

Funkcionální analýza 3 - LS 2006/07

1. Topologické lineární prostory

1.A. Topologické lineární prostory

- definice, příklady, základní vlastnosti
- vlastnosti filtru okolí nuly, von Neumannovy axiomy, regularita

1.B. Lokálně konvexní prostory

- definice, filtr okolí nuly, barely
- barelované prostory, vztah k Banach-Steinhausově větě, Baireovy LCS, Fréchetovy prostory
- Minkowského funkcionál, základní vlastnosti, jeho spojitost
- omezené množiny podle Banacha i von Neumanna, Kolmogorovo kriterium normovatelnosti, metrizovatelnost LCS
- vytváření LCS pomocí systému pseudonorem, filtr okolí nuly, příklady, charakteristika konvergence

1.C. Slabé topologie a dualita

- slabé topologie, duál ve slabé topologii, báze okolí nuly
- Hahn-Banachova věta pro LCS
- topologie souhlasející s dualitou, Mackeyova topologie, Mackey-Arenssova věta
- oddělování konvexních množin, malá Mazurova věta
- uzávěr konvexní množiny v topologiích souhlasejících s dualitou
- (absolutní) polára a její vlastnosti, věta o bipoláře
- silná topologie, reflexivita a semireflexivita LCS
- Alaoglu-Bourbakiho věta, Goldstinovo lemma
- charakteristiky reflexivních Banachových prostorů (Pettis, Banach-Bourbaki, James)
- Eberlein-Šmulianova charakteristika kompaktních množin ve slabých topologiích Banachových prostorů

1.D. Kompaktní konvexní množiny

- extrémální body, příklady
- Bauerův princip minima
- Krejn-Milmanova věta a neprázdnost množiny extrémálních bodů
- extrémální body omezených, uzavřených, konvexních množin v Banachových prostorech, Lindenstraussův výsledek, souvislost s prostory majícími Radon-Nikodýmovu vlastnost
- extrémální body a uzavřenost jednotkové sféry prostoru Radonových měr, aproximace molekulárními měrami
- kanonické vnoření topologického prostoru, Stone-Čechova kompaktifikace, De Brangesův důkaz Stone-Weierstrassovy věty

1.E. Integrovní reprezentace

- pojem těžiště a reprezentující míry, ilustrace v eukleidovských prostorech (Caratheodoryova věta)
- formulace úlohy o integrovní reprezentaci, existence a jednoznačnost reprezentující míry soustředěné na uzávěru či množině extrémálních bodů (reformulace Krejn-Milmanovy věty), Rieszova věta o reprezentaci jako věta tohoto typu
- množina extrémálních bodů, její měřitelnost, Bauerova charakteristika
- Choquetova věta o integrovní reprezentaci (existence maximálních reprezentujících měr), pojem nekonečně-dimenzionálního simplexu
- Laplaceova transformace měr a funkcí, úplně monotonní funkce, Bernsteinova věta
- řešení Dirichletovy úlohy, harmonické míry, Perronovo zobecněné řešení, regulární body, souvislost s předchozí teorií

2. Diferenciální a integrovní počet v Banachových prostorech

2.A. Diferenciální počet v Banachových prostorech

- Gateauxova a Fréchetova derivace, zobrazení třídy C^1

2.B. Základy variačního počtu

- formulace klasických úloh, metody řešení
- Du Bois-Reymondovo lemma a Euler-Lagrangeovy rovnice
- existenční věta pro konvexní zdola polospojité funkcionály v reflexivních Banachových prostorech

2.C. Vektorové integrace

- Riemann-Gravesův integrál
- silná a slabá měřitelnost, vztah mezi nimi
- absolutní a bezpodmínečná konvergence v Banachových prostorech
- definice Bochnerova integrálu a jeho základní vlastnosti
- Dunfordovo lemma, Dunfordův a Pettisův integrál
- vztah Bochnerova a Pettisova integrálu
- klasická Radon-Nikodýmova věta, derivování vektorových funkcí omezené variace, prostory s RNP a KMP

Počtení technika:

- extrémální body konvexních množin
- slabé a silné derivace funkcionalů
- extrémý funkcionalů, použití Euler-Lagrangeových rovnic

Literatura

- P. Habala, P. Hájek and V. Zizler, *Introduction to Banach spaces I,II*, Matfyzpres Praha, 1996.
J. Lukeš, *Zápisky z funkcionální analýzy*, skripta, Karolinum Praha, Univerzita Karlova, 1998, 2002, 2003.
J. Lukeš a J. Malý, *Míra a integrál*, skripta, Univerzita Karlova, 1993 (anglické vydání 1995, 2005).
W. Rudin, *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia Praha, 1977 (přepřacované 2003).
W. Rudin, *Functional analysis*, Mc Graw Hill, 1973 (ruský překlad 1975).

Praha, 1.2.2006

Jaroslav Lukeš