

Funkcionální analýza 2 - ZS 2006/07

1. BANACHOVY ALGEBRY

1.A. Banachovy algebry

- pojem Banachovy algebry, příklady ($C(K)$), lineární operátory na Banachově prostoru, disková algebra, $L^1(\mathbf{R})$ s konvolucí, $l^1(\mathbf{Z})$
- otázka existence jednotky
- spojitost násobení
- vlastnosti množiny regulárních prvků (topologická grupa, otevřenost, vyjádření inverzního prvku a jeho norma)
- spektrum, rezolventa a spektrální poloměr
- rezolventní funkce
- kompaktnost a neprázdnost spektra
- Gelfand-Mazurova věta
- Beurlingův vzoreček

1.B. Gelfandova reprezentace

- charaktery jako multiplikativní funkcionály, prostor charakterů a Gelfandova topologie na něm
- Gelfandova transformace a její základní vlastnosti
- příklady ($C(K)$), $l^1(\mathbf{Z})$
- kdy je Gelfandova reprezentace prostým zobrazením (radikál algebry), kdy izometrií a kdy je na (Gelfand-Naimarkova věta)

2. ZÁKLADY NELINEÁRNÍ FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY

2.A. Geometrie Banachových prostorů

- striktně konvexní a uniformně konvexní prostory
- přenormování separabilního prostoru
- promítání v uniformně konvexních prostorech
- slabé a normové uzávěry konvexních množin
- slabá polospojitosť normy
- promítání v reflexivních striktně konvexních prostorech

2.B. Věty o pevných bodech

- pojem FPP a rektu
- Brouwerova věta pro jednotkovou kouli a její zobecnění
- Schauderův příklad
- Schauderova věta a některá její zobecnění (důkaz pomocí renormace a Brouwerovy věty)
- použití Schauderovy věty (existenční věty pro diferenciální a integrální rovnice)

2.C. Topologický stupeň

- základní požadavky na topologický stupeň
- Sardova věta jako spec.případ obecnějšího tvrzení
- zavedení topologického stupně v prostorech konečné dimenze
- důkaz Brouwerovy věty

3. Doplnky dle výběru

3.A. Základy harmonické analýzy

- topologická grupa, příklady
- Haarova míra na kompaktních či lokálně kompaktních prostorech (existence a jednoznačnost)
- konvoluce funkcí, grupová algebra $\mathcal{L}^1(G)$
- charaktery grupy, duální grupa, Pontrjaginova věta
- popis charakterů na \mathbf{R} , \mathbf{Z} , \mathbf{T}
- Gelfandův prostor $\mathcal{L}^1(G)$
- Gelfandova transformace funkcí z $\mathcal{L}^1(G)$ a vztah k Fourierově transformaci a Fourierovým řadám

3.C. Neomezené operátory

- operátory s hustým definičním oborem a uzavřeným grafem
- adjungovaný operátor, jeho vlastnosti
- symetrické a samoadjungované operátory
- pojem inverze a spektra, vlastnosti
- Möbiova a Caleyova transformace
- spektrální teorie neomezených samoadjungovaných operátorů

3.D. Teorie semigrup

- semigrupy operátorů, slabě a silně spojité semigrupy, kontrakční semigrupy
- infinitezimální generátor semigrupy, příklady
- rezolventy, Laplaceova transformace a vztah k semigrupám
- Hille-Yosidova charakteristika

Vědomosti z Úvodu do funkcionální analýzy

- vlastnosti základních příkladů Banachových a Hilbertových prostorů, topologické doplňky, promítání v Banachových a Hilbertových prostorech, ortonormální báze, prostor lineárních zobrazení, Fréchet-Rieszova věta o reprezentaci lineárních funkcionalů na Hilbertových prostorech, popisy různých duálů, Hahn-Banachova věta včetně důsledků, kanonické vnoření a reflexivní prostory, kompaktní operátory, adjungovaná zobrazení, slabé konvergence, princip stejnoměrné omezenosti, Banach-Steinhausova věta, Banachova věta o otevřeném zobrazení, uzavřená zobrazení, kompaktnost a slabá kompaktnost jednotkové koule v Banachových prostorech, spektrum kompaktního operátoru

Literatura

- P. Habala, P. Hájek and V. Zizler, *Introduction to Banach spaces I,II*, Matfyzpres Praha, 1996.
J. Lukeš, *Zápisky z funkcionální analýzy*, skripta, Karolinum Praha, Univerzita Karlova, 1998, 2002, 2003.
J. Lukeš a J. Malý, *Míra a integrál*, skripta, Univerzita Karlova, 1993 (anglické vydání 1995, 2005).
W. Rudin, *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia Praha, 1977 (přepřacované 2003).
W. Rudin, *Functional analysis*, Mc Graw Hill, 1973 (ruský překlad 1975).

Praha, 1.2.2006

Jaroslav Lukeš