dt = \frac{\pi}{2} - 1.$$

13. Buď f spojitá na $[0,\infty)$, a nechť existuje $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$. Dokažte, že pak $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt = A$.

Es gilt:

$$\left| \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt - A \right| = \left| \frac{1}{x}\int\limits_0^{x_0} (f(t)-A)\,dt - \frac{1}{x}\int\limits_{x_0}^{x} (f(t)-A)\,dt \right| = \frac{1}{x}\int\limits_0^{x_0} \underbrace{|f(t)-A|}_{\le C} dt + \frac{1}{x}\int\limits_{x_0}^{x} |f(t)-A|$$

Wählt man x_0 so, dass $|f(x)-A| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $x > x_0$, dann gilt:

$$\frac{1}{x}\int\limits_0^{x_0} \underbrace{|f(t)-A|}_{\le C} dt + \frac{1}{x}\int\limits_{x_0}^{x} |f(t)-A| \le \underbrace{\frac{Cx_0}{x}}_{\le\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\frac{x-x_0}{x}}_{\le 1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon \text{ für hinreichend großes } x > x_0.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.