TEORIE MÍRY A INTEGRÁLU I.

RNDr. Jaroslav Lukeš, CSc.

Praha 1980

Katedra matematické analýzy
a jejích aplikací

Vedoucí: Doc. RNDr. Břetislav Novák, CSc.

„ ... dospělý člověk ... musí znát míru ..."

M. Majorová, O slušném chování fakta,
SPN, Praha, str. 124

P ř e d m l u v a

První díl "Teorie míry a integrálu" vznikl převážně přepsáním mých poznámek k přednášce z Matematické analýzy pro posluchače MFF KU. Chci proto upozornit, že předložená skripta nemají v žádném případě ráz učebnice, jsou pouze učební pomůckou pro studenty. Původní rozsah přednášky jsem pro účely tohoto textu poněkud rozšířil; rovněž tak jsem přidal řadu problémů a netriviálních cvičení, na nichž má čtenář možnost si prověřit, zda látce porozuměl. Některé z nich mohou být použity též v Matematickém praktiku či zadávány jako ročníkové práce.

Děkuji na tomto místě RNDr Ivanu Netukovi, který celý text pečlivě přečetl a svými poznámkami i připomínkami přispěl na mnoha jeho místech k lepší srozumitelnosti. Rovněž tak děkuji posluchači MFF Janu Pachlovi za pomoc při definitivní úpravě skript.

Praha, leden 1971 Jaroslav Lukeš

Přehled kapitol

Ú v o d

V tomto krátkém a ne zcela přesném úvodu naznačíme, co chápeme pod pojmem míra či integrál, s jakými otázkami se setkáme a jaké problémy asi budeme řešit.

Integrál. Chceme-li definovat integrál, kupř. na intervalu (a,b), musíme především určit třídu funkcí Θ (definovaných na (a,b)), které mají tento integrál mít a dále musíme zadat zobrazení I (integrál) množiny funkcí Θ do E_1; přitom požadujeme, aby jak systém Θ tak integrál I měly jisté "rozumné" vlastnosti. Uveďme alespoň některé:

(L) $f, g \in \Theta,\ \alpha, \beta \in E_1 \Longrightarrow \alpha f + \beta g \in \Theta$ a
$I(\alpha f + \beta g) = \alpha If + \beta Ig$ (linearita),

(M) $f \in \Theta,\ f \geq 0, \Longrightarrow If \geq 0$ (monotonie),

(N) je-li $f = 1$ na (a,b), potom $f \in \Theta$ a $If = b-a$,

(S) $f_n \in \Theta,\ f_n \longrightarrow f \Longrightarrow f \in \Theta$ a $If_n \longrightarrow If$ ("spojitost"),

(AK) $f \in \Theta \Longrightarrow |f| \in \Theta$ ("absolutní konvergence")

Různé integrály splňují či nesplňují tyto požadavky. Tak kupříkladu všechny, s kterými se setkáte, mají vlastnost (L), Riemannův integrál navíc vyhovuje (M), (N) a (AK); Newtonův zase pouze (M) a (N), a žádný z těchto dvou nesplňuje (S). Lebesgueův integrál vyhovuje (M), (N), (AK) i (S) (v podstatě), Stieltjesův integrál naproti tomu vlastnosti (M), (N) a (S) nemá. Toto není ovšem jediné rozlišení různých integrálů. Jak jsme již řekli, proces integrace spočívá v určení dvojice (Θ, I) a různé integrály se také liší tím, jak "široký" je systém integrovatelných funkcí Θ. Obvykle platí věta (až na Stieltjesův integrál, který je v jistém smyslu výjimkou):

jsou-li (Θ_1, I_1), (Θ_2, I_2) dvě dvojice a je-li $f \in \Theta_1 \cap \Theta_2$, potom $I_1 f = I_2 f$.

-.-.-.-.-.-.

Historicky sehrály důležitou roli teorie Riemannova a Newtonova integrálu; definice těchto integrálů - alespoň pro spojité funkce - jsou velmi názorné a přirozené. Později se objevily snahy rozšířit systém integrovatelných funkcí a tedy vybudovat "hodně obecný" integrál. Velmi uspokojivým výsledkem těchto snah je definice Lebesgueova integrálu, s kterým se seznámíte v těchto skriptech. Mimo tento integrál byla podána řada dalších definic, které vycházely ze zmíněných tendencí.

Posléze se některé teorie integrálů rozšířily i na obecnější prostory než je reálná osa. Uvažovala se abstraktní množina X, jistý systém $\mathfrak{M}$ jejích podmnožin, třída funkcí Θ_M definovaných na množině $M \in \mathfrak{M}$ ("funkce integrovatelné") a zobrazení $I_M : \Theta_M \longrightarrow E_1$ ("integrál"). Nyní tedy již v teorii integrace vystupuje trojice $(\mathfrak{M}, \Theta_M, I_M)$ a kromě obvyklých požadavků na systém Θ_M a integrál I_M (jako jsou (L) - (AK)) byly přidány další, kupříkladu

$$(k) \qquad I_M f = \sum_{i=1}^{n} I_{M_i} f ,$$

$$(\sigma) \qquad I_M f = \sum_{i=1}^{\infty} I_{M_i} f ,$$

kdykoliv $M = \bigcup_i M_i$, poslední množiny jsou po dvou disjuktní a $f \in \Theta_M$.

Lze říci (velmi zhruba), že zatímco Riemannův integrál splňuje pouze podmínku (k), Lebesgueův integrál již splňuje navíc i požadavek (σ).

Míra. Naší snahou je - opět třeba v E_1 - nalézt jistou třídu množin $\mathcal{M}$ a každé množině $M \in \mathcal{M}$ přiřadit číslo μM, které bychom mohli nazývat mírou této množiny, přičemž požadujeme, obdobně jako u integrálu, splnění jistých axiomů. Například

(i) $A, B \in \mathcal{M}$, $A \in B \Longrightarrow \mu A \leq \mu B$,

(ii) $\langle a,b \rangle \in \mathcal{M}$ a $\mu \langle a,b \rangle = b-a$,

(iii) $A, B \in \mathcal{M}$, $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{M}$, $\mu (A \cup B) = \mu A + \mu B$,

(iv) $A_n \in \mathcal{M}$ po dvou disjunktní $\Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ a

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n .$$

Znovu poznamenejme, že naším cílem je najít co největší systém množin $\mathcal{M}$, mající některé z těchto vlastností, a že nemusíme uvažovat zrovna podmnožiny E_1, ale podmnožiny nějaké obecné množiny X.

-.-.-.-.-.-.

V dalším textu se vynasnažíme řešit následující dva základní problémy:

1. (a) máme-li vybudován "integrál", odvodit z něj příslušnou "míru",

(b) máme-li již zavedenu "míru", zkonstruovat z ní "integrál",

2. máme-li vybudován "integrál" (či "míru"), rozšířit tento na co největší systém funkcí (či množin) se zachováním jeho (či jejích) základních vlastností.

Zkoumejme nyní podrobněji jednotlivé otázky.

(1a) Řešení této otázky je vcelku snadné. Nechť (Θ, I) je integrál na množině X. Položme

$$\mathcal{M} = \left\{ A \subset X \; ; \; c_A \in \Theta \right\} \quad , \quad \mu A = I c_A$$

(kde c_A je tzv. charakteristická funkce množiny A). Lehko zjistíme, že z různých vlastností integrálu pak vyplývají odpovídající vlastnosti míry μ. Tímto způsobem odvodíme třeba Jordan-Peanův objem z Riemannova integrálu, Lebesgueovu míru z Lebesgueova integrálu, či abstraktní míru z Daniellova integrálu.

(1b) Zde jde o obrácený postup. Nechť μ je míra na systému $\mathcal{M}$ podmnožin množiny X, chceme definovat integrál I a systém funkcí Θ. Postup je zhruba následující: nejdříve definujeme přirozeným způsobem integrál z funkcí, které lze vyjádřit jako lineární kombinace charakteristických funkcí množin ze systému $\mathcal{M}$, potom uvažujeme všechny limity takovýchto funkcí a pomocí limitního přechodu definujeme integrál i pro ně. Tohoto postupu použijeme při vybudování Lebesgueova integrálu z Lebesgueovy míry či abstraktního (Lebesgueova) integrálu z abstraktní míry.

(2) Vcelku jednoduchým způsobem vybudujeme teorii Riemannova či Newtonova integrálu. Dále nám půjde o to, tento integrál rozšířit na obecnější systémy funkcí. V těchto skriptech ukážeme pomocí tzv. Daniellovy metody, že tento problém lze úspěšně kladně vyřešit. Obdobně ukážeme, že i míru na ne příliš "bohatém" systému množin lze vždy rozšířit na mnohem větší systém množin.

-.-.-.-.-.-.

Podotýkám, že hlavním cílem teorie míry a integrálu je vybudování teorie Lebesgueovy míry a Lebesgueova integrálu (ať již abstraktní či v E_n). K tomu jsou možné, jak jsme viděli - a jak ještě uvidíme - dva základní přístupy. Schematicky znázorněno:

(I) Riemannův či Newtonův integrál → Lebesgueův integrál (Daniellova metoda) → Lebesgueova míra

(II) Jordan-Peanův objem → Lebesgueova míra → Lebesgueův integrál

Každá z těchto metod (ať již první, které se obvykle říká Daniellova metoda rozšíření funkcionálu, či druhá - vybudování integrálu na základě míry) má svou výhodu i nevýhodu a různí matematici - ať již světoví, ale také i u nás - mají k nim různé výhrady. +) Osobně se domnívám, že k všeobecnému matematickému vzdělání patří znalost obou těchto metod, a proto jsem se snažil je obě ukázat v předložených skriptech. Ovšem stačí si vybrat pouze jednu z těchto metod a seznamovat se jen s ní. I to je možné.

-.-.-.-.-.

A konečně poslední poznámku. Skripta jsem úmyslně nepsal tak, aby se co nejkratším a nejelegantnějším postupem dospělo k vybudování teorie míry a integrálu. Naopak, snažil jsem se vždy ukázat různé metody a porovnávat jejich vztah. Tak je tomu např. při vybudování Lebesgueovy míry v E_1, při rozšiřování abstraktní míry, při součinu měr a jinde. Čtenář, který se zajímá pouze o konstrukci třeba Lebesgueova integrálu v E_1, si může přečíst jenom některé odstavce. O jejich výběru by se však měl, alespoň si myslím, nejdříve poradit s někým zkušenějším.

-.-.-.-.-.

Těžší partie označuji hvězdičkou (*) .

+) Uveďme část polemiky, která se objevila v Bull. Amer. Math. Soc. v roce 1953. "Můj závěr podle skutečností, které mám dosud po ruce, je, že autoři vynaložili velké úsilí. Jsem skoro na pochybách, zda jejich pojetí bude mít nějaký trvalý vliv."
(Paul R. Halmos o knize N. Bourbaki, Intégration).

"Nakonec chce recenzent vyslovit své pohoršení nad autorovým tvrzením, že teorie míry (jak je chápána v této knize) je základem teorie integrace.

To bylo bezpochyby pravda ještě před několika lety, ale naštěstí tomu již tak není, neboť stále více matematiků se přiklání k "funkcionálnímu přístupu" integrování. Je vždy ukvapené dělat nějaké předpovědi; recenzent si však nutně musí myslet, že tato kniha přes své některé přednosti bude odložena spolu s ostatními knihami stejného zaměření k mnohým jiným zastaralým teoriím na regál v krámku starých kuriozit matematiky."

(J. Dieudonné o knize K. Mayrhofer, Inhalt und Mass.)

I. RIEMANNŮV INTEGRÁL

1. Riemannův integrál

Obsah:

A. DEFINICE RIEMANNOVA INTEGRÁLU

$\boxed{1.1}$ Definice. Buď $\langle a,b \rangle$ uzavřený interval v E_1. Dělením intervalu $\langle a,b \rangle$ rozumíme každou konečnou (uspořádanou) množinu $D \subset \langle a,b \rangle$ tvaru

$$D = \left\{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \right\} .$$

Množinu všech dělení intervalu $\langle a,b \rangle$ značme symbolem $\mathcal{D}\left(\langle a,b \rangle\right)$. Buď f omezená funkce na intervalu $\langle a,b \rangle$. Pro každé dělení $D = \left\{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \right\} \in \mathcal{D}\left(\langle a,b \rangle\right)$ intervalu $\langle a,b \rangle$ definujeme reálná čísla

$$S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) ,$$

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) ,$$

tzv. horní a dolní součet funkce f při dělení D.

Označíme-li $M = \sup_{x \in \langle a,b \rangle} f(x)$, $m = \inf_{x \in \langle a,b \rangle} f(x)$, je zřejmě

$m \cdot (b-a) \leq s(f,D) \leq S(f,D) \leq M \cdot (b-a)$ pro libovolné $D \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$.
Tedy množina všech horních součtů $\left\{ S(f,D);\ D \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle) \right\}$ je omezená zdola, množina všech dolních součtů $\left\{ s(f,D);\ D \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle) \right\}$ je omezená

shora (tyto množiny jsou dokonce omezené). Horní a dolní Riemannův integrál funkce f přes interval $\langle a,b\rangle$ definujeme vztahem

$$(R)\overline{\int_a^b} f = \inf_{D\in\mathcal{D}(\langle a,b\rangle)} S(f,D)\ , \qquad (R)\underline{\int_a^b} f = \sup_{D\in\mathcal{D}(\langle a,b\rangle)} s(f,D)\ .$$

V případě, že horní a dolní Riemannův integrál splývají, říkáme, že funkce f je riemannovsky integrovatelná přes interval $\langle a,b\rangle$ a společnou hodnotu horního a dolního integrálu pak nazýváme Riemannovým integrálem (či krátce R-integrálem) funkce f přes interval $\langle a,b\rangle$. Zavedeme následující značení :

$$R(\langle a,b\rangle) \overset{df}{=} \left\{ f;\ (R)\overline{\int_a^b} f = (R)\underline{\int_a^b} f \right\} \ldots \text{ systém všech}$$

riemannovsky integrovatelných funkcí,

$$(R)\int_a^b f \overset{df}{=} (R)\underline{\int_a^b} f = (R)\overline{\int_a^b} f \qquad \text{pro } f\in R(\langle a,b\rangle) \ldots$$

R-integrál funkce f přes interval $\langle a,b\rangle$.

Pro zkrácení píšme někdy - nehrozí-li nedorozumění - místo $(R)\int_a^b f$ pouze $\int_a^b f$; a místo $f\in R(\langle a,b\rangle)$ říkejme též někdy, že $\int_a^b f$ existuje.

1.2 Poznámky.

(a) Mohli bychom definovat horní součty i pro neomezené funkce (či pro zdola či shora neomezené funkce) ?

(b) Mohli bychom definovat horní R-integrál i pro zdola neomezené funkce (shora neomezené funkce) ?

(c) Mohli bychom definovat R-integrál kupříkladu i pro funkce omezené na intervalu $\langle 0, +\infty)$?

1.3 Příklady .

(a) Buď f konstantní na intervalu $\langle a,b\rangle$, $f(x) = K$ pro všechna $x\in\langle a,b\rangle$. Potom $f\in R(\langle a,b\rangle)$ a $(R)\int_a^b f = K\cdot(b-a)$. Dokažte!

(b) Buď F Dirichletova funkce na intervalu $\langle 3,5\rangle$, tj.

$F(x) = 1$ pro $x\in\langle 3,5\rangle$ racionální,

$F(x) = 0$ pro $x\in\langle 3,5\rangle$ iracionální.

Potom $(R)\underline{\int_3^5} F = 0$, $(R)\overline{\int_3^5} F = 2$, tedy $F\notin R(\langle 3,5\rangle)$.
Dokažte!

(c) Definujme funkci G na intervalu $\langle 0,1\rangle$ předpisem

$$G(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x \in \langle 0,1\rangle\ ,\ x \neq \tfrac{1}{8}$$

$$G\left(\tfrac{1}{8}\right) = 3\ .$$

Potom $G \in R\,(\langle 0,1\rangle)$ a $(R)\int_0^1 G = 0$. Dokažte!

(d) Buď ψ tzv. Riemannova funkce v intervalu $\langle 0,1\rangle$ (pro $x \in (0,1)$, $x = \frac{p}{q}$, kde p,q jsou přirozená nesoudělná čísla, je $\psi(x) = \frac{1}{q}$, pro ostatní $x \in \langle 0,1\rangle$ pak $\psi(x) = 0$).

Dokažte, že $\psi \in R\,(\langle 0,1\rangle)$ a $(R)\int_0^1 \psi = 0$.

B. PODMÍNKY INTEGRABILITY

V dalším odvodíme některé nutné a postačující podmínky integrability, tj. podmínky, podle nichž umíme rozhodnout, zda funkce f leží či neleží v systému $R\,(\langle a,b\rangle)$. Jinými slovy, podmínky, za nichž funkce f má či nemá Riemannův integrál. Úvodem tohoto odstavce ukážeme, že vždy platí nerovnost

$(R)\underline{\int_a^b} f \leq (R)\overline{\int_a^b} f$. Vysvětlete, proč však nemůžeme použít následující úvahu:

"pro každé dělení $D \in \mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$ platí $S(f,D) \geq s(f,D)$, tedy i

$$\inf_D S(f,D) \geq \sup_D s(f,D)\ , \quad \text{tj.}\ (R)\overline{\int_a^b} f \geq (R)\underline{\int_a^b} f\ ."$$

$\boxed{1.4}$ **Lemma.** Buď f ~~omezená na intervalu~~ $\langle a,b\rangle$, buďte $D_1, D_2 \in \mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$, $D_1 \subset D_2$ (někdy též říkáme, že dělení D_2 je zjemněním dělení D_1).

Potom $\quad S(f, D_1) \geq S(f, D_2)$,

$\qquad\quad s(f, D_1) \leq s(f, D_2)$.

Důkaz: Nechť zpočátku $D_1 = \left\{ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \right\}$,
$D_2 = \left\{ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\right\} \cup \left\{ y \right\} = D_1 \cup \left\{ y \right\}$, $y \notin D_1$ (v přirozeném uspořádání).
Potom existuje index i tak, že $x_{i-1} < y < x_i$, a zřejmě

$$\sup_{x\in\langle x_{i-1},y\rangle} f(x)\,.\,(y - x_{i-1}) + \sup_{x\in\langle y,x_i\rangle} f(x)\,.\,(x_i - y) \leq$$

$$\leq \sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)\,.\,(x_i - x_{i-1})\ ;$$

odtud již snadno plyne tvrzení.
Obecné tvrzení pak již dostanete například indukcí.

1.5 Lemma. Buď f omezená na intervalu $\langle a,b \rangle$, buďte $D_1, D_2 \in \mathscr{D}(\langle a,b \rangle)$. Potom $S(f,D_1) \geqq s(f,D_2)$ (tj. každý horní součet je větší nebo roven než libovolný dolní součet).

Důkaz: Položíme $D = D_1 \cup D_2$ (někdy říkáme, že dělení D je tzv. společné zjemnění dělení D_1 a D_2). Potom použitím předchozího lemmatu dostáváme

$$S(f, D_1) \geqq S(f,D) \geqq s(f,D) \geqq s(f,D_2).$$

1.6 Věta. Buď f omezená v $\langle a,b \rangle$, potom

$$(R) \underline{\int_a^b} f \leqq (R) \overline{\int_a^b} f .$$

Důkaz. Plyne z 1.5 - vysvětlete podrobně!

1.7 Věta (nutné a postačující podmínky integrability).

Buď f omezená v intervalu $\langle a,b \rangle$. Potom

$$f \in R(\langle a,b \rangle) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists D \in \mathscr{D}(\langle a,b \rangle) \text{ tak, že}$$

$$0 \leqq S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon .$$

Důkaz 1) předpokládejme, že podmínka je splněna. Zvolme $\varepsilon > 0$. Existuje tedy dělení $D \in \mathscr{D}(\langle a,b \rangle)$ tak, že

$$0 \leqq S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon .$$

Potom

$$\overline{\int_a^b} f \leqq S(f,D) < s(f,D) + \varepsilon \leqq \underline{\int_a^b} f + \varepsilon , \quad \text{tedy}$$

$$0 \leqq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon .$$

Ale $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, odtud plyne, že $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ (vysvětlete!) a tudíž $f \in R(\langle a,b \rangle)$.

2) Nechť nyní naopak $f \in R(\langle a,b \rangle)$; zvolme $\varepsilon > 0$. Existují dělení $D_1, D_2 \in \mathscr{D}(\langle a,b \rangle)$ tak, že

$$\overline{\int_a^b} f + \varepsilon > S(f,D_1) \geqq \overline{\int_a^b} f, \quad \underline{\int_a^b} f - \varepsilon < s(f,D_2) \leqq \underline{\int_a^b} f.$$

Položme $D = D_1 \cup D_2$. Potom

$$0 \leqq S(f,D) - s(f,D) \leqq S(f,D_1) - s(f,D_2) < \overline{\int_a^b} f + \varepsilon - \underline{\int_a^b} f + \varepsilon = 2\varepsilon .$$

Tedy k zadanému $\varepsilon > 0$ jsme nalezli dělení $D \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$ tak, že
$0 \leq S(f,D) - s(f,D) < 2\varepsilon$,
čímž je druhá část implikace z věty dokázána.

1.8 **Věta.** (postačující podmínky integrability)

Platí následující implikace:

(a) f spojitá na $\langle a,b\rangle \Longrightarrow f \in R(\langle a,b \rangle)$,

(b) f monotonní na $\langle a,b\rangle \Longrightarrow f \in R(\langle a,b \rangle)$.

Důkaz. Buď f spojitá na intervalu $\langle a,b \rangle$, zvolme $\varepsilon > 0$. Ukážeme nejdříve, že existuje dělení

$$D = \left\{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \right\} \quad \text{intervalu } \langle a,b\rangle \quad \text{tak, že}$$

$$\sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) - \inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) < \varepsilon \quad \text{pro všechna } i \quad (i=1,\dots,n)$$

Funkce f je spojitá na intervalu $\langle a,b \rangle$, tudíž i stejnoměrně spojitá na $\langle a,b \rangle$; existuje tedy k našemu zvolenému $\varepsilon > 0$ číslo $\delta > 0$ tak, že

$$x,y \in \langle a,b \rangle, \ |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Buď $D = \left\{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \right\}$ takové dělení, že

$$x_j - x_{j-1} < \delta \quad \text{pro } j = 1,\dots,n.$$

V každém intervalu $\langle x_{j-1}, x_j \rangle$ existují t_j, y_j tak, že

$$f(t_j) = \sup_{x\in\langle x_{j-1},x_j\rangle} f(x), \quad f(y_j) = \inf_{x\in\langle x_{j-1},x_j\rangle} f(x)$$

(odůvodněte!).

Potom ovšem $|t_j - y_j| \leq |x_j - x_{j-1}| < \delta$ pro každé $j=1,\dots,n$, tudíž

$$\sup_{x\in\langle x_{j-1},x_j\rangle} f(x) - \inf_{x\in\langle x_{j-1},x_j\rangle} f(x) = f(t_j) - f(y_j) < \varepsilon \quad \text{pro každé } j \ (j = 1,\dots,n).$$

Přejdeme nyní k vlastnímu důkazu.

Mějme dáno libovolné $\varepsilon > 0$, podle předešlého najdeme dělení $D \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$ tak, aby

$$\sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) - \inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{pro všechna } i \quad (i=1,\dots,n).$$

Potom

$$0 \leq S(f,D) - s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) - \inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)\right)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon,$$

tedy podle věty 1.7 je $f \in R(\langle a,b\rangle)$.

b) Buď f neklesající v $\langle a,b\rangle$, zvolme $\varepsilon > 0$.
Nechť

$$n > \frac{(b-a)\cdot(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$$

je přirozené číslo. Rozdělme interval $\langle a,b\rangle$ dělením D na n stejných dílů, tj.

$$D = \left\{ a = x_0 < x_1 = a + \frac{1}{n}(b-a) < \dots < x_n = b \right\},$$

potom

$$0 \leq S(f,D) - s(f,D) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{\dots} f(x) - \inf_{\dots} f(x) \right) \cdot (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1}) =$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a)) < \varepsilon,$$

opět tedy $f \in R(\langle x,b\rangle)$ podle věty 1.7.

Poznámka: Pomocné tvrzení v první části důkazu mohou posluchači, znající "plížívé lemma", dokázat použitím tohoto lemmatu, jestliže definují relaci ρ vztahem $u \rho v \overset{def}{\iff}$ existuje dělení $D = \{u = x_0 < x_1 < \dots < x_n = v\}$ intervalu $\langle u,v\rangle \subset \langle a,b\rangle$ tak, že

$$\sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x) - \inf_{x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x) < \varepsilon \quad \text{pro všechna } i = 1,\dots,n.$$

Plížívé lemma. Buď ρ relace na intervalu $\langle a,b\rangle$ (tj. $\rho \subset \langle a,b\rangle \times \langle a,b\rangle$) splňující předpoklady:

1) $a \rho b,\ b \rho c \Longrightarrow a \rho c$ (transitivita),

2) $\forall x \in \langle a,b\rangle\ \exists \delta > 0\ \forall u, v \in \langle a,b\rangle$
$u \in \langle x - \delta, x\rangle,\ v \in \langle x, x + \delta\rangle \Longrightarrow u \rho v$
(lokální vlastnost).

Potom $a \rho b$.

C. ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI R-INTEGRÁLU

Ze začátku připomeneme několik definic a lemmat z 1. semestru.

1.9 Definice.

Buďte $A, B \subset E_1$ neprázdné množiny, buď $\lambda \in E_1$.
Definujme množiny $A + B \subset E_1$, $\lambda A \subset E_1$ vztahy

$$A + B \overset{def}{=} \{ a + b \,;\, a \in A,\ b \in B \}.$$
$$\lambda A \overset{def}{=} \{ \lambda a;\ a \in A \} .$$

(pozor – nepleťte si množinu $A + B$ s množinou $A \cup B$!).

1.10 Lemma. Buďte $A, B \subset E_1$ neprázdné a omezené množiny, buď $\lambda \in E_1$.
Potom množiny $A + B$, λA jsou neprázdné, omezené a platí:

$$\sup (A + B) = \sup A + \sup B ,$$
$$\inf (A + B) = \inf A + \inf B,$$
$$\sup \lambda A = \lambda \sup A , \text{ je-li } \lambda \geqq 0 ,$$
$$= \lambda \inf A, \text{ je-li } \lambda < 0 ,$$

obdobně pro $\inf \lambda A$.

Důkaz. Zřejmě množiny $A + B$, λA jsou neprázdné a omezené (podrobně odůvodněte!).

Ukážeme, že $\sup (A + B) = \sup A + \sup B$; označme $G = \sup A + \sup B$.
Máme ukázat dvě implikace:

1) $x \in A + B \Longrightarrow x \leqq G$,

2) $\forall \varepsilon > 0 \,\exists\, x \in A + B$ tak, že $G - \varepsilon < x \leqq G$.

1) Buď $x \in A + B \Longrightarrow$ existují $a \in A$, $b \in B$ tak, že $a + b = x$.
   Protože je $a \leqq \sup A$, $b \leqq \sup B$, je $x = a + b \leqq G$.

2) Zvolme $\varepsilon > 0$, existují $a \in A$, $b \in B$ tak, že
   $\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < a \leqq \sup A$, $\sup B - \frac{\varepsilon}{2} < b \leqq \sup B$,
   označme $x = a + b$. Potom ovšem $x \in A + B$ a $G - \varepsilon < x \leqq G$.
   Tedy $\sup(A + B) = G$.

Obdobně dokažte sami ostatní tvrzení.

1.11 Věta (linearita R-integrálu).

Platí následující implikace:

1) $f \in R(\langle a,b \rangle)$, $\lambda \in E_1 \Longrightarrow \lambda f \in R(\langle a,b \rangle)$ a
$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f ,$$

2) $f,g \in R(\langle a,b \rangle) \Longrightarrow f + g \in R(\langle a,b \rangle)$ a
$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g .$$

Důkaz. 1) Pro $\lambda = 0$ je tvrzení zřejmé; buď $\lambda > 0$. Zvolme libovolné dělení $D \in \mathscr{D}(\langle a,b \rangle)$. S použitím předchozího lemmatu dostáváme

$$S(\lambda f,D) = \sum \sup \lambda f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum \lambda \sup f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \lambda \cdot S(f,D),$$

tedy

$$\overline{\int_a^b} \lambda f = \inf_D S(\lambda f,D) = \inf_D \lambda S(f,D) = \lambda \cdot \inf_D S(f,D) = \lambda \overline{\int_a^b} f ,$$

obdobně dokážeme, že

$$\underline{\int_a^b} \lambda f = \lambda \underline{\int_a^b} f .$$

Odtud plyne

$$\underline{\int_a^b} \lambda f = \overline{\int_a^b} \lambda f = \lambda \cdot \int_a^b f .$$

Pro $\lambda < 0$ a $D \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$ pak dokažte, že

$$S(\lambda f,D) = \lambda\, s(f,D) ,$$

tedy $$\overline{\int_a^b} \lambda f = \inf S(\lambda f,D) = \inf \lambda \cdot s(f,D) =$$

$$= \lambda \sup s(f,D) = \lambda \cdot \underline{\int_a^b} f ,$$

obdobně $\underline{\int_a^b} \lambda f = \lambda \cdot \overline{\int_a^b} f$, odtud již vyplývá tvrzení.

2) Je zřejmé, že pro libovolnou množinu E $(E \subset \langle a,b \rangle)$ platí

$$\{f(x) + g(x); x \in E\} \subset \{f(x);\ x \in E\} + \{g(x);\ x \in E\}$$

(dokažte! Ukažte, že nemusí nastat rovnost těchto množin), tedy vždy

$$\sup_{x \in E} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in E} f(x) + \sup_{x \in E} g(x) .$$

$$\inf_{x \in E} (f(x) + g(x)) \geq \inf_{x \in E} f(x) + \inf_{x \in E} g(x) .$$

Buď $D \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$, potom podle předchozího je

$$S(f + g,D) \leq S(f,D) + S(g,D),$$

odtud plyne, že pro libovolná $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$ můžeme nalézt $D \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$ (kupříkladu $D = D_1 \cup D_2$) tak, že

$$S(f + g, D) \leq S(f,D) + S(g,D) \leq S(f,D_1) + S(g,D_2).$$

Tedy

27571 Z2

$$\overline{\int_a^b}(f + g) = \inf_D S(f + g, D) \leq \inf S(f,D) + \inf S(g,D) =$$
$$= \int_a^b f + \int_a^b g \; .$$

(Podrobně odůvodněte!) Obdobně dokážeme, že

$$\underline{\int_a^b}(f + g) \geq \int_a^b f + \int_a^b g \; .$$

Spojením všech nerovností pak dostaneme

$$\int_a^b f + \int_a^b g \leq \underline{\int_a^b}(f + g) \leq \overline{\int_a^b}(f + g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \; ,$$

tedy $f + g \in R(\langle a,b \rangle)$ a $\displaystyle\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

1.12 Věta (monotonie R-integrálu)

Buďte $f, g \in R(\langle a,b \rangle)$, $f \leq g$ na $\langle a,b \rangle$.

Potom $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Důkaz: Tvrzení je bezprostřední důsledek definice.

1.13 Definice.

Buď $f : X \to E_1$ funkce na množině X .

Definujme funkce $f^+, f^- : X \to \langle 0, +\infty)$ vztahy

$$f^+ : x \to \max(f(x), 0) , \quad x \in X ,$$
$$f^- : x \to \max(-f(x), 0) , \quad x \in X .$$

(Kreslete v E_1).

Funkce f^+, f^- nazveme kladnou a zápornou částí funkce f .

Vlastnosti funkcí f^+, f^- .

Nechť f je funkce na množině X ($f : X \to E_1$) .
Potom
1) $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$ na X (záporná část je nezáporná funkce!),
2) $f = f^+ - f^-$ na X ,
3) $|f| = f^+ + f^-$ na X .

Důkaz. Proveďte sami !

1.14 Lemma. Nechť f je funkce na množině M, potom

$$\sup_{x\in M} f^+(x) - \inf_{x\in M} f^+(x) \leq \sup_{x\in M} f(x) - \inf_{x\in M} f(x) .$$

Důkaz. Buď $f \geq 0$ na M, potom $f^+ = f$ (a $f^- = 0$) a tvrzení je zřejmé. Stejně tak pro $f \leq 0$.
Nechť nyní existují $x_1 \in M$, $x_2 \in M$ tak, že $f(x_1) > 0$, $f(x_2) < 0$.
Potom $\sup_{x\in M} f(x) = \sup_{x\in M} f^+(x)$, $\inf_{x\in M} f^+(x) = 0$, $\inf_{x\in M} f(x) \leq 0$ (odůvodněte podrobně!) a tvrzení opět platí.

1.15 Věta ("absolutní konvergence" R-integrálu)

Buď $f \in R(\langle a,b\rangle)$. Potom $|f| \in R(\langle a,b\rangle)$ a $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle věty 1.7 existuje $D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$ tak, že

$$0 \leq S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon .$$

Vzhledem k předchozímu lemmatu dostáváme

$$0 \leq S(f^+,D) - s(f^+,D) \leq S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$$

(odůvodněte podrobně!), tedy opět podle 1.7 je $f^+ \in R(\langle a,b\rangle)$.
Ze vztahu $f^- = f^+ - f$ a z věty 1.11 plyne $f^- \in R(\langle a,b\rangle)$.
Tedy $|f| = f^+ + f^- \in R(\langle a,b\rangle)$.
Druhou část tvrzení dostaneme již lehko:

$$\left|\int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f^+ - f^-)\right| = \left|\int_a^b f^+ - \int_a^b f^-\right| \leq \int_a^b f^+ + \int_a^b f^- = \int_a^b |f| .$$

1.16 Poznámky.

(A) Na tomto místě bychom chtěli upozornit na analogii mezi teorií řad a teorií integrálu. Označme symbolem $\mathcal{K}$ množinu všech konvergentních řad a symbolem $A\mathcal{K}$ systém všech absolutně konvergentních řad. Pro větší jasnost rozlišujeme nyní dva pojmy:

$ř(u_n)$ ... řada u_n, což je vlastně posloupnost $\{u_n\}$,

$\sum u_n$ ... součet řady $ř(u_n)$, což je reálné číslo.

Jsou známy následující vlastnosti:

a) $A\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$, $\mathcal{K} - A\mathcal{K} \neq \emptyset$ (uveďte příklad),

b) $ř(u_n) \in A\mathcal{K}$, $ř(v_n) \in A\mathcal{K} \Rightarrow ř(u_n + v_n) \in A\mathcal{K}$ a

$$\sum (u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n ,$$

(obdobně pro systém $\mathcal{K}$),

c) $\check{r}(u_n) \in \mathcal{AK}$, $\lambda \in E_1 \Longrightarrow \check{r}(\lambda u_n) \in \mathcal{AK}$ a $\sum \lambda u_n = \lambda \sum u_n$
(obdobně pro systém $\mathcal{K}$),

d) $\check{r}(u_n)$, $\check{r}(v_n) \in \mathcal{K}$, $u_n \leq v_n \ \forall \ n \Longrightarrow \sum u_u \leq \sum v_n$,

e) $\check{r}(u_n) \in \mathcal{AK} \Longrightarrow \check{r}(|u_n|) \in \mathcal{AK}$ a $\left|\sum u_n\right| \leq \sum |u_n|$.

Poslední vlastnost neplatí pro systém $\mathcal{K}$, tj.

$\check{r}(u_n) \in \mathcal{K} \not\Longleftrightarrow \check{r}(|u_n|) \in \mathcal{K}$ (uveďte příklad!).

Je právě vidět, že Riemannův integrál má obdobné vlastnosti jako absolutně konvergentní řady (srovnejte tuto vlastnost s obdobnou vlastností Newtonova integrálu - viz 3.7.a a též 10. 8, který je vlastně "neabsolutně konvergentní" , a Lebesgueova integrálu - viz 9.43.f či 18.23.D, ten je "absolutně konvergentní"). Ostatně řady a součty je možno v jistém smyslu chápat jako funkce a integrál - viz cvičení 9.J.

Porovnejte kupříkladu též analogické věty pro řady a integrály.

(B) Větu 1.15 nelze obrátit, neplatí tedy tvrzení

$$|f| \in R(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow f \in R(\langle a,b\rangle)$$

(opět porovnejte s řadami!).

Uveďme příklad

$$\langle a,b\rangle = \langle 0,1\rangle, \quad f : f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \langle 0,1\rangle \text{ racionální,} \\ -1 & \text{pro } x \in \langle 0,1\rangle \text{ iracionální.} \end{cases}$$

(C) Ukažte sami, že platí implikace

$$f,g \in R(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow \max(f,g), \min(f,g) \in R(\langle a,b\rangle).$$

1.17 Věta. Buďte $f,g \in R(\langle a,b\rangle)$, potom $f.g \in R(\langle a,b\rangle)$
(ale nikoliv již $\int_a^b f.g = \int_a^b f \,.\, \int_a^b g$ - uveďte příklad!).

Důkaz. Stačí dokázat tvrzení

$$f \in R(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow f^2 \in R(\langle a,b\rangle),$$

neboť

$$f.g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$$

a využijeme větu 1.11.

I) Nechť $f \geq 0$, $f \in R(\langle a,b\rangle)$. Potom pro libovolnou množinu $M \subset \langle a,b\rangle$ platí

$$\sup_M f^2 \leq (\sup_M f)^2 \ ; \quad \inf_M f^2 \geq (\inf_M f)^2$$

$(x \in M \Longrightarrow 0 \leq f(x) \leq \sup f(x) \Longrightarrow 0 \leq f^2(x) \leq (\sup f)^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \sup f^2 \leq (\sup f)^2\ )$.

Funkce f je na intervalu $\langle a,b \rangle$ omezená, existuje tedy $K > 0$ tak, že

$$|f(x)| \leq K \quad \text{pro všechna} \quad x \in \langle a,b \rangle \ .$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle 1.7 existuje $D \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$,
$D = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \}$ tak, že

$$0 \leq S(f,D) - s(f,D) < \frac{\varepsilon}{2K} \ ;$$

potom ovšem

$$0 \leq S(f^2,D) - s(f^2,D) = \sum (\sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f^2 - \inf_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f^2)(x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$\leq \sum ((\sup f)^2 - (\inf f)^2) . (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum (\sup f - \inf f) . (\sup f + \inf f)(x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$\leq 2K . \sum (\sup f - \inf f) . (x_i - x_{i-1}) = 2K (S(f,D) -$$

$$- s(f,D)) < \varepsilon \ ,$$ tedy podle 1.7 je $f^2 \in R(\langle a,b \rangle)$.

II) Buď nyní $f \in R(\langle a,b \rangle)$ libovolná, potom podle 1.15 je $|f| \in R(\langle a,b \rangle)$ a podle předešlé části důkazu je $|f|^2 \in R(\langle a,b \rangle)$. Ale ze vztahu $f^2 = |f|^2$ plyne naše tvrzení.

D. R-INTEGRÁL JAKO FUNKCE INTERVALU

Doposud jsme vyšetřovali vlastnosti R-integrálu $\int_a^b f$ při pevném intervalu $\langle a,b \rangle$ v závislosti na integrované funkci. Nyní budeme zkoumat R-integrál v závislosti na oboru integrace.

1.18 Věta. Buď $f \in R(\langle a,b \rangle)$, nechť $c \in (a,b)$. Potom

$f \in R(\langle a,c \rangle)$, $f \in R(\langle c,b \rangle)$ a

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

(správně bychom měli psát $f/_{\langle a,c \rangle} \in R(\langle a,c \rangle)$ atd., dovolíme si zde menší nekorektnost).

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle 1.7 existuje dělení $D \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$ tak, že

$$0 \leq S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon \ .$$

Položíme-li $D_c = D \cup \{c\}$, dostáváme podle 1.4

$$0 \leq S(f,D_c) - s(f,D_c) \leq S(f,D) - s(f,D) < \mathcal{E}$$

Buď $\overline{D} = D_c / \langle a,c \rangle$ (tj. $\overline{D} = D_c \cap \langle a,c \rangle$), potom $\overline{D} \in \mathcal{D}(\langle a,c \rangle)$ a

$$0 \leq S(f,\overline{D}) - s(f,\overline{D}) \leq S(f,D_c) - s(f,D_c) < \mathcal{E},$$

tedy $f \in R(\langle a,c \rangle)$. Obdobně dokážeme, že $f \in R(\langle c,b \rangle)$.
Buďte nyní $D_1 \in \mathcal{D}(\langle a,c \rangle)$, $D_2 \in \mathcal{D}(\langle c,b \rangle)$, $D = D_1 \cup D_2$.
Potom zřejmě $D \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$ a

$$S(f, D_1) + S(f, D_2) = S(f,D) \geq \int_a^b f,$$

odkud přechodem k infimu dostáváme (proveďte podrobně) nerovnost

$$\int_a^c f + \int_c^b f \geq \int_a^b f.$$

Z dolních součtů pak vyplyne obrácená nerovnost

$$\int_a^c f + \int_c^b f \leq \int_a^b f,$$ čímž je naše tvrzení dokázáno.

1.19 **Věta.** Buďte $a < c < b$, $f \in R(\langle a,c \rangle)$, $f \in R(\langle c,b \rangle)$.

Potom $f \in R(\langle a,b \rangle)$ a $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Důkaz. Stačí dokázat, že $f \in R(\langle a,b \rangle)$ (rovnost $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ pak vyplývá z předešlé věty).

Zvolme tedy $\mathcal{E} > 0$. Existují dělení $D_1 \in \mathcal{D}(\langle a,c \rangle)$, $D_2 \in \mathcal{D}(\langle c,b \rangle)$ tak, že

$$0 \leq S(f,D_1) - s(f,D_1) < \frac{\mathcal{E}}{2}, \quad 0 \leq S(f,D_2) - s(f,D_2) < \frac{\mathcal{E}}{2}.$$

Položíme-li $D = D_1 \cup D_2$, je $D \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$ a

$$0 \leq S(f,D) - s(f,D) = S(f,D_1) + S(f,D_2) - s(f,D_1) - s(f,D_2) < \mathcal{E},$$

tedy podle 1.7 je $f \in R(\langle a,b \rangle)$.

1.20 **Definice.**

Pro libovolné $a \in E_1$ a pro libovolnou funkci f definovanou v bodě a položme

$$(R)\int_a^a f = 0\ ;$$

pro $a,b \in E_1$, $b < a$, pro f definovanou v $\langle b,a \rangle$ položme

$$(R)\int_a^b f = -(R)\int_b^a f\ ,$$

pokud $f \in R(\langle b,a \rangle)$.

1.21 Důsledek.

Dokažte sami, že

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\ ,$$

kdykoliv $a,b,c \in E_1$ a kterékoliv dva integrály existují.

E. R-INTEGRÁL JAKO LIMITA HORNÍCH A DOLNÍCH SOUČTŮ

1.22 Definice.

Buď $D = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \}$ dělení intervalu $\langle a,b \rangle$. Číslo

$$\nu(D) = \max_{i=1,\dots,n} (x_i - x_{i-1})$$

nazýváme <u>normou</u> dělení D.

1.23 Věta. Buď $\{D_n\} \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$ posloupnost dělení intervalu $\langle a,b \rangle$ s vlastností $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$. Potom

$$f \in R(\langle a,b \rangle) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s(f,D_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,D_n) = \int_a^b f\ .$$

Důkaz. Předpokládejme, že $f \geq 0$ v $\langle a,b \rangle$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Nechť $f(x) < M$ $(x \in \langle a,b \rangle)$. Nalezneme dělení $D_1 \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$, $D_1 = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \}$ tak, aby

$$S(f,D_1) - \int_a^b f < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Položme $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2Mn}$. Nechť dělení $D \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$, $D = \{ a = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b \}$ má tu vlastnost, že $\nu(D) < \delta$. Potom

$$S(f,D) = \sum_{j=1}^{m} \sup_{x\in\langle y_{j-1},y_j\rangle} f(x)\ .\ (y_j - y_{j-1}) = \sum{}' \dots + \sum{}'' \dots\ ,$$

kde v prvním součtu $\sum{}' \dots$ se sčítá přes všechna s taková, že interval (y_s, y_{s+1}) obsahuje bod dělení D_1 a v součtu $\sum{}'' \dots$ přes všechna ostatní s.

Potom

$$\sum{}' \ldots < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \sum{}'' \ldots < S(f,D_1) .$$

Tedy $S(f,D) - \int_a^b f < \varepsilon$, odkud již plyne tvrzení. Je-li nyní f libovolná, použijeme právě dokázané na funkce f^+, f^- (proveďte!).

(Uvědomte si, že jsme dokázali vlastně o něco více, než požadovala věta 1.23!)

1.24 **Věta.** Buďte $D_n \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$, $\lim \nu(D_n) = 0$, nechť $D_n = \left\{ a = x_0^n < x_1^n < \ldots < x_{k_n}^n = b \right\}$.

Pro každé dělení D_n zvolme body ξ_i^n ,

$$a = x_0 \le \xi_1^n \le x_1^n \le \xi_2^n \le x_2^n \le \ldots \le x_{k_n-1}^n \le \xi_{k_n}^n \le x_{k_n}^n = b$$

a označme

$$\sigma_n = \sigma(f; D_n; \xi_1^n, \ldots, \xi_{k_n}^n) = \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^n).(x_i^n - x_{i-1}^n).$$

Potom platí

$$f \in R(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int_a^b f .$$

Důkaz. Pro každé n platí

$$s(f, D_n) \le \sigma_n \le S(f, D_n) ,$$

odkud vzhledem k předchozí větě 1.23 dostáváme tvrzení.

1.25 **Poznámka.**

Větu 1.24 lze též obrátit v následujícím smyslu:

"Nechť pro každou posloupnost dělení $D_n \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$ s vlastností $\lim \nu(D_n) = 0$ a pro každý výběr bodů $\xi_1^n, \ldots, \xi_{k_n}^n$ (splňující nerovnosti z věty 1.24) existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(f;D_n; \xi_1^n, \ldots, \xi_{k_n}^n)$.

Potom $f \in R(\langle a,b\rangle)$, hodnota limity $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(f,D; \xi_1^n, \ldots, \xi_{k_n}^n)$ nezávisí na volbě posloupnosti $\{D_n\}$ a na volbě bodů $\xi_1^n, \ldots, \xi_{k_n}^n$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f; D_n; \xi_1^n, \ldots, \xi_{k_n}^n) = (R)\int_a^b f ."$$

Tuto větu nebudeme dokazovat; poznamenejme pouze, že tímto způsobem lze též definovat systém funkcí $R(\langle a,b\rangle)$ a R-integrál na $\langle a,b\rangle$ a odvodit jejich základní vlastnosti. Zájemce odkazujeme na cvičení 1.J.

F. R-INTEGRÁL JAKO FUNKCE HORNÍ MEZE

1.26 Věta. Nechť $f \in R(\langle a,b\rangle)$, nechť

$$F : x \longrightarrow \int_a^x f\,, \quad x \in \langle a,b\rangle$$

(podle věty 1.18 $\int_a^x f$ existuje pro každé $x \in \langle a,b\rangle$).

Potom platí:

1) F je spojitá v $\langle a,b\rangle$,

2) f spojitá v $x_0 \in \langle a,b\rangle \Longrightarrow$ existuje $F'(x_0)$ a $F'(x_0) = f(x_0)$ (v krajních bodech zleva či zprava).

Důkaz. Ad 1) Označme $M = \sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} |f(x)|$. Buďte $x, x_0 \in \langle a,b\rangle$, potom

$$\left|F(x) - F(x_0)\right| = \left|\int_{x_0}^x f\right| \leq \int_{x_0}^x |f| \leq M \cdot |x - x_0|\,;$$

odtud již vyplývá tvrzení (proveďte podrobně!).

Ad 2) Buď $x_0 \in (a,b)$, zvolme $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta > 0$ tak, že

$$x \in (x_0 - \delta\,, x_0 + \delta) \subset (a,b) \Longrightarrow \left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon\,.$$

Potom ovšem

$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{x - x_0} \cdot \int_{x_0}^x \Big(f(t) - f(x_0)\Big)\, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{|x - x_0|}\, |x - x_0| = \varepsilon\,.$$

Pro $x_0 = a$ či $x_0 = b$ proveďte důkaz sami.

1.27 Poznámky.

(A) Buď $I \subset E_1$ interval libovolného druhu, buď f spojitá na I, zvolme $a \in I$. Podle věty 1. 8.a existuje $(R)\int_a^x f$ pro každé $x \in I$ a podle předešlé věty je funkce F,

$$F : x \longrightarrow \int_a^x f\,, \quad x \in I$$

primitivní funkcí k funkci f na intervalu I. Dokázali jsme tedy tvrzení, že ke každé spojité funkci na intervalu I existuje primitivní funkce.

(B) Buď f spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$. Buď F primitivní funkce k funkci f na intervalu $\langle a,b\rangle$ (podle předchozího F existuje!). Potom

$$(R)\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

(tímto jsme tedy převedli výpočet R-integrálů - prozatím u spojitých funkcí - na výpočet rozdílu hodnot primitivní funkce; viz též obecnější větu 1.28).

Důkaz: Buď $G : x \longrightarrow \int_a^x f$. Podle 1.26 je G primitivní funkcí k f na $\langle a,b \rangle$, existuje tedy $C \in E_1$ tak, že

$$F(x) = G(x) + C \quad \text{pro všechna} \quad x \in \langle a,b \rangle .$$

Pro $x = a$ dostáváme $C = F(a) - G(a) = F(a)$; pro $x = b$ potom

$$F(b) = G(b) + C = G(b) + F(a) \ , \quad \text{tj.}$$

$$G(b) = \int_a^b f = F(b) - F(a) .$$

(C) Ve větě 1.26 jsme dokázali, že (za předpokladu $f \in R(\langle a,b \rangle))$

$$\left(\int_a^x f\right)' = f(x) \quad \text{pro všechna} \quad x \in \langle a,b \rangle \ , \quad \text{v nichž je funkce } f$$

spojitá.

Uvedeme příklady:

a) $f : f(x) = 1$ pro $x \in \langle 0,1 \rangle$

$f(x) = 0$ pro $x \in \langle -1,0)$

potom $f \in R(\langle -1,1 \rangle)$ (ukažte! - zřejmě $f \in R(\langle 0,1 \rangle)$, $f \in R(\langle -1,0 \rangle)$ - viz obdobný příklad 1.3.c - a podle věty 1.19 i $f \in R(\langle -1,1 \rangle)$,

$$F : x \longrightarrow \int_0^x f \implies$$

$$F(x) = x \quad \text{pro} \quad x \in \langle 0,1 \rangle \ ,$$

$$F(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x \in \langle -1,0) \ ,$$

tedy $F'(0)$ neexistuje.

b) $f : f(x) = 0$ pro $x \in \langle 0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1 \rangle$,

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 \ ,$$

potom $f \in R(\langle 0,1 \rangle)$ (viz příklad 1.3.c) a

$$F : x \longrightarrow \int_0^x f \implies F(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x \in \langle 0,1 \rangle \ ,$$

tedy $F'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, ačkoliv $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

c) Je možno sestrojit příklad funkce $f \in R(\langle a,b \rangle)$, aby f byla nespojitá v bodě $x_0 \in (a,b)$ a

$$F'(x_0) = f(x_0) \quad (F(x) = \int_a^x f) \ ?$$

(D)* Ukažte, že nemusí platit implikace:

$$f \text{ má primitivní funkci v } \langle a,b \rangle \Longrightarrow f \in R\,(\langle a,b \rangle).$$

Bude platit tato implikace, přidáme-li podmínku, aby f byla omezená na $\langle a,b \rangle$ (těžší problém - viz třeba $[\mathcal{T}]$, př. 8.54)?

$\boxed{1.28}$ **Věta.** Nechť $f \in R(\langle a,b \rangle)$, $F : x \longrightarrow \int_a^x f$, $x \in \langle a, b \rangle$. Nechť k funkci f existuje primitivní funkce G na intervalu $\langle a,b \rangle$ (podstatný předpoklad!!). Potom

$$G(x) = G(a) + F(x) = G(a) + \int_a^x f$$

pro všechna $x \in \langle a,b \rangle$.

Tedy funkce $\int_a^x f$ je primitivní funkce k funkci f na $\langle a,b \rangle$, tj. $\left(\int_a^x f\right)' = f(x)$ pro všechna $x \in \langle a,b \rangle$. Speciálně též

$$\int_a^b f = G(b) - G(a) .$$

Důkaz. Pro $x = a$ platí rovnost $G(x) = G(a) + F(x)$, buď tedy $x \in (a,b \rangle$. Zvolíme-li dělení $D = \left\{ a = y_0 < y_1 < \dots < y_n = x \right\} \in \mathcal{D}(\langle a,x \rangle)$, potom

$$G(x) - G(a) = \sum_{i=1}^{n} \left(G(y_i) - G(y_{i-1}) \right) =$$

$$= \sum G'(\xi_i)(y_i - y_{i-1}) = \sum f(\xi_i) \cdot (y_i - y_{i-1}) = \sigma(f;D;\xi_1, \dots, \xi_n),$$

kde $\xi_i \in (y_{i-1}, y_i)$ (použili jsme větu o přírůstku funkce).

Buď nyní $D_n \in \mathcal{D}(\langle a,x \rangle)$ posloupnost dělení s $\lim \nu(D_n) = 0$; potom pro příslušnou posloupnost σ_n platí podle 1.24

$$\lim \sigma_n = \int_a^b f ,$$

tedy $G(x) - G(a) = \int_a^x f$.

Ostatní tvrzení jsou již snadným důsledkem.

$\boxed{1.29}$ **Poznámky.**

(A) Rovnost (R) $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ platí tedy za těchto předpokladů:

1) $f \in R(\langle a,b\rangle)$,

2) F je primitivní funkce k f na $\langle a,b\rangle$.

(B) Nechť F' existuje v intervalu $\langle a,b\rangle$, potom

$$F(x) = F(a) + R\int_a^x F' \Longleftrightarrow F' \in R(\langle a,b\rangle)!!$$

(C) Nechť $f \in R(\langle a,b\rangle)$, $F : x \longrightarrow \int_a^x f$, $x \in \langle a,b\rangle$. Nechť k funkci f existuje primitivní funkce G na otevřeném intervalu (a,b), nechť existují vlastní $\lim_{x\to a+} G(x)$, $\lim_{x\to b-} G(x)$. Položme $G(b) = \lim_{x\to b-} G(x)$, $G(a) = \lim_{x\to a+} G(x)$. Potom $G(x) = G(a) + F(x)$ pro všechna $x \in \langle a,b\rangle$, a tedy $\left(\int_a^x f\right)' = f(x)$ pro všechna $x \in (a,b)$. Dokažte a porovnejte s 1.28!

Návod. Zvolte stejný postup jako při důkazu 1.28.

(D) Vyslovte věty obdobné větám 1.26, 1.28 též pro $\int_x^b f$!

G. ZMĚNA INTEGROVANÉ FUNKCE

1.30 Formulace problému

Je dána funkce $f \in R(\langle a,b\rangle)$ a množina $A \subset \langle a,b\rangle$. V bodech množiny A změňme libovolně hodnoty funkce f a takto nově definovanou funkci označme f_A. Hledáme nyní nutné a postačující podmínky k tomu, aby platila implikace

$$f \in R(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow f_A \in R(\langle a,b\rangle) \text{ a } \int_a^b f = \int_a^b f_A .$$

Zřejmě nutnou podmínkou je, aby funkce f_A byla omezená na intervalu $\langle a,b\rangle$.

1.31 Věta. Buď $f \in R(\langle a,b\rangle)$, $x_0 \in \langle a,b\rangle$. Nechť funkce $\tilde{f}$ je definována v intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť $f = \tilde{f}$ v $\langle a,b\rangle - \{x_0\}$. Potom $\tilde{f} \in R(\langle a,b\rangle)$ a

$$\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f} .$$

(V této větě jsme tedy vyšetřovali případ, kdy $A = \{x_0\}$ je jednobodová množina).

Důkaz. Označíme-li $f - \tilde{f} = g$ v $\langle a,b\rangle$, je $g = 0$ v $\langle a,b\rangle - \{x_0\}$ a obdobně jako v příkladu 1.3.c zjistíme, že $g \in R(\langle a,b\rangle)$ a $\int_a^b g = 0$.

Tedy dle věty 1.11 je $\tilde{f} = f - g \in R(\langle a,b\rangle)$ a

$$\int_a^b \tilde{f} = \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b f .$$

1.32 **Poznámky.**

(A) Indukcí můžeme zřejmě rozšířit tvrzení předchozí věty 1.31 na případ konečné množiny A .

(B) Tvrzení zřejmě neplatí již pro libovolnou spočetnou podmnožinu $A \subset \langle a,b\rangle$.

Příklad:

$\langle a,b\rangle = \langle 0,3\rangle$, A = racionální čísla v $\langle 0,3\rangle$,

$f = 0$ v $\langle 0,3\rangle$,

$$f_A : f_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \langle 0,3\rangle - A, \\ 1 & \text{pro } x \in A . \end{cases}$$

Potom $f \in R(\langle 0,3\rangle)$, $f_A \notin R(\langle 0,3\rangle)$.

$$\left(\int_0^3 f = 0 , \quad \overline{\int_0^3} f_A = 3 , \quad \underline{\int_0^3} f_A = 0 \right).$$

(C) K tomuto problému viz též cvičení 1.Q.

H. LIMITNÍ PŘECHOD ZA INTEGRAČNÍM ZNAMENÍM

1.33 **Formulace problému.** V tomto odstavci se budeme zabývat následujícím problémem.

Je dána posloupnost $f_n \in R(\langle a,b\rangle)$, nechť $f_n \to f$ na $\langle a,b\rangle$. Ptáme se, za jakých podmínek platí, že

(i) $f \in R(\langle a,b\rangle)$,

(ii) $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$.

Bod (ii) můžeme přepsat jako $\lim \int_a^b f_n = \int_a^b \lim f_n$, odkud již je vidět, proč mluvíme o "limitním přechodu za integračním znamením".

Ukážeme, že obecně nemusí platit ani (i) ani (ii).

(A) Lehce sestrojíte posloupnost funkcí $f_n \in R(\langle 0,1\rangle)$ a funkci f na $\langle 0,1\rangle$ tak, aby $f_n \to f$ na $\langle 0,1\rangle$ a funkce f nebyla omezená na $\langle 0,1\rangle$. Proveďte!

Nemůže tudíž být $f \in R(\langle 0,1\rangle)$.

(B) Ukážeme, že ani v případě omezenosti funkce f na $\langle 0,1\rangle$ nemusí být $f \in R(\langle 0,1\rangle)$. Nechť $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost všech racionálních čísel intervalu $\langle 0,1\rangle$, definujme

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ , jestliže } & x \in \{r_1,\dots,r_n\} , \\ 0 \quad \text{pro} & x \in \langle 0,1\rangle - \{r_1,\dots,r_n\}. \end{cases}$$

Potom $f_n \in R(\langle 0,1\rangle)$ pro každé $n \in N$ (proč?), $f_n \to f$, kde

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{pro } x\in\langle 0,1\rangle,\ x \text{ racionální},\\ 0 & \text{pro } x\in\langle 0,1\rangle,\ x \text{ iracionální};\end{cases}$$

f je tedy Dirichletova funkce. Víme již, že $f\notin R(\langle 0,1\rangle)$.

Poznámka. Povšimněte si, že $f_n \nearrow f$ na $\langle 0,1\rangle$ (konvergence je dokonce monotonní!).

(C) Sestrojte posloupnost $f_n\in R(\langle 0,1\rangle)$ (nejlépe na základě obrázku!) tak, aby $f_n\to 0$ v $\langle 0,1\rangle$ a $\int_a^b f_n = 1$ pro každé $n\in N$. V tomto případě bude tedy splněno (i), ale nikoliv již (ii).

$\boxed{1.34}$ **Věta.** Nechť $f_n\in R(\langle a,b\rangle)$, nechť $f_n \rightrightarrows f$ v $\langle a,b\rangle$.
Potom $f\in R(\langle a,b\rangle)$ a $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$.

Je tedy stejnoměrná konvergence postačující podmínkou pro platnost (i) a (ii).

Důkaz. Podáme náznak důkazu, podrobnosti zpracujte sami! Zvolme $\mathcal{E}>0$ a nalezněme $n_o\in N$ tak, aby

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\mathcal{E}$$

pro všechna $n\geq n_o$ a všechna $x\in\langle a,b\rangle$.

(a) Ukážeme, že funkce f je na $\langle a,b\rangle$ omezená. Je-li totiž $x\in\langle a,b\rangle$, je

$$\left|f(x)\right|<\left|f_{n_o}(x)\right|+\mathcal{E}$$

a funkce f_{n_o} je omezená.

(b) Buď $n\geq n_o$, položme $g_n=f-f_n$. Potom pro libovolné dělení $D\in\mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$ je

$$S(g_n,D)-s(g_n,D)\leq 2\mathcal{E}(b-a),$$

a navíc

$$S(f_n+g_n,D)\leq S(f_n,D)+S(g_n,D),$$
$$s(f_n+g_n,D)\geq s(f_n,D)+s(g_n,D).$$

Z podmínky $f_n\in R(\langle a,b\rangle)$ plyne existence dělení $D_o\in\mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$, pro něž

$$S(f_n,D_o)-s(f_n,D_o)<\mathcal{E}.$$

Tedy

$$S(f,D_o)-s(f,D_o)=S(f_n+g_n,D_o)-s(f_n+g_n,D_o)\leq$$
$$\leq S(f_n,D_o)-s(f_n,D_o)+S(g_n,D_o)-s(g_n,D_o)<$$
$$<\mathcal{E}+2\mathcal{E}(b-a)=\mathcal{E}(1+2(b-a)),$$

což dohromady s větou 1.7 dává $f \in R(\langle a,b \rangle)$.

(c) Buď $n \geq n_0$, potom $|f_n - f| \in R(\langle a,b\rangle)$ a

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| = \left| \int_a^b (f - f_n) \right| \leq \int_a^b |f - f_n| \leq \mathcal{E}(b-a),$$

odkud již snadno plyne tvrzení.

$\boxed{1.35}$ Poznámka. Hlavní obtíž předchozího důkazu spočívala v tvrzení, že $f \in R(\langle a,b \rangle)$. Důkaz (ii) je pak již snadný.

Sami dokažte (bez použití věty 1.34!) následující větu:

"Nechť $f_n \in \mathcal{C}(\langle a,b \rangle)$, $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle a,b\rangle$. Potom

$$f \in \mathcal{C}(\langle a,b \rangle) \text{ a } \int_a^b f_n \to \int_a^b f .$$

$\boxed{1.36}$ * Poznámka. Uvedeme ještě další dvě věty pro limitní přechod u R-integrálu. Jejich důkazy jsou snadnými důsledky vět 10.13, 9.37 a 9.38 (či 18,25, 18.26) pro Lebesgueův integrál, můžete se k nim tudíž vrátit po prostudování příslušné teorie L-integrálu.

(A)* Nechť $f_n \in R(\langle a,b\rangle)$, nechť $f_n \nearrow f$ na $\langle a,b \rangle$ a nechť $f \in R(\langle a,b \rangle)$ (poslední předpoklad není zbytečný, viz 1.33.B1).

Potom $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$.

Návod k přímému důkazu.

a) Můžeme předpokládat, že $f_n \searrow 0$, $f_n \in R(\langle a,b \rangle)$; stačí dokázat, že $\lim \int_a^b f_n = 0$. Nechť $\lim \int_a^b f_n = c > 0$.

Buď $M = \sup \left\{ f_1(x) \, ; \, x \in \langle a,b\rangle \right\}$, jest $M > 0$. Položte

$$A_n = \left\{ x \in \langle a,b\rangle \, ; \, f_n(x) > \frac{c}{3(b-a)} \right\}$$

a nalezněte dělení $D_n \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$ tak, aby

$$\int_a^b f_n - s(f_n, D) < \frac{c}{3} .$$

Ukažte, že každá množina A_n obsahuje sjednocení konečně mnoha disjunktních intervalů celkové délky alespoň $\frac{c}{3M}$.

Dokážete-li, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq 0$ (nezapomeňte, že $A_{n+1} \subset A_n$), lehko již získáte spor. Důkaz, tvrzení, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq 0$ je ovšem obtížnější (lze použít buďte 9.47.f anebo tzv. Arzelovu větu - viz dále).

(B)* Nechť $f_n, f \in R(\langle a,b\rangle)$, $f_n \to f$ na $\langle a,b\rangle$.

Nechť posloupnost $\{f_n\}$ je stejně omezená, tj. nechť existuje

$K > 0$ tak, že $|f_n(x)| \leq K$ pro každé $n \in N$ a každé $x \in \langle a, b \rangle$.

Potom $\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f$.

Návod k přímému důkazu.

Vzhledem k nerovnosti $\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f|$ stačí opět předpokládat, že $f_n \geq 0$ na $\langle a,b \rangle$, $f_n \longrightarrow 0$. Nechť není $\lim \int_a^b f_n = 0$. Provedete-li negaci výroku "$\lim \int_a^b f_n = 0$", lze opět (není nikterak snadné!) použitím Arzelovy věty získat spor.

Arzelova věta: Nechť F_n je posloupnost konečných sjednocení disjunktních intervalů obsažených v $\langle a,b \rangle$, $F_n = I_n^1 \cup \ldots \cup I_n^{k_n}$ a nechť existuje $c > 0$ tak, že $\sum_{i=1}^{k_n} \mathrm{vol}(I_n^i) > c$ pro každé n +). Potom existuje $x \in \langle a,b \rangle$ náležející jisté podposloupnosti F_n (tj. existuje posloupnost n_k tak, že $\bigcap F_{n_k} \neq \emptyset$, jinými slovy $\limsup F_n \neq \emptyset$).

I. CVIČENÍ A PROBLÉMY

1.A Definujme funkce f,g na $\langle 0,1 \rangle$ předpisem:

$$f(x) = x, \quad g(x) = x^2.$$

Ukažte přímo pomocí definice, že $f,g \in R(\langle 0,1 \rangle)$ a

$$\int_0^1 f = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 g = \frac{1}{3}.$$

Návod. Ukažte, že $s(f,D) \leq \frac{1}{2} \leq S(f,D)$ pro každé $D \in \mathcal{D}(\langle 0,1 \rangle)$. Dále využijte toho, že pro dělení D_n intervalu $\langle 0,1 \rangle$ na n stejných dílků je $S(f,D_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$, $s(f,D_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$.

1.B Je-li P polynom na intervalu $\langle a,b \rangle$, potom $P \in R(\langle a,b \rangle)$. Za jakých předpokladů může racionální funkce v $\langle a,b \rangle$ ležet v $R(\langle a,b \rangle)$?

1.C Buď $f \in R(\langle a,b \rangle)$; předpokládejme, že $f \geq 0$ v $\langle a,b \rangle$ a nechť funkce f je v jistém bodě $c \in \langle a,b \rangle$ spojitá a kladná ($f(c) > 0$). Potom $\int_a^b f > 0$, dokažte!

Speciálně, je-li $f \in C(\langle a,b \rangle)$, $f \geq 0$ v $\langle a,b \rangle$, $\int_a^b f = 0$, potom $f = 0$ v $\langle a,b \rangle$.

+) vol I znamená délku intervalu I

27571 P3

1.D Nechť funkce f je spojitá a kladná v intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom funkce $F : x \longmapsto \int_a^x f$, $x \in \langle a,b\rangle$ je v intervalu $\langle a,b\rangle$ rostoucí, dokažte!

1.E Nechť $f \in \mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$. Potom existuje $c \in \langle a,b\rangle$ tak, že

$$\int_a^b f = f(c)\,(b-a)\,.$$

Dokažte! (viz též větu 3.16).

Platí toto tvrzení i pro $f \in R(\langle a,b\rangle)$?

1.F Zkoumejte otázku limitního přechodu za integračním znamením (viz 1.33) pro následující posloupnosti funkcí:

(a) $f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{x^i}{i^2}\,, \quad x \in \langle 0,1\rangle\,,$

(b) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}\,, \quad x \in \langle 0,1\rangle\,,$

(c) $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{n}\,, & \text{je-li } x \in \langle 0,1\rangle \text{ racionální,} \\ 0\,, & \text{je-li } x \in \langle 0,1\rangle \text{ iracionální,} \end{cases}$

(d) $f_n(x) = nx(1-x^2)^n\,, \quad x \in \langle 0,1\rangle\,.$

1.G Nechť $f_n \in \mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$, $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle a,b\rangle$.

(a) Definujeme-li

$$F_n(x) = \int_a^x f_n\,, \quad F(x) = \int_a^x f\,, \quad x \in \langle a,b\rangle,$$

je $F_n \rightrightarrows F$ na $\langle a,b\rangle$. Ukažte!

(b) Je-li navíc $g \in \mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$, potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n g = \int_a^b fg\,.$$

1.H Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 0 \\ x \cdot \left[\dfrac{1}{x}\right] & \text{pro } x \in (0,1\rangle \end{cases}$$ ($[z]$ je celá část z).

Ukažte, že $f \in R(\langle 0,1\rangle)$ a spočtěte $\int_0^1 f$!

1.I (a) Buď $f \in \mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$ nezáporná, položme

$$a_n = \left(\int_a^b f^n\right)^{1/n}$$

Dokažte, že $\lim a_n = \sup\left\{ f(x)\,;\; x \in \langle a,b\rangle\right\}$.

Platí tvrzení i pro nezápornou $f \in R(\langle 0,1\rangle)$?

27571 Z3

(b) Pro $f \in R(\langle 0,1\rangle)$ položme

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

Ukažte, že $\lim b_n = \int_0^1 f$. Není-li $f \in R(\langle 0,1\rangle)$, může, ale nemusí posloupnost $\{b_n\}$ konvergovat.
Uveďte příklady!

1.J Jiné definice R-integrálu

V celém odstavci předpokládejme, že f je omezená funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$. Je-li $D = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ dělení intervalu $\langle a,b\rangle$, označme symbolem $I(D)$ systém všech n-tic $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ takových, že

$x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le \dots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n$. Dále položme

$$\sigma(f,D,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

(a) Věta. Funkce $f \in R(\langle a,b\rangle)$, právě když existuje $K \in E_1$ tak, že je splněna podmínka.

(*) "Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D_0 \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$ tak, aby

$$\left|\sigma(f,D,\xi) - K\right| < \varepsilon,$$

kdykoliv dělení D je zjemnění D_0 ($D_0 \subset D$) a $\xi \in I(D)$".

Je-li podmínka splněna, potom $K = \int_a^b f$.

Návod k důkazu. Je-li $f \in R(\langle a,b\rangle)$, položte $K = \int_a^b f$ a ukažte, že podmínka (*) je splněna (uvědomte si, že $s(f,D) \le \sigma(f,D,\xi) \le S(f,D)$ pro $\xi \in I(D)$ a použijte 1.4 a 1.7). Nechť naopak podmínka (*) platí. Ukažte, že $f \in R(\langle a,b\rangle)$ a $K = \int_a^b f$ (je-li $D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$, $\varepsilon > 0$, nalezněte $\xi_1, \xi_2 \in I(D)$ tak, aby $S(f,D) < \varepsilon + \sigma(f,D,\xi_1)$, $s(f,D) > \sigma(f,D,\xi_2) - \varepsilon$ a použijte (*)).

(b) Věta. Funkce $f \in R(\langle a,b\rangle)$, právě když existuje $L \in E_1$ tak, že je splněna podmínka:

(**) "Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\left|\sigma(f,D,\xi) - L\right| < \varepsilon,$$

kdykoliv $\nu(D) < \delta$, $\xi \in I(D)$".

Návod k důkazu. Postupujte obdobně jako v (a), použijte 1.23, resp. důkaz věty 1.23.

Uvědomte si v čem tkví rozdíl vět (a),(b)!

(c) Dokažte větu z poznámky 1.25!

(d) Použijte podmínek (*) a (**) k definici R-integrálu a na základě této definice odvoďte některé jeho základní vlastnosti!

1.K * R-integrál jako limita zobecněných posloupností

Uvedeme ještě jednu zajímavou definici R-integrálu. K ní však potřebujeme vybudovat teorii tzv. zobecněných posloupností.

(a) Definice. Usměrněným souborem nazveme dvojici $(A, \preceq)$, kde A je množina a $\preceq$ je binární relace uspořádání (usměrnění) na A taková, že:

(i) $a,b,c \in A,\ a \preceq b,\ b \preceq c \Longrightarrow a \preceq c$,

(ii) $a \in A \Longrightarrow a \preceq a$,

(iii) $a,b \in A \Longrightarrow$ existuje $c \in A$ tak, že $a \preceq c,\ b \preceq c$.

Příklady

(1) Množina všech přirozených čísel s "normálním" uspořádáním.

(2) Množina reálných čísel s "přirozeným" uspořádáním.

(3) Množina všech okolí $\left\{ \mathcal{U}^{\varepsilon}(x)\ ;\ \varepsilon > 0 \right\}$ bodu x v metrickém prostoru s uspořádáním daným inklusí.

(4) Množina všech dělení intervalu $\langle a,b \rangle$ s uspořádáním:

$$D_1 \preceq D_2 \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} D_2 \text{ je zjemnění } D_1 \text{ tj. } (D_1 \subset D_2).$$

(5) Množina všech dělení intervalu $\langle a,b \rangle$ s uspořádáním

$$D_1 \preceq^{*} D_2 \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \nu(D_1) \geq \nu(D_2).$$

(b) Definice. Zobecněnou posloupností nazýváme trojici $(F,A,\preceq)$, kde $(A, \preceq)$ je usměrněný soubor a $F: A \to E_1$ je reálná funkce na A.

Příklady

(1) Každá reálná posloupnost je zobecněná posloupnost.

(2) Buď f omezená funkce na $\langle a,b \rangle$, nechť $F(D) = S(f,D)$ znamená horní součet funkce f příslušný dělení D, potom

$$(F, \mathcal{D}(\langle a,b \rangle), \preceq),\quad (F, \mathcal{D}(\langle a,b \rangle), \preceq^{*})$$

jsou zobecněné posloupnosti, definujeme-li $\preceq$ či $\preceq^{*}$ jako v předchozím odstavci.

(c) Definice. Buď $(F,A,\preceq)$ zobecněná posloupnost, $y \in E_1$. Říkáme, že $(F,A,\preceq)$ konverguje k y (píšeme $\lim (F,A,\preceq) = y$), jestliže "Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $a_0 \in A$ tak, že pro každé $a \in A$, $a_0 \preceq a$ platí $|F(a) - y| < \varepsilon$."

Odvoďte sami základní vlastnosti zobecněných limit (existence, jednoznačnost, limita součtu atd.). Ukažte,též, že teorie limit zobecněných posloupností v sobě zahrnuje speciálně teorii limit posloupností i teorii limit funkcí (ať již jednostranných či oboustranných, ale i limit v nevlastních bodech).

(d) Buď f omezená funkce na intervalu $\langle a,b \rangle$. Definujme uspořádání na množině všech dělení $\mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$ podle a.4 (tj. $D_1 \preceq D_2$, jestliže $D_1 \subset D_2$).
Potom

$$\lim \left(S(f,D),\ \mathcal{D}(\langle a,b \rangle),\ \preceq \right) = (R) \overline{\int_a^b} f\,,$$

$$\lim \left(s(f,D),\ \mathcal{D}(\langle a,b \rangle),\ \preceq \right) = (R) \underline{\int_a^b} f\,.$$

Dále ukažte, že $f \in R(\langle a,b \rangle)$, právě když zobecněná posloupnost $\left(S(f,D) - s(f,D)\ ,\ \mathcal{D}(\langle a,b \rangle),\ \preceq \right)$ konverguje k nule.

(e) Věta. Nechť f je omezená funkce na $\langle a,b \rangle$. Buď $A = \left\{ [D, \xi]\ ;\ D \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle),\ \xi \in I(D) \right\}$ (viz 1.J).
Definujeme relaci $\preceq$ na množině A vztahem:

$$[D_1, \xi] \preceq [D_2, \eta]\,, \text{ jestliže } D_1 \subset D_2\,.$$

Dále definujeme funkci F_f na množině A vztahem

$$F_f\left([D, \xi]\right) = \sigma(f, D, \xi) \qquad \text{(opět viz 1.J).}$$

Ukažte, že $(F_f, A, \preceq)$ je zobecněná posloupnost a $f \in R(\langle a,b \rangle)$, právě když $(F_f, A, \preceq)$ konverguje. (V tomto případě pak $\lim (F_f, A, \preceq) = \int_a^b f$.)

Návod. Použijte větu z 1.J.a.

(f) Věta. Buďte opět f, F_f, A jako v předchozím odstavci.
Definujme na množině A uspořádání $\preceq^*$ předpisem

$$[D_1, \xi] \preceq^* [D_2, \eta]\,, \text{ jestliže } \nu(D_2) \le \nu(D_1).$$

Ukažte, že $(F_f, A, \preceq^*)$ je zobecněná posloupnost a $f \in R(\langle a,b \rangle)$, právě když $(F_f, A, \preceq^*)$ konverguje (a opět $\lim (F_f, A, \preceq^*) = \int_a^b f$).

Návod. Při důkazu použijte větu z 1.J.b.

(g) Uvědomte si rozdíl mezi větami z odstavců (e) a (f) !

(h) Použijte vět z odstavců (e) či (f) k definici R-integrálu a pomocí ní odvoďte některé jeho základní vlastnosti!

(i) Definujme množinu A a relace $\preceq$ či $\preceq^*$ jako v (e) či (f).
Buď F reálná funkce na A (ne nutně funkce $\sigma(f, D, \xi)$!).
Jestliže $\lim (F, A, \preceq^*) = y$, potom i $\lim (F, A, \preceq) = y$. Dokažte !

(j) Buď $\langle a,b \rangle = \langle 0,1 \rangle$, definujme funkci $F = F\left([D,\xi]\right)$ $\left(D = \left\{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\right\}, \ \xi = \left(\xi_1, \ldots, \xi_n\right) \in I(D)\right)$ vztahem

$$F\left([D,\xi]\right) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } x_i = \frac{1}{2} \text{ pro nějaké } i,\ 1 \leq i \leq n-1, \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Ukažte, že $\lim (F, A, \preceq) = 1$ a že $(F, A, \preceq^*)$ nekonverguje.

(k) Uvědomte si, že ve speciálním případě $F = \sigma(f, D, \xi)$ z konvergence $(F, A, \preceq)$ již vyplynula konvergence $(F, A, \preceq^*)$!

1.L Nulové množiny

Pro potřeby dalšího odstavce je nutné zavést pojem tzv. (lebesguovsky) nulových množin. Podrobněji se s tímto pojmem setkáte až v teorii L-integrálu (viz 9.25 či kap.14). Množina $N \in E_1$ se nazývá <u>nulová</u>, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ můžeme nalézt posloupnost intervalů $\left\{(a_n, b_n)\right\}$ tak, aby

(i) $\quad N \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$,

(ii) $\quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$.

Dokazujte následující tvrzení.

(A) Každá konečná množina v E_1 je nulová.

(B) Množina racionálních čísel je nulová.

(C) Interval $(1,4)$ není nulová množina.

(D) Je-li N nulová, $M \subset N$, potom i M je nulová.

(E) Je-li $\left\{N_n\right\}$ posloupnost nulových množin. je i množina $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ nulová.

<u>Návod.</u> Zvolte $\varepsilon > 0$; ke každému n nalezněte posloupnost intervalů $\left\{\left(a_i^n, b_i^n\right)\right\}_{i=1}^{\infty}$ tak, aby

$$N_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(a_i^n, b_i^n\right), \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left(b_i^n - a_i^n\right) < \frac{\varepsilon}{2^n} .$$

Potom systém všech intervalů $\left\{\left(a_i^n, b_i^n\right)\right\}_{i,n=1}^{\infty}$ je spočetný a vyhovuje podmínkám (i) , (ii).

(F) Každá spočetná množina je nulová.

(G) Cantorovo diskontinuum je množina nespočetná a nulová (viz $[\mathcal{T}]$, př. 5.7).

1.M * Existence R-integrálu

Víme již, že každá spojitá funkce v intervalu $\langle a,b \rangle$ je riemannovsky integrovatelná. Na druhé straně existují nespojité funkce ležící v systému $R(\langle a,b \rangle)$. Jak dalece mohou být nespojité, ukazuje následující věta.

(a) Věta. Buď f omezená funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$, nechť C_f je množina všech bodů nespojitosti funkce f v $\langle a,b\rangle$. Potom

$f \in R(\langle a,b\rangle)$, právě když množina C_f je nulová.

Návod k důkazu.

(A) Pro $n \in N$ buď

$$A_n = \left\{ x \in \langle a,b\rangle \,;\ \text{ke každému } \delta > 0 \text{ existují } s,t \in (x-\delta, x+\delta) \cap \langle a,b\rangle \text{ tak, že } \left| f(s) - f(t) \right| > \frac{1}{n} \right\}$$

Ukažte, že $C_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

(B) Množina C_f je nulová, právě když každá množina A_n je nulová.

(C) Každá množina A_n je kompaktní (ukažte, že množina hromadných bodů A_n je částí A_n ; odtud vyplyne, že A_n je uzavřená).

(D) Buď $n \in N$; $\varepsilon > 0$ a $f \in R(\langle a,b\rangle)$.
Podle věty 1.7 nalezněte dělení $D = \left\{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b \right\}$ tak, aby

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x) - \inf_{x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x) \right) . (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{n} .$$

Nalezněte nyní $\xi, \eta \in I(D)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$ (viz označení v 1.J) tak, aby

$$f(\xi_i) \geq f(\eta_i) \quad \text{pro každé } i = 1, \dots, k,$$

$$f(\xi_i) \geq f(\eta_i) + \frac{1}{n}, \quad \text{jestliže } (x_{i-1}, x_i) \cap A_n \neq \emptyset ,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \big(f(\xi_i) - f(\eta_i) \big) . (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{n} .$$

Odtud již lehko vyplyne, že množina A_n je nulová.

(E) Nechť množina C_f je nulová. Předpokládejme, že $K = \left\{ \sup \left| f(x) \right| ; x \in \langle a,b\rangle \right\} > 0$. Zvolte $\varepsilon > 0$. Nalezněte $n > \frac{2(b-a)}{\varepsilon}$ a posloupnost intervalů $\left\{ (a_i, b_i) \right\}$ tak, aby

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \supset A_n , \quad \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \frac{\varepsilon}{4K}.$$

Využijte kompaktnosti A_n a nalezněte body $y_0 < y_1 < \dots < y_{2p} < y_{2p+1}$ tak, aby

$$\bigcup_{j=0} (y_{2j}, y_{2j+1}) \supset A_n , \quad \sum_{j=0}^{p} (y_{2j} - y_{2j-1}) < \frac{\varepsilon}{4K} .$$

Nalezněte nyní dělení množiny $\langle a,b\rangle - \bigcup_{j=0}^{p} (y_{2j}, y_{2j+1})$ tak, abyste ještě přidáním bodů $\left\{ y_0, \dots, y_{2p+1} \right\}$ obdrželi dělení $D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$ s vlastností $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$.

(b) Jiný důkaz této věty je popsán v $[\pi]$, dodatek D III.

(c) Pomocí této věty dokažte některé věty pro R-integrál, kupř.

$$f,g \in R(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow f+g \in R(\langle a,b\rangle) .$$

(d) Buď $f \in R(\langle a,b\rangle)$, $f \geq 0$ v $\langle a,b\rangle$, nechť $\int_a^b f = 0$. Potom množina $H = \{ x \in \langle a,b\rangle \; ; \; f(x) > 0 \}$ je nulová.
Dokažte (viz též obecnější větu 1.Q.f).

<u>Návod.</u> Ukažte, že $H \subset C_f$.

$\boxed{1.N}$ $\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$ a $R(\langle a,b\rangle)$ jako metrické prostory

(A) Pro $f,g \in \mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$ položte

$$\sigma(f,g) = \max\{ |f(x) - g(x)| \; ; \; x \in \langle a,b\rangle \}.$$

Ukažte, že $(\mathcal{C}(\langle a,b\rangle), \sigma)$ je úplný metrický prostor.

(B) Pro $f,g \in \mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$ dále položte

$$\rho(f,g) = \int_a^b |f-g| .$$

Ukažte, že definice $\rho(f,g)$ je korektní, a že $(\mathcal{C}(\langle a,b\rangle), \rho)$ je metrický prostor, který však již není úplný.

(C) Studujte vlastnosti identického zobrazení (spojitost, spojitost inverzního zobrazení) prostoru $(\mathcal{C}(\langle a,b\rangle), \sigma)$ na $(\mathcal{C}(\langle a,b\rangle), \rho)$.

(D) Pro $f,g \in R(\langle a,b\rangle)$ položte

$$\rho(f,g) = \int_a^b |f-g| .$$

Opět ukažte, že definice $\rho(f,g)$ má smysl, a že funkce ρ má následující vlastnosti

(i) $\rho(f,g) \geq 0$,

(ii) $f = g \Longrightarrow \rho(f,g) = 0$,

(iii) $\rho(f,g) = \rho(g,f)$,

(iv) $\rho(f,g) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g)$,

(v) $\rho(f,g) = 0 \;\not\Longrightarrow\; f = g$.

Tedy $(R(\langle a,b\rangle), \rho)$ není již metrický prostor (funkce ρ je pouze tzv. <u>pseudometrika</u> na $R(\langle a,b\rangle)$).

(E) Definujme relaci $\sim$ na $R(\langle a,b\rangle)$ vztahem

$$f \sim g \text{ , jestliže množina } \{x \in \langle a,b\rangle \; ; \; f(x) \neq g(x)\} \text{ je nulová.}$$

Ukažte, že vztah $\sim$ je vztahem ekvivalence na $R(\langle a,b\rangle)$.

<u>Návod.</u> Zřejmě $f \sim f$ pro každou $f \in R(\langle a,b\rangle)$ a jestliže $f \sim g$, pak i $g \sim f$. Je-li konečně $f \sim g$ a $g \sim h$, potom ze vztahu

$$\{x;\ f(x) \neq h(x)\} \subset \{x;\ f(x) \neq g(x)\} \cup \{x;\ g(x) \neq h(x)\}$$

a z vlastností nulových množin plyne, že $f \sim h$.

(F) Pro $f \in R(\langle a,b\rangle)$ označme symbolem $[f]$ množinu všech $g \in R(\langle a,b\rangle)$, $g \sim f$. Dále položme $R^*(\langle a,b\rangle) = \{[f];\ f \in R(\langle a,b\rangle)\}$.

(G) Ukažte, že pro $\hat{f} \in [f]$, $\hat{g} \in [g]$ $(f, g \in R(\langle a,b\rangle))$ platí

$$\int_a^b |f - g| = \int_a^b |\hat{f} - \hat{g}|.$$

Můžeme tedy pro $[f], [g] \in R^*(\langle a,b\rangle)$ položit

$$d([f], [g]) = \int_a^b |f - g|.$$

Ukažte, že $(R^*(\langle a,b\rangle), d)$ je metrický prostor (použijte 1.M.d !).

(H) Ukažte, že $(R^*(\langle a,b\rangle), d)$ není úplný.

Návod. Uvažujte posloupnost

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{pro } x \in \langle \frac{1}{n}, 1\rangle, \\ 0 & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{n}) \end{cases}$$

pro $\langle a,b\rangle = \langle 0,1\rangle$.

(I) Buďte $f,g \in \mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$, $g \in [f]$. Potom $f = g$ v $\langle a,b\rangle$, dokažte!

(J) Ukažte, že množina $\mathcal{C}^* = \{[f];\ f \in \mathcal{C}(\langle a,b\rangle)\}$ je hustá v $(R^*(\langle a,b\rangle), d)$.

Poznámka. Neúplnost prostoru $(R^*(\langle a,b\rangle))$, a tedy i "prostoru $R(\langle a,b\rangle)$" nás vede v dalším k vybudování teorie Lebesgueova integrálu. Nejde vlastně o nic jiného, než o zúplnění prostoru $R(\langle a,b\rangle)$. Zhruba lze říci, že riemanovsky integrovatelné funkce jsou k lebesgueovsky integrovatelným funkcím v podobném vztahu, jako racionální čísla k reálným číslům.

1.O Cvičení. Buď $f \in R(\langle a,b\rangle)$. Potom množina bodů nespojitosti funkce f je v intervalu $\langle a,b\rangle$ 1. kategorie, a tedy množina bodů spojitosti je hustá v $\langle a,b\rangle$. Dokažte!

Poznámka. Nevyplývá některé z těchto tvrzení již ze cvičení 1.M ? Tam jsme totiž ukázali, že množina bodů nespojitosti funkce f je nulová. A musí již nulová množina být 1. kategorie, či její doplněk hustý? Ujasněte si to ! (Viz též cvičení 10.H).

Návod.

Položme pro $n \in N$

$$F_n = \left\{ x_0 \in (a,b)\ ;\ \left| \limsup_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) \right| \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Ukažte, že množiny F_n jsou řídké (v opačném případě by totiž existoval interval $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a,b \rangle$ s vlastností $f \notin R(\langle \alpha, \beta \rangle)$). Nyní již lehko dojdete k závěru.

$\boxed{1.P}$* Cvičení. Buď f omezená funkce na intervalu $\langle a,b \rangle$. Pro $x \in \langle a,b \rangle$ položme

$$M_f(x) = \lim_{\delta \to 0_+} (\sup_{|x'-x| \leq \delta} f(x')),$$

$$m_f(x) = \lim_{\delta \to 0_+} (\inf_{|x'-x| \leq \delta} f(x')) .$$

Funkce M_f, m_f (které jsou na celém $\langle a,b \rangle$ korektně definovány) nazýváme horní a dolní Baireovou funkcí (příslušnou k funkci f).

Ukažte, že

(a) $m_f \leq f \leq M_f$ na $\langle a,b \rangle$,

(b) funkce M_f (resp. m_f) je polospojitá shora (resp. zdola) na $\langle a,b \rangle$

(c) f je spojitá v bodě $x \Longleftrightarrow m_f(x) = M_f(x)$.

Dále položte

$$G(f) = \left\{ [x,y] \in E_2 \ ; \ x \in \langle a,b \rangle, \ m_f(x) \leq y \leq M_f(x) \right\}$$

a dokažte, že

(d) množina $G(f)$ je uzavřená v E_2 ,

(e) $f \in R(\langle a,b \rangle) \Longleftrightarrow \lambda_2 G(f) = 0$ (kde λ_2 je Lebesgueova míra v E_2).

Návod. Použijte Fubiniovu větu, obdržíte

$$\lambda_2 G(f) = (L) \int_a^b (M_f - m_f) = (L) \int_a^b M_f - (L) \int_a^b m_f .$$

Pokuste se z (c) a (e) odvodit větu (a) v 1.M ! (Viz též $[\mathcal{T}]$, dodatek D.III.).

$\boxed{1.Q}$ Cvičení

(a) Buď $f \in R(\langle a,b \rangle)$, $f > 0$ všude v $\langle a,b \rangle$, potom

$$(R) \int_a^b f > 0 . \text{ Dokažte!}$$

Návod. Použijte 1.C a 1.M či uvažujte funkci $F(x) = \int_a^x f$.

(b) Buď $f \in R(\langle a,b \rangle)$, $f \geq 0$ v $\langle a,b \rangle$, $(R) \int_a^b f = 0$. Potom množina $H_f = \left\{ x \in \langle a,b \rangle ; f(x) > 0 \right\}$ je nulová, jak jsme ukázali již v 1.M.d.

(c) V kapitole o Lebesgueově integrálu dokážeme větu:

"$f \in \mathcal{L}(\langle a,b \rangle)$, $f \geq 0$, $(L) \int_a^b f = 0 \Longrightarrow H_f$ je nulová".

(d) Platí takováto věta:

"$f \in R(\langle a,b\rangle)$, $f \geq 0$, $(R)\int_a^b f = 0 \Longrightarrow$ množina H_f má Jordan-Peanův objem nula"?

Může mít v tomto případě množina H_f kladný Jordan-Peanův objem ?

(e) V kapitole o Lebesgueově integrálu dále dokážeme větu:

$$\text{"}f \in \mathcal{L}(\langle a,b\rangle),\quad f \geq 0,\quad H_f \text{ nulová} \Longrightarrow (L)\int_a^b f = 0\text{"},$$

platí analogická věta pro R-integrál a Jordan-Peanův objem?

(f) Dokažte větu:

"Buď $f \in R(\langle a,b\rangle)$, $f \geq 0$. Potom

$$(R)\int_a^b f > 0 \Longleftrightarrow \text{množina } H_f \text{ obsahuje interval."}$$

Návod. Nechť $\langle c,d\rangle \subset H_f$. Potom použitím (a)

$$\int_a^b f \geq \int_c^d f > 0 .$$

Nechť naopak $(R)\int_a^b f > 0$ a nechť množina $Z_f = \{ x \in \langle a,b\rangle ;\ f(x) = 0 \}$ je hustá v $\langle a,b\rangle$. Označíme-li K_f množinu bodů spojitosti funkce f, je $\langle a,b\rangle - K_f$ nulová a $K_f \subset Z_f$. Tedy množina $\langle a,b\rangle - Z_f$ je nulová a použijeme-li teorii L-integrálu, dostaneme

$$(R)\int_a^b f = (L)\int_a^b f = (L)\int_{Z_f} f + (L)\int_{\langle a,b\rangle - Z_f} f = 0 .$$

Podaří se vám vymyslet důkaz bez použití L-integrálu?

(g) Buď $f \in R(\langle a,b\rangle)$, $f \geq 0$. Potom $(R)\int_\alpha^\beta f > 0$ pro každý interval $\langle \alpha, \beta\rangle \subset \langle a,b\rangle$, právě když množina Z_f je řídká. Dokažte!

$\boxed{1.R}$ **Problém.** V 1.I.b jsme ukázali, že platí implikace:

$$\text{"}f \in R(\langle 0,1\rangle) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = (R)\int_0^1 f .\text{"}$$

Definujme nyní systém funkcí $\overset{\circ}{R}(\langle a,b\rangle)$ takto:

$$\overset{\circ}{R}(\langle a,b\rangle) = \left\{ f;\text{existuje vlastní } \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right) \right\}$$

Pro $f \in \overset{\circ}{R}(\langle a,b\rangle)$ označme hodnotu poslední limity $(\overset{\circ}{R})\int_a^b f$.

Zkoumejte vlastnosti systému $\overset{\circ}{R}(\langle a,b\rangle)$ a "integrálu" $(\overset{\circ}{R})\int_a^b f$

(vztah k R-integrálu, linearitu, monotonii, aditivitu, absolutní konvergenci a j.). Zkuste si též spočítat nějaké příklady, kupř.

$(\overset{\circ}{R}) \int_c^{\alpha} D$, kde D je Dirichletova funkce.

2. Jordan-Peanův objem

Obsah:

A. CHARAKTERISTICKÁ FUNKCE MNOŽINY

2.1. Definice charakteristické funkce

Nechť je dána libovolná množina P. Každé podmnožině $M \subset P$ přiřadíme reálnou funkci c_M definovanou na množině P (tj. $c_M : P \to E_1$) vztahem

$$c_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in M, \\ 0 & \text{pro } x \in P - M. \end{cases}$$

Funkci c_M nazveme charakteristickou funkcí množiny M; tato funkce je tedy definována tak, že v bodech množiny M nabývá hodnoty 1 a v bodech mimo množinu M hodnoty 0. Ukážeme, že funkce c_M skutečně "charakterisuje" množinu M.

Především pro libovolné množiny $M, N \subset P$ platí

$$M = N \iff c_M = c_N,$$

kteroužto ekvivalenci jistě sami lehko dokážete.

Na druhé straně, libovolná reálná funkce ψ definovaná na P a nabývající pouze hodnot 0 a 1 je charakteristickou funkcí nějaké (jednoznačně určené) množiny M, stačí totiž položit

$$M = \left\{ x \in P ; \psi(x) = 1 \right\},$$

potom zřejmě $\psi = c_M$.

Podle předešlého existuje tedy (vzájemně jednoznačné) prosté zobrazení systému všech podmnožin dané množiny P na systém všech reálných funkcí na P, nabývajících hodnot $0, 1$, realisované vztahem

$$M \longmapsto c_M, \qquad M \subset P.$$

2.2. Vlastnosti c_M

Buďte $M, N, M_n \subset P$, potom

a) $M \subseteq N \iff c_M \leq c_N$,

b) $c_{M\cup N} = \max(c_M, c_N)$, $c_{M\cap N} = \min(c_M, c_N)$, $c_{M-N} = c_M - c_{M\cap N}$,

c) $M_1 \subset M_2 \subset \dots$, $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \Longrightarrow c_{M_n} \nearrow c_M$,

d) $M_1 \supset M_2 \supset \dots$, $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \Longrightarrow c_{M_n} \searrow c_M$.

Důkaz. a) Nechť $M \subset N$; je-li $x \in M$, je i $x \in N$ a $c_M(x) = c_N(x) = 1$. Není-li $x \in M$, je $c_M(x) = 0$ a nerovnost $c_M(c) \leq c_N(x)$ platí. Obráceně, buď $c_M \leq c_N$ a zvolme $x \in M$. Potom $c_M(x) = 1$ a tedy též $c_N(x) = 1$, tj. $x \in N$.

b) Máme dokázat rovnost dvou funkcí, $c_{M\cup N} = \max(c_M, c_N)$, musíme tedy ukázat, že $c_{M\cup N}(x) = \max(c_M(x), c_N(x))$ pro každé $x \in P$. Rozlišením jednotlivých případů ($x \in M\cup N$, $x \notin M \cup N$) dostaneme lehko tvrzení.

c) Podle předchozí části je $c_{M_1} \leq c_{M_2} \leq \dots \leq c_M$. Máme ukázat, že $\lim c_{M_n}(x) = c_M(x)$ pro každé $x \in P$. Zvolme $x \in P$. Je-li $x \in M$, existuje n tak, že $x \in M_k$ pro všechna $k \geq n$, potom ovšem $c_{M_k}(x) = 1$ a $c_M(x) = 1$, tedy $\lim c_{M_n}(x) = c_M(x)$. Není-li $x \in M$, je $c_{M_n}(x) = 0$ pro všechna n , $c_M(x) = 0$ a opět tedy $\lim c_{M_n}(x) = c_M(x)$.

B. JORDAN - PEANŮV OBJEM

Uvažujme uzavřený interval $\langle a,b\rangle$. Každému intervalu $\langle a_1, b_1\rangle \subset \langle a,b\rangle$ umíme přiřadit určité číslo - jeho délku - míru, kterou označíme symbolem $\mathrm{vol}\,(\langle a_1,b_1\rangle) = b_1 - a_1$. Chtěli bychom nyní přirozeným prozšířením pojmu délka přiřadit i jiným podmnožinám $\langle a,b\rangle$ číslo, které by odpovídalo jejich "délkám" či "mírám". Jinými slovy, chceme vybrat mezi všemi podmnožinami $\langle a,b\rangle$ jistou třídu množin $\mathcal{M}$ a každé množině $A \in \mathcal{M}$ chceme přiřadit reálné číslo νA tak, aby platilo:

(I) $A \in \mathcal{M} \Longrightarrow \nu A \geq 0$,

(II) $A, B \in \mathcal{M}$; $A \subset B \Longrightarrow \nu A \leq \nu B$,

(III) $A, B \in \mathcal{M}$, $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{M}$,
$\nu(A \cup B) = \nu A + \nu B$,

(IV) $I \subset \langle a,b\rangle$ je interval (uzavřený, otevřený, polouzavřený) $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow I \in \mathcal{M}$ a $\nu I = \mathrm{vol}\, I$.

Povšimněme si faktu, že pro interval $I \subset \langle a,b\rangle$ je $c_I \in R(\langle a,b\rangle)$ a

(R) $\int_a^b c_I = \mathrm{vol}\, I$ (ukažte!).

Tento fakt nás vede k následující definici.

2.3 Definice $\mathcal{H}(\langle a,b\rangle)$ a ν.

Nechť je dán uzavřený interval $\langle a,b\rangle \subset E_1$. Označme symbolem $\mathcal{H}(\langle a,b\rangle)$ systém všech podmnožin z $\langle a,b\rangle$, pro něž jejich charakteristická funkce je riemannovsky integrovatelná v $\langle a,b\rangle$, tj.

$$\mathcal{H}(\langle a,b\rangle) = \left\{ A \subset \langle a,b\rangle ;\ c_A \in R(\langle a,b\rangle) \right\} .$$

Pro každou množinu $A \in \mathcal{H}(\langle a,b\rangle)$ položme

$$\nu A = (R) \int_a^b c_A .$$

Systému množin $\mathcal{H}(\langle a,b\rangle)$ budeme říkat systém všech jordan-peanovsky měřitelných množin v $\langle a,b\rangle$ a zobrazení ν ($\nu : \mathcal{H}(\langle a,b\rangle) \to E_1$) pak Jordan-Peanův objem, číslu νA (pro $A \in \mathcal{H}(\langle a,b\rangle)$) Jordan-Peanův objem množiny A.

2.4 Poznámka

Číslo νA a systém $\mathcal{H}(\langle a,b\rangle)$ "nezávisí" na intervalu $\langle a,b\rangle$ v následujícím smyslu: je-li $A \subset \langle a_1,b_1\rangle \cap \langle a_2,b_2\rangle$, $A \in \mathcal{H}(\langle a_1,b_1\rangle)$, je i $A \in \mathcal{H}(\langle a_2,b_2\rangle)$ a

$$\nu A = (R) \int_{a_1}^{b_1} c_A = (R) \int_{a_2}^{b_2} c_A .$$

Dokažte sami toto tvrzení použitím vět 1.18 a 1.19.

V dalším předpokládáme, že je pevně dán interval $\langle a,b\rangle \subset E_1$.

2.5 Vlastnosti $\mathcal{H}(\langle a,b\rangle)$

$(I_{\mathcal{H}})$ $\quad \emptyset,\ \langle a,b\rangle \in \mathcal{H}(\langle a,b\rangle)$,

$(II_{\mathcal{H}})$ $\quad A, B \in \mathcal{H}(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow A \cap B,\ A \cup B,\ A - B \subset \mathcal{H}$.

Dále systém $\mathcal{H}(\langle a,b\rangle)$ obsahuje všechny podintervaly intervalu $\langle a,b\rangle$ libovolného druhu a rovněž všechny jednobodové množiny v $\langle a,b\rangle$.

Důkaz.

$(I_{\mathcal{H}})$ Funkce $c_\emptyset$ je identicky rovna nule v $\langle a,b\rangle$, funkce $c_{\langle a,b\rangle}$ identicky rovna jedné, obě tedy leží v systému $R(\langle a,b\rangle)$.

$(II_{\mathcal{H}})$ Buďte $A, B \in \mathcal{H}(\langle a,b\rangle)$, potom $c_A, c_B \in R(\langle a,b\rangle)$ a tvrzení plyne z vět 2.2, 1.16.C a 1.11.

Sami dokažte (viz obdobné příklady 1.3), že charakteristická funkce intervalu či jednobodové množiny leží v $R(\langle a,b\rangle)$.

2.6 Poznámky

Systému množin, který splňuje požadavky $I_{\mathcal{N}}$, $II_{\mathcal{N}}$, se někdy říká též algebra množin (viz odstavec 13.1). Systém $\mathcal{N}(\langle a,b\rangle)$ je tedy algebra množin (v intervalu $\langle a,b\rangle$).

2.7 Vlastnosti ν.

(I_ν) $\quad A \in \mathcal{N} \Longrightarrow \nu A \geq 0$,

(II_ν) $\quad \nu\emptyset = 0$,

(III_ν) $\quad A, B \in \mathcal{N}, \quad A \subset B \Longrightarrow \nu A \leq \nu B$,

(IV_ν) $\quad A, B \in \mathcal{N}, \quad A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \nu(A \cup B) = \nu A + \nu B$.

Navíc $\nu I = \mathrm{vol}\, I$ pro každý interval $I \subset \langle a,b\rangle$ a $\nu\left(\{x\}\right) = 0$ pro každé $x \in \langle a,b\rangle$.

Důkaz.

Tvrzení plyne ihned pomocí věty 2.2 ze známých vlastností R-integrálu (použij 1.12, 1.11, 1.3).

2.8 Definice.

Každé omezené množině $A \subset E_1$ můžeme - pokud její charakteristická funkce je riemannovsky integrovatelná v nějakém uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$ obsahujícím A - přiřadit reálné číslo, Jordan-Peanův objem A, nezávisle na volbě $\langle a,b\rangle$ (viz poznámku 2.4).

Označme tudíž $\mathcal{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}(\langle -n,+n\rangle)$. Pro každou množinu $A \in \mathcal{N}$ máme definováno číslo νA. Systém $\mathcal{N}$ je systém všech omezených jordan-peanovsky měřitelných množin v E_1 a ν je Jordan-Peanův objem.

Odvoďte sami základní vlastnosti $\mathcal{N}$ a ν ! Uvědomte si, že systém $\mathcal{N}$ již netvoří algebru, ale pouze okruh !

2.9 Poznámka.

Systémy $\mathcal{N}$ a $\mathcal{N}(\langle a,b\rangle)$ jsou uzavřeny na tvoření konečných sjednocení a průniků. Naproti tomu již nejsou uzavřeny na operaci nekonečného sjednocení; Přesněji - neplatí následující implikace

$$A_n \in \mathcal{N}(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{N}(\langle a,b\rangle).$$

Příklad.

Víme již, že systém $\mathcal{N}(\langle a,b\rangle)$ obsahuje všechny jednobodové množiny. Označíme-li symbolem Q množinu všech racionálních čísel v $\langle 0,1\rangle$, je Q sjednocením spočetně mnoha množin z $\mathcal{N}(\langle 0,1\rangle)$ a $Q \notin \mathcal{N}(\langle 0,1\rangle)$ - charakteristická funkce c_Q je totiž Dirichletova funkce a ta (viz př. 1.3) není R-integrovatelná.

C. CVIČENÍ A PROBLÉMY

2.A Horní a dolní objem

Buď $A \subset E_1$ omezená množina. Existuje interval $\langle a,b \rangle$ tak, že $A \subset \langle a,b \rangle$.
Definujme

$$\nu_* A = \underline{\int_a^b} c_A \,, \qquad \nu^* A = \overline{\int_a^b} c_A$$

a nazvěme čísla $\nu_* A$, $\nu^* A$ dolním a horním Jordan-Peanovým objemem množiny A.
Ukažte, že:

(a) definice $\nu_* A$, $\nu^* A$ nezávisí na volbě intervalu $\langle a,b \rangle$,

(b) $0 \leq \nu_* A \leq \nu^* A < +\infty$ pro každou omezenou množinu $A \subset E_1$,

(c) $A \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow \nu_* A = \nu^* A$,

(d) jsou-li A, B omezené množiny, $A \subset B$, potom $\nu_* A \leq \nu_* B$, $\nu^* A \leq \nu^* B$,

(e) jsou-li A, B omezené a disjunktní, potom platí nerovnosti

$$\nu_* A + \nu_* B \leq \nu_*(A \cup B) \leq \nu_* A + \nu^* B \leq \nu^*(A \cup B) \leq \nu^* A + \nu^* B \,,$$

(f) je-li $A \subset \langle a,b \rangle$, potom

$$\nu_* A + \nu^* (\langle a,b \rangle - A) = b - a \,.$$

2.B

(a) Buď $A \subset E_1$ omezená, potom

$$(*) \qquad \nu^* A = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \operatorname{vol} I_i \,;\ \bigcup_{i=1}^{n} I_i \supset A \,,\ I_i \text{ jsou uzavřené intervaly} \right\} \,,$$

dokažte!

Návod. Jsou-li $\{I_i\}_{i=1}^n$ intervaly s uvedenou vlastností, je

$$\nu^* A \leq \nu^* \left(\bigcup_{i=1}^{n} I_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \nu^* I_i = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{vol} I_i \,.$$

Dále použijte definice horního R-integrálu.

(b) Ukažte, že vztah $(*)$ platí i v případě, kdy I_i jsou otevřené intervaly. Dále dokažte, že v $(*)$ se můžeme omezit na intervaly, které jsou po dvou disjunktní!

2.C Jiná definice $\mathcal{H}$ a ν.

Buď $A \subset E_1$ omezená množina. Definujte horní objem $\nu^* A$ podle vztahu $(*)$ v 2.B, dále definujte dolní objem $\nu_* A$ podle 2.A.f (Ukažte, že definice $\nu_* A$ nezávisí na volbě intervalu $\langle a,b \rangle$!).

Položte

$$\mathcal{H} = \left\{ A \subset E_1 ;\ A \text{ je omezená, } \nu_* A = \nu^* A \right\} ,$$

pro $A \in \mathcal{M}$ buď $\nu A = \nu_* A \ (= \nu^* A)$. Na základě těchto definic odvoďte vlastnosti $\mathcal{M}$ a ν.

Poznámka. Mnozí autoři právě tímto způsobem definují objem omezených množin v E_1 a nepotřebují k tomu tudíž teorii R-integrálu.

2.D Charakteristika $\mathcal{M}$

(a) Buď $M \in \mathcal{M}$, $E \subset E_1$ omezená. Potom

$$\nu^* E = \nu^*(E \cap M) + \nu^*(E - M). \qquad (**)$$

Dokažte!

Návod. Ze vztahu $E = (E \cap M) \cup (E - M)$ použitím 2.A.e dostanete
$\nu^* E \leq \nu^*(E \cap M) + \nu^*(E - M)$.

Na druhé straně (opět použitím 2.A.e)

$$\nu^* E + \nu M \geq \nu^*(E \cup M) + \nu^*(E \cap M) \geq \nu^*(E - M) + \nu M + \nu^*(E \cap M).$$

(b) Buď $M \subset E_1$ omezená. Nechť vztah $(**)$ platí pro každou omezenou množinu E, potom $M \in \mathcal{M}$. Dokažte!

Návod. Nechť $M \subset \langle a,b \rangle$, potom z $(**)$ plyne (volíme $E = \langle a,b \rangle$)
$b - a = \nu^* M + \nu^*(\langle a,b \rangle - M)$,
tudíž $\nu_* M = \nu^* M$ (použili jsme 2.A.f).

Poznámka. Máme tedy výsledek:

$M \in \mathcal{M}$, právě když vztah $(**)$ platí pro každou omezenou množinu $E \subset E_1$.

Definujte horní objem ν^* podle 2.B a systém $\mathcal{M}$ použitím $(**)$. Odvoďte z této definice základní vlastnosti systému $\mathcal{M}$ a základní vlastnosti funkce ν^* uvažované pouze na systému $\mathcal{M}$ (viz též cvičení 13.J.c)

2.E Cvičení.

(a) Buď $A \subset E_1$ omezená množina. Potom $\nu^* A = \nu^* \bar{A}$ ($\bar{A}$ je uzávěr A). Dokažte !

Návod. Nechť $\{I_i\}_{i=1}^{n}$ jsou po dvou disjunktní uzavřené intervaly takové, že

$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i$. Potom $\bar{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i$. Tudíž $\nu^* \bar{A} \leq \nu^* A$ (použijte 2.B).

Obrácená nerovnost je zřejmá.

(b) Nechť $A \in \mathcal{M}$. Potom $\bar{A} \in \mathcal{M}$, dokažte!

Návod. Použijte nerovnosti

$$\nu_* A \leq \nu_* \bar{A} \leq \nu^* \bar{A} \leq \nu^* A .$$

(c) Platí implikace: $\bar{A} \in \mathcal{M} \Longrightarrow A \in \mathcal{M}$?

(d) Buď $C \subset \langle 0,1 \rangle$ Cantorovo diskontinuum. Potom $C \in \mathcal{M}$ a $\nu C = 0$. Dokažte!

27571 Z4

(e)* Buď $B \in \mathcal{N}$ perfektní, řídká množina. Potom $\nu B = 0$. Dokažte!

Návod. Ukažte, že $\nu_* B = 0$.

(f)* Lze některý z předpokladů o množině B v (e) ($B \in \mathcal{N}$, perfektnost, řídkost) vynechat?

2.F Cvičení.

Nechť $K \subset E_1$ je kompaktní nulová množina (viz 1.L).
Potom je $K \in \mathcal{N}$ a $\nu K = 0$. Dokažte!

Návod. Použijte definice nulové množiny, Borelovu pokrývací větu a 2.B.

2.G* Ještě charakteristika $R(\langle a, b \rangle)$.

Buď f omezená funkce v intervalu $\langle a,b \rangle$, nechť C_f je množina všech bodů nespojitosti funkce f v intervalu $\langle a,b \rangle$. Potom

$f \in R(\langle a,b \rangle)$, právě když existují uzavřené množiny

F_n objemu nula tak, že $C_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Návod k důkazu. Použijeme cvičení 1.M. Tam jsme ukázali, že $C_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, kde A_n jsou kompaktní množiny. Má-li každá množina A_n nulový objem, je též nulová a tudíž i C_f je nulová. Obráceně, je-li C_f nulová, je každá množina A_n nulová. Nyní stačí použít 2.F.

2.H Problém.

V souvislosti s předchozími cvičeními lze formulovat následující problém: "Je každá nulová množina v E_1 (viz 1.L) sjednocením spočetně mnoha množin objemu nula?"

II. NEWTONŮV INTEGRÁL

3. Newtonův integrál

Obsah:

A. DEFINICE NEWTONOVA INTEGRÁLU

3.1 Definice. Nechť funkce f je definována v intervalu $(a,b) \subset E_1$.
Nechť

(i) existuje primitivní funkce F k funkci f v (a,b),

(ii) existují vlastní limity $\lim\limits_{x \to b_-} F(x)$, $\lim\limits_{x \to a_+} F(x)$.

Newtonův integrál funkce f přes interval (a,b) definujeme vztahem

$$(N) \int_a^b f = \lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x) .$$

Systém všech funkcí splňujících (i) a (ii) značme $N((a,b))$.

Místo $(N)\int_a^b$ pišme též $\int_a^b$, nehrozí-li nedorozumění; říkejme také krátce N-integrál.

3.2 Poznámky.

(A) Ukažte, že definice $(N)\int_a^b f$ nezávisí na volbě primitivní funkce F.

(B) Místo výrazu $\lim\limits_{x \to b_-} F(x) - \lim\limits_{x \to a_+} F(x)$ používáme též symbolů
$\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$, $\Big[F\Big]_a^b$.

(C) Je-li F primitivní funkce k funkci f v $\langle a,b \rangle$, potom
$f \in N((a,b))$ a $(N)\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

(D) Je-li f spojitá v $\langle a,b\rangle$, potom $f \in N((a,b))$. Ukažte!

3.3 Poznámka. Má-li funkce f mít v (a,b) N-integrál, musí mít především v tomto intervalu primitivní funkci. Tudíž (viz [Re-Pr], referát 1, odst.3)

(A) funkce f musí být na intervalu (a,b) darbouxovská,

(B) funkce f musí být na intervalu (a,b) funkcí Baireovy první třídy, speciálně:
množina bodů spojitosti funkce f musí být v intervalu (a,b) hustá.

Podmínky (A) a (B) jsou tedy nutnými (ale nikoliv postačujícími) podmínkami k tomu, aby funkce f ležela v systému $N((a,b))$. Zkoumejte existenci N-integrálu pro funkce z odstavce 1.3!

3.4 Věta (vztah R a N-integrálu).

Je-li $f \in R(\langle a,b\rangle) \cap N((a,b))$, je $(R)\int_a^b f = (N)\int_a^b f$.

Důkaz. Nechť F je primitivní funkce k f v (a,b); dodefinujme F spojitě v bodech a,b. Podle 1.29.c je

$$(R)\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Ale podle naší definice je $(N)\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Poznámka.

Uvědomte si, že N-integrál může existovat i pro neomezené funkce (rovněž tak připouštíme i neomezené intervaly). Není tedy $N((a,b)) \subset R(\langle a,b\rangle)$, stačí vzít kupř. funkci $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na intervalu $(0,1)$. Potom

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \in N((0,1))$ (čemu je roven $(N)\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$?), a ať dodefinujeme funkci $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ v bodech 0,1 jakkoliv, nikdy nemůže tato funkce ležet v systému $R(\langle 0,1\rangle)$.

Lze dokázat, že existují i omezené funkce na intervalu $\langle 0,1\rangle$, které tam mají N-integrál a nemají R-integrál. Ale to je již těžší, viz kupř. [$\mathcal{T}$], př. 8.54.

Obráceně, není ani $R(\langle a,b\rangle) \subset N((a,b))$. Jako příklad poslouží funkce z 1.3.c či 1.3.d.

B. ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI N-INTEGRÁLU

3.5 Věta (linerita N-integrálu).

Nechť $f,g \in N((a,b))$, $\alpha, \beta \in E_1$. Potom

$$\alpha f + \beta g \in N((a,b)) \quad \text{a}$$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g .$$

(Všechny integrály - i v dalším - chápeme pochopitelně jako Newtonovy).

Důkaz. Buďte F,G primitivní funkce k f,g v (a,b) splňující podmínku (ii) z definice 3.1. Potom funkce $\Phi = \alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k funkci $\alpha f + \beta \cdot g$ v (a,b) a též splňuje podmínku (ii).

Tvrzení plyne ze vztahů

$$\lim_{x\to a_+} \Phi(x) = \alpha \lim_{x\to a_+} F(x) + \beta \lim_{x\to a_+} G(x)$$

$$\lim_{x\to b_-} \Phi(x) = \alpha \lim_{x\to b_-} F(x) + \beta \lim_{x\to b_-} G(x).$$

3.6 Věta (monotonie N-integrálu).

Nechť $f,g \in N((a,b))$, $f \leq g$ na (a,b). Potom $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Speciálně $\int_a^b f \geq 0$, jestliže $f \geq 0$ v (a,b) a $f \in N((a,b))$.

Důkaz. Nechť $f \in N((a,b))$, $f \geq 0$ v (a,b). Buď F primitivní funkce k f na (a,b). Potom $F' = f \geq 0$ v (a,b), tudíž F je neklesající v (a,b). Odtud plyne, že $\lim_{x\to b_-} F(x) \geq \lim_{x\to a_+} F(x)$. V obecném případě aplikujte právě dokázané na funkci $g - f$.

3.7 Poznámky.

Poznamenejme, že neplatí (na rozdíl od R-integrálu) následující implikace:

(a) $f \in N((a,b)) \Longrightarrow |f| \in N((a,b))$ (příklad uvedeme později, viz 3.21), lze tedy říci, že N-integrál je neabsolutně konvergentní,

(b) $f,\ g \in N((a,b)) \Longrightarrow f.g \in N((a,b))$ (položte $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na $(0,1)$).

3.8 Věta (N-integrál jako funkce intervalu).

Nechť $f \in N((a,b))$, $a<c<b$. Potom $f \in N((a,c))$, $f \in N((c,b))$ a

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f .$$

(Viz poznámku o korektnosti v 1.18!).

Důkaz. Nechť F je primitivní funkce k f v (a,b) splňující (ii). Potom je F primitivní funkcí k f i v (a,c) a $\lim\limits_{x\to c_-} F(x) = F(c)$. Tedy $f \in N((a,c))$. Obdobně $f \in N((c,b))$ a

$$\int_a^b f = \left[F\right]_a^b = (\lim_{x\to b_-} F(x) - F(c)) + (F(c) - \lim_{x\to a_+} F(x)) = \int_a^c f + \int_c^b f .$$

3.9 Věta (N-integrál jako funkce intervalu).

Buď $f \in N((a,c))$, $f \in N((c,b))$, nechť funkce f je spojitá v bodě c. Potom $f \in N((a,b))$ a $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Poznámka. Předpoklad spojitosti funkce f v bodě c nelze vynechat, Uveďte příklad! Tento trochu nepříjemný předpoklad odstraníme až zavedením zobecněného N-integrálu v kapitole 4.

Důkaz. Stačí pouze dokázat, že $f \in N((a,b))$, rovnost integrálů pak vyplyne z předchozí věty. Nechť F_1 (resp. F_2) je primitivní funkce k f v (a,c) (resp. (c,b)), nechť $\gamma_1 = \lim\limits_{x\to c_-} F_1(x)$, $\gamma_2 = \lim\limits_{x\to c_+} F_2(x)$. Položme

$$F = \begin{cases} F_1 & \text{v intervalu } (a,c), \\ \gamma_1 & \text{v bodě } c, \\ F_2 + (\gamma_1 - \gamma_2) & \text{v } (c,b). \end{cases}$$

Potom $F' = f$ určitě v $(a,c) \cup (c,b)$. Ale

$$F'_-(c) = \lim_{t\to c_-} F'(t) = \lim_{t\to c_-} f(t) = f(c) ,$$

(kterých vět používáme?), obdobně $F'_+(c) = f(c)$. Tedy $F' = f$ v (a,b). Odtud již snadno vyplyne, že $f \in N((a,b))$ (proveďte do konce!).

3.10 Věta (N-integrál jako funkce horní meze).

Buď $f \in N((a,b))$, $\Phi : x \to \int_a^x f$ pro $x \in (a,b)$. Potom Φ je primitivní funkce k funkci f v (a,b), tj. $\left((N)\int_a^x f\right)' = f(x)$ pro $x \in (a,b)$.

(Porovnejte obdobnou vlastnost R-integrálu, viz větu 1.26).

Důkaz. Nechť F je primitivní funkce f v (a,b). Potom

$$\int_a^x f = F(x) - \lim_{t\to a_+} F(t)$$

pro každé $x \in (a,b)$. Tudíž $\int_a^x f$ je primitivní funkce k f v (a,b).

C. METODY VÝPOČTU N-INTEGRÁLU

V tomto odstavci ukážeme konkrétní metody pro výpočet Newtonových integrálů. Jsou víceméně založeny na základních vlastnostech primitivních funkcí.

3.11 Věta (integrace per partes pro N-integrály).

Nechť funkce f, g mají v intervalu (a,b) primitivní funkce F, G. Potom

$$(N) \int_a^b Fg = \left[F\,G \right]_a^b - (N) \int_a^b f\,G \qquad (*),$$

mají-li v této rovnosti alespoň dva ze tří výrazů smysl.

Důkaz. 1. Předpokládejme zprvu, že Fg, $fG \in N((a,b))$. Existují tedy k funkcím Fg, fG v intervalu (a,b) primitivní funkce ψ, Φ a tyto funkce mají vlastní limity v krajních bodech intervalu (a,b). Dále můžeme nalézt $c \in E_1$ (proč?) tak, aby

$$F\,G = \psi + \Phi + c \quad v\ (a,b)\,.$$

Odtud plyne, že existují vlastní $\lim\limits_{x\to a_+} F\,G(x)$, $\lim\limits_{x\to b_-} F\,G(x)$ a

$$\left[FG\right]_a^b = \left[\psi + \Phi + c\right]_a^b = \left[\psi\right]_a^b + \left[\Phi\right]_a^b = \int_a^b Fg + \int_a^b f\,G\,.$$

2. Předpokládejme nyní, že pravá strana uvažované rovnosti $(*)$ má smysl. Nechť θ je primitivní funkce v (a,b) k funkci fG. Lehko zjistíme, že funkce $FG - \theta$ je primitivní funkcí k funkci Fg v intervalu (a,b) $((FG - \theta)' = fG + Fg - \theta' = Fg)$ a že výraz $\left[FG - \theta\right]_a^b$ má smysl (co se tím vlastně rozumí?) Tudíž $Fg \in N((a,b))$ a podle první části důkazu platí $(*)$.

3.12 Věta (substituční metoda pro N-integrály).

Nechť funkce φ je spojitá a ryze monotonní v intervalu (α, β), nechť $\varphi((\alpha, \beta)) = (a,b)$. Dále předpokládejme, že existuje vlastní derivace φ' v (α,β) a $\varphi'(x) \neq 0$ pro každé $x \in (\alpha,\beta)$ (neplyne tento požadavek již z předpokladu ryzí monotonie φ ?). Nechť F je funkce na (a,b).
Potom

$$(N) \int_a^b F = (N) \int_\alpha^\beta (F * \varphi)\,.\,|\varphi'|,$$

existuje-li jeden z napsaných integrálů.

Důkaz. 1. Předpokládejme, že $F \in N((a,b))$ a pro určitost též, že funkce φ je rostoucí v (α,β). Existuje tedy primitivní funkce Φ k funkci F v (a,b) a vlastní $\lim\limits_{x\to a_+} \Phi(x)$, $\lim\limits_{x\to b_-} \Phi(x)$. Ze základních vět o primitivních funkcích víme, že funkce $\Phi * \varphi$ je primitivní funkcí k funkci

$(F * \varphi) . \varphi'$ v (α, β), výraz $\left[\Phi * \varphi\right]_{\alpha}^{\beta}$ má smysl a

$$\int_a^b F = \left[\Phi\right]_a^b = \left[\Phi * \varphi\right]_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} (F * \varphi) . \varphi' .$$

2. Nechť nyní $(F * \varphi) . \varphi' \in N((a,b))$ (φ opět rostoucí). Buď $\psi = \varphi^{-1}$ inverzní funkce k funkci φ. Potom ψ je rostoucí, spojitá na (a,b) a $\psi((a,b)) = (\alpha, \beta)$, přičemž

$$\psi'(t) = \frac{1}{\varphi'(\psi(t))} \quad \text{pro každé } t \in (a,b) .$$

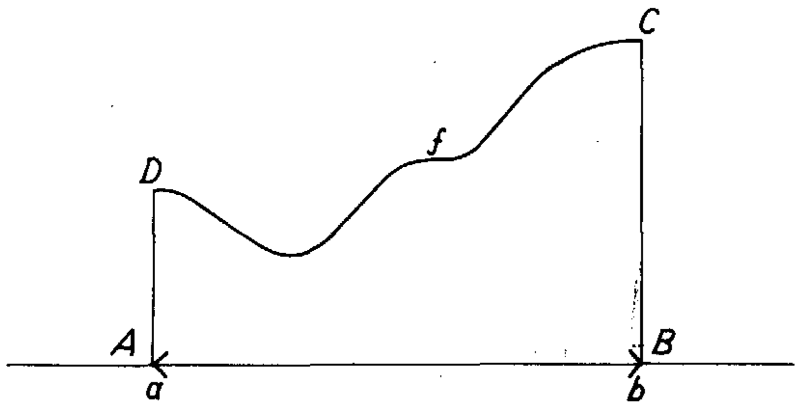
Použijeme-li již dokázanou první část, obdržíme

$$\int_{\alpha}^{\beta} (F * \varphi)\, \varphi' = \int_a^b (F * \varphi * \psi) . \varphi' * \psi . \frac{1}{\varphi' * \psi} = \int_a^b F .$$

D. INTEGRÁL A PLOCHA

$\boxed{3.13}$ V tomto odstavci ukážeme, jak zkoumání pojmu "plochy" vedlo k definici integrálu, ať již Newtonova či Riemannova. V kapitole o R-integrálu jsme viděli, jakým názorným způsobem (pomocí vepisování a opisování "obdélníčků") se došlo k definici tohoto integrálu.

Buď f spojitá a nezáporná funkce na uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$.



Zajímáme se o "plochu" obrazce ABCD, tj. o plochu

$$M(f;a,b) = \left\{ \left[x,y \right] \in E_2;\ x \in \langle a,b \rangle,\quad 0 \leq y \leq f(x) \right\} .$$

Nechť každé množině tohoto typu (tj. vlastně každé spojité nezáporné funkci na libovolném uzavřeném intervalu) umíme přiřadit reálné číslo $P(f;a,b)$ ("plochu" množiny $M(f;a,b)$) tak, že jsou splněny následující axiomy:

(P 1) : Pro každé $c \geq 0$ je $P(c;a,b) = c(b-a)$ ("plocha" obdélníka!).

(P 2) : Pro $a < c < b$ je $P(f;a,c) + P(f;c,b) = P(f;a,b)$.

(P 3) : Je-li $M(f;\alpha,\beta) \subset M(g;a,b)$ (tj. $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a,b \rangle$ a $0 \leq f \leq g$ na $\langle \alpha, \beta \rangle$) je $P(f;\alpha,\beta) \leq P(g;a,b)$.

Poznámky.

(A) Je-li f spojitá a nezáporná funkce na $\langle a,b \rangle$ a položíme-li

$$P(f;a,b) = (R)\int_a^b f ,$$

vyplývá z vlastností R-integrálu, že funkce $P(f;a,b)$ splňuje požadavky (P 1) - (P 3).

Ukažte naopak z axiomů (P 1) - (P 3), že

$$P(f;\ a,b) = (R)\int_a^b f .$$

Návod. Buď $D \in \mathscr{D}(\langle a,b \rangle)$, potom

$$s(f,D) \leq P(f;a,b) \leq S(f,D) .$$

(B) Z (P 1) a (P 3) plyne, že $P(f;\ a,b) \geq 0$.

3.14 Věta. Je-li f spojitá a nezáporná v $\langle a,b \rangle$ a položíme-li

$$F : x \longrightarrow P(f;\ a,x) , \qquad x \in \langle a,b \rangle$$

$(F(a) = 0)$, je $F' = f$ v $\langle a,b \rangle$.

Jinými slovy "plocha": $x \longrightarrow P(f;a,x)$ je primitivní funkcí k f v $\langle a,b \rangle$.

Důkaz. Buď $x_0 \in (a,b)$. Potom pro $b - x_0 > \Delta > 0$ je

$$P(f;\ a,\ x_0 + \Delta) - P(f;\ a,\ x_0) = P(f;\ x_0,\ x_0 + \Delta) \qquad \text{(podle P 2)}.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a nalezněme $\delta > 0$ tak, aby pro

$$x \in \langle x_0 , x_0 + \delta \rangle \quad (\subset \langle a,b \rangle)$$

platilo

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon .$$

Potom podle (P 3) je pro každé $h \in (0, \delta)$

$$P(f(x_0) - \varepsilon\ ;\ x_0,\ x_0 + h) \leq P(f;x_0,\ x_0 + h) \leq P(f(x_0) + \varepsilon\ ;x_0,\ x_0 + h) .$$

Odtud podle (P 1) dostáváme

$$(f(x_o) - \varepsilon) \cdot h \leq P(f;\, x_o,\, x_o + h) \leq (f(x_o) + \varepsilon) \cdot h\,,$$

tj.

$$\left| \frac{F(x_o + h) - F(x_o)}{h} - f(x_o) \right| < \varepsilon\,.$$

Tím jsme dokázali, že $F'_+(x_o) = f(x_o)$. Obdobně tvrzení dokážete pro derivaci zleva a pro body $x_o = a$, $x_o = b$.

3.15 **Poznámky.**

(A) Vidíme tedy, že $P(f;a,b) = F(b)$. Je-li funkce Φ jiná primitivní funkce k funkci f v intervalu $\langle a,b \rangle$, víme již, že $\Phi = F + \Phi(a)$ v $\langle a,b \rangle$, a tudíž

$$P(f;\, a,b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

V poslední formulce je vlastně obsažen "geometrický význam" Newtonova integrálu.

(B) Shrňme nyní uvedené výsledky a uvědomme si problematiku zavádění integrálu.

Vyšli jsme z názorného pojmu plochy $P(f;a,b)$ (f spojitá (a nezáporná) v $\langle a,b \rangle$) a pomocí vepisování a opisování "obdélníků" jsme došli k definici Riemannova integrálu. Na druhé straně, jak jsme právě viděli, "plocha" nás též vede přirozeným způsobem k definici integrálu pomocí primitivní funkce. Již víme, že pro spojité funkce dávají obě definice tutéž hodnotu integrálu. Rozšíříme-li nyní definici R- a N-integrálu i na širší třídy funkcí, než jsou funkce spojité, dostaneme již příslušné systémy "integrovatelných" funkcí různé.

E. VĚTY O STŘEDNÍ HODNOTĚ

3.16 **1. věta o střední hodnotě**

Nechť funkce f,g jsou spojité v intervalu $\langle a,b \rangle$, nechť $g \geq 0$ v $\langle a,b \rangle$. Potom existuje

$$\xi \in \langle a,b \rangle \quad \text{tak, že} \quad \int_a^b fg = f(\xi) \cdot \int_a^b g\,.$$

(Jelikož funkce f,g jsou spojité v $\langle a,b \rangle$, je jedno, zda uvedené integrály chápeme jako Riemannovy či Newtonovy.)

Důkaz. Tvrzení je zřejmé v případě $g = 0$ v $\langle a,b \rangle$. Nechť tedy existuje $t_o \in \langle a,b \rangle$ pro něž $g(t_o) > 0$. Označíme-li

$A = \int_a^b g$, je $A > 0$ (viz třeba cvičení 1.C). Funkce f je v intervalu $\langle a,b \rangle$ omezená (proč?), položíme

$m = \min f$, $M = \max f$ v $\langle a,b \rangle$.

Potom $mg \leq fg \leq Mg$ v $\langle a,b \rangle$, odkud plyne

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g \quad \text{a} \quad m \leq \frac{1}{A} \int_a^b fg \leq M .$$

Existuje tudíž $\xi \in \langle a,b \rangle$ (funkce f je spojitá, a tedy darbouxovská v $\langle a,b \rangle$!) tak, že $f(\xi) = \frac{1}{A} \int_a^b fg$.

3.17 2. věta o střední hodnotě.

Nechť funkce f, g' jsou spojité v intervalu $\langle a,b \rangle$, nechť funkce g je v intervalu $\langle a,b \rangle$ monotonní. Potom existuje $\xi \in \langle a,b \rangle$ tak, že

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^\xi f + g(b) \int_\xi^b f .$$

Důkaz. Buď F primitivní funkce k funkci f v $\langle a,b \rangle$, $F(a) = 0$ (existuje?). Potom

$$\int_a^b fg = \left[Fg \right]_a^b - \int_a^b Fg'$$

(Všechny funkce jsou spojité v $\langle a,b \rangle$!, lze užít věty 3.11). Funkce g' nemění na intervalu $\langle a,b \rangle$ své znaménko (proč?); použijeme-li předchozí 1.větu o střední hodnotě, obdržíme existenci $\xi \in \langle a,b \rangle$ s vlastností

$$\int_a^b Fg' = F(\xi) \int_a^b g' = F(\xi) \, (g(b) - g(a)) .$$

Tedy

$$\int_a^b fg = \left[Fg \right]_a^b - F(\xi) \, (g(b) - g(a)) =$$

$$= g(a) \, (F(\xi) - F(a)) + g(b) \, (F(b) - F(\xi)) .$$

Tím je tvrzení dokázáno, neboť $F(t) = \int_a^t f$ pro každé $t \in \langle a,b \rangle$ (podle které věty?).

F. EXISTENCE N - INTEGRÁLU

V tomto odstavci budeme vyšetřovat podmínky, za jakých existuje $(N) \int_a^b f$. Podle definice víme, že musejí být splněny dvě podmínky:

(*) existuje primitivní funkce F k funkci f v (a,b) ,

(**) existují vlastní limity $\lim\limits_{x \to a_+} F(x)$, $\lim\limits_{x \to b_-} F(x)$.

Víme již (viz 1.27.A), že spojitost funkce f je postačující podmínkou k splnění (*); omezíme se proto v dalším pouze na spojité funkce v (a,b) a budeme zkoumat, kdy je splněna podmínka (**) . Pro existenci vlastní limity $\lim\limits_{x \to a_+} F(x)$ známe nutnou a postačující Bolzano-Cauchyovu podmínku:

BC (v případě $a \in E_1$):

Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $|F(x') - F(x'')| < \varepsilon$, kdykoliv $x', x'' \in (a, a + \delta)$

BC (v případě $a = -\infty$) :

Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje x_0 tak, že $|F(x') - F(x'')| < \varepsilon$, kdykoliv $x', x'' \in (-\infty , x_0)$.

3.18 Věta. Buď f spojitá a omezená na omezeném intervalu (a,b) . Potom $f \in N((a,b))$.

Důkaz. Nechť F je primitivní funkce k f v (a,b). Jsou-li $x', x'' \in (a,b)$, můžeme nalézt $\xi \in (a,b)$ tak, že

$$|F(x') - F(x'')| = |F'(\xi) \cdot (x' - x'')| = |f(\xi) \cdot (x' - x'')| .$$

Z této rovnosti, z předpokladů a z BC-podmínky plyne tvrzení.

3.19 Věta. Buď f spojitá funkce v intervalu $\langle a,b)$. Potom v případě $b \in E_1$:

$$f \in N((a,b)) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x', x'' \ (x', x'' \in (b-\delta, b) \Longrightarrow \left| \int_{x'}^{x''} f \right| < \varepsilon) ,$$

v případě $b = +\infty$:

$$f \in N((a,+\infty)) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 \ \forall x', x'' \ (x', x'' > x_0 \Longrightarrow \left| \int_{x'}^{x''} f \right| < \varepsilon).$$

Důkaz. Nechť $b \in E_1$. Je-li

$$F: t \mapsto \int_a^t f \ , \ t \in \langle a,b) ,$$ je F primitivní funkce k funkci f v $\langle a,b)$ a

$f \in N((a,b))$, právě když existuje vlastní $\lim\limits_{x \to b_-} F(x)$.

Nyní stačí použít BC-podmínku a uvědomit si, že

$$|F(x') - F(x'')| = \left| \int_{x'}^{x''} f \right| .$$

3.20 Věta. Buďte f,g spojité funkce v intervalu $\langle a,b)$, nechť $0 \le f \le g$ na $\langle a,b)$. Potom

(a) $g \in N((a,b)) \Longrightarrow f \in N((a,b))$,

(b) $f \notin N((a.b)) \Longrightarrow g \notin N((a,b))$.

Důkaz. Nechť $b \in E_1$. Zvolíme-li $x', x'' \in (a,b)$ $(x' < x'')$, jest

$$0 \leq \int_{x'}^{x''} f \leq \int_{x'}^{x''} g .$$

Odtud lehko plyne tvrzení pomocí BC-podmínky (proveďte podobně!).

3.21 Příklad.

(A) Ukážeme, že (N) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}$ existuje, tj. $\frac{\sin x}{x} \in N((0,+\infty))$.

Je-li totiž $x', x'' \in (0, +\infty)$, $x' < x''$, je

$$\int_{x'}^{x''} \frac{\sin x}{x} = \left[-\frac{1}{x} \cos x \right]_{x'}^{x''} - \int_{x'}^{x''} \frac{\cos x}{x^2} .$$

Tudíž pro každá $x', x'' \in (0,+\infty)$ je splněna nerovnost

$$\left| \int_{x'}^{x''} \frac{\sin x}{x} \right| \leq \left| \left[-\frac{1}{x} \cos x \right]_{x'}^{x''} \right| + \left| \int_{x'}^{x''} \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} + \left| \int_{x}^{x''} \frac{1}{x^2} \right| \leq 2 \left(\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} \right)$$

(kterých vět používáme? Nezapomeňte, že funkce $\frac{\sin x}{x}$ je na intervalu $\langle x', x'' \rangle$ spojitá a můžeme proto používat vlastností R-integrálu).

Zvolme nyní $\varepsilon > 0$. Položíme-li $x_0 = \frac{4}{\varepsilon}$, bude pro $x', x'' > x_0$ splněna nerovnost $\left| \int_{x'}^{x''} \frac{\sin x}{x} \right| < \frac{4}{x_0} = \varepsilon$

tudíž i BC-podmínka.

(B) Ukážeme, že (N) $\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right|$ neexistuje .

Nejdříve odvodíme, že (N) $\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \geq \frac{2}{n\pi}$ pro každé $n \in N$

(integrál existuje! proč ?).

Zřejmě

$$\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin x|}{2n\pi} dx = \frac{1}{2n\pi} \int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} |\sin x| \, dx = \frac{2}{n\pi} .$$

Předpokládejme, že $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \in N((0,+\infty))$. Pro každé $n \in N$ položme

$$g_n(x) = \begin{cases} \left|\frac{\sin x}{x}\right| & \text{pro } x \in (0, 2n\pi), \\ 0 & \text{pro } x \geq 2n\pi . \end{cases}$$

Podle 3.20.a je $g_n \in N((0,+\infty))$ pro každé $n \in N$ a

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \int_0^\infty g_n = \int_0^{2n\pi} g_n = \sum_{i=1}^{n} \int_{2(i-1)\pi}^{2i\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i\pi} \quad \text{(kterých vět užíváme?).}$$

Tudíž

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty .$$

(Viz též cvičení 3.B.)

3.22 Dirichletovo a Abelovo kriterium

Nechť funkce f,g jsou spojité v intervalu $\langle a,b)$, nechť funkce g je v $\langle a,b)$ monotonní a má tam spojitou derivaci. Nechť dále buďto

(I) funkce $F : t \longrightarrow \int_a^t f \quad (t \in \langle a,b))$ je omezená v $\langle a,b)$

a $\lim\limits_{t \to b_-} g(t) = 0$ (Dirichlet)

anebo

(II) $f \in N((a,b))$ a g je omezená v $\langle a,b)$ (Abel).

Potom

(N) $\int_a^b fg$ existuje, tj. $fg \in N((a,b))$.

(Porovnejte s obdobným kriteriem pro řady!).

Důkaz. Nechť například $b = +\infty$. Položme pro $t \in \langle a,b)$

$$\Phi(t) = \int_a^t fg$$

(proč integrál existuje?) . Potom bude

$fg \in N((a,b)) \iff$ existuje vlastní $\lim_{t \to b_-} \Phi(t) \iff$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \forall x', x'' \ (x', x'' > x_0 \implies \left| \int_{x'}^{x''} fg \right| < \varepsilon).$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a buďte $x', x'' \in \langle a,b)$, $x' < x''$. Podle 2. věty o střední hodnotě (viz 3.17) existuje $\xi \in \langle x', x'' \rangle$ tak, že

$$\int_{x'}^{x''} fg = g(x') \int_{x'}^{\xi} f + g(x'') \int_{\xi}^{x''} f \, .$$

Předpokládejme, že jsou splněny podmínky z (I). Existují tedy $K \in E_1$,

$x_0 \in \langle a,b)$ tak, že

$$\left| \int_a^t f \right| \leq K \quad \text{pro každé} \quad t \in \langle a,b),$$

$$|g(y)| < \varepsilon \quad \text{pro každé} \quad y > x_0 \, .$$

Potom ovšem pro $x', x'' > x_0$ je

$$\left| \int_{x'}^{x''} fg \right| \leq 4K\varepsilon \, .$$

Je-li splněno (II), existují $C \in E_1$, $x_0 \in \langle a,b)$ tak, že

$$|g(t)| \leq C \quad \text{pro každé} \quad t \in \langle a,b),$$

$$\left| \int_{x'}^{x''} f \right| < \varepsilon \quad \text{pro každé} \quad x', x'' > x_0 \, .$$

Tudíž opět pro $x', x'' > x_0$ je

$$\left| \int_{x'}^{x''} fg \right| \leq 2C\varepsilon \, .$$

3.23 Příklady.

(A) Volíme-li $(a,b) = (0, +\infty)$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, plyne ihned z Dirichletova kriteria, že $(N) \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}$ existuje.

(B) Zkoumejte existenci $(N) \int_0^\infty \frac{x \sin x}{1 + x^2}$!

G. CVIČENÍ A PROBLÉMY

3.A Cvičení.

(A) Nechť funkce f, g jsou definovány v jistém redukovaném okolí bodu $x_0 \in E_1$. Řekneme, že f, g jsou slabě srovnatelné v bodě x_0 (píšeme $f \asymp g,\ x \to x_0$), jestliže existuje $\delta > 0$, $K > 0$, $C > 0$ tak, že $K\,|g(x)| \leq |f(x)| \leq C\,|g(x)|$ pro každé $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$.

Sami definujte slabou srovnatelnost v bodě zleva, zprava a slabou srovnatelnost v nevlastních bodech !

(B) Nechť existuje $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, nechť $0 < A < +\infty$. Potom $f \asymp g,\ x \to x_0$. Dokažte! Lze toto tvrzení obrátit?

(C) Buďte f, g spojité a nezáporné funkce v intervalu $\langle a, b)$. Nechť $f \asymp g,\ x \to b_-$. Potom

$$f \in N((a,b)) \Longleftrightarrow g \in N((a,b)) ,$$

dokažte!

3.B Cvičení. Ukážeme, že $(N)\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|$ neexistuje (viz též 3.21.B).

Návod. Zřejmě $|\sin x| \geq \sin^2 x$ $(x \in E_1)$; nechť $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \in N((0,+\infty))$. Potom z nerovnosti $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x}$ a z věty 3.20 plyne, že $\frac{1-\cos 2x}{x} \in N((0,+\infty))$.

Obdobně jako v 3.21.A lze ukázat, že $(N)\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}$ existuje; tudíž musí být $\frac{1}{x} \in N((1,+\infty))$ (proč?). Lehko však výpočtem zjistíme, že toto nemůže být.

3.C Cvičení.

(A) Buď f spojitá funkce v $\langle a, +\infty)$, nechť $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Buď dále $c > 0$ a položme

$$a_n = \int_{a+(n-1)c}^{a+nc} f$$

Předpokládejme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom $f \in N((a,+\infty))$ a

$$(N)\int_a^\infty f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ . Dokažte!}$$

(B) Na základě (A) ukažte, že (N) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}$ existuje !

$\boxed{3.D}$ Výpočet (N) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}$

(A) Buď f spojitá v $\langle a,b\rangle$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \cos n x \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx = 0 .$$

Návod. Využijte stejnoměrné spojitosti funkce f a odhad

$$\left| \int_\alpha^\beta \cos nx \, dx \right| \leq \frac{2}{n} .$$

(B) Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{x} dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin (2n+1) x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$

Návod. Ukažte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}n} \frac{\sin y}{y} dy$$ a uvědomte si, že (N) $\int_0^\infty f = \lim\limits_{t\to\infty} \int_0^t f$

v případě $f \in N((0, +\infty))$.

(C) Ukažte, že $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin (2n+1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}.$

Návod. Využijte rovnosti (pro $\alpha \neq 2k\pi$):

$$\frac{1}{2} + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\sin (n+\frac{1}{2})\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

(D) Ukažte, že (N) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$

Návod. Podle (A) dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin (2n+1)x}{\sin x} - \frac{\sin (2n+1)x}{x} \right) dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \sin (2n+1)x \, dx = 0 ,$$

a použijte (C) a (B).

$\boxed{3.E}$ Cvičení. Položme $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$. Lze dodefinovat funkci f v bodě $x = 0$ (a jak ?) tak, aby měla v celém E_1 primitivní funkci ?

$\boxed{3.F}$ Cvičení. Položte $\mathcal{H} = \left\{ A \subset (a,b) \ ; \ c_A \in N((a,b)) \right\}$ a vyšetřujte vlastnosti systému $\mathcal{H}$!

4. Zobecněný Newtonův integrál

Obsah: A. Definice a základní vlastnosti.

B. Cvičení a problémy.

A. DEFINICE A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

V tomto odstavci zobecníme definici Newtonova integrálu a pokusíme se tím vyhnout některým potížím, které s sebou tento integrál přinášel. Vzhledem k tomu, že se nejdná o nijak podstatné zobecnění N-integrálu (jak uvidíme kupř. v 4.6), které ani po stránce teoretické nepřináší mnoho nových myšlenek, omezíme se skutečně pouze na definici a nejzákladnější vlastnosti tohoto integrálu.

4.1 Definice. Nechť funkce f je definována v intervalu $I \subset E_1$. Řekneme, že funkce F je zobecněná primitivní funkce k funkci f v intervalu I, jestliže

(I) F je spojitá v I,

(II) existuje konečná množina $K \subset I$ tak, že $F' = f$ v $I-K$ (tedy až na konečně mnoho bodů existuje derivace funkce F a až na konečně mnoho bodů platí rovnost $F' = f$!).

4.2 Poznámky.

(A) Podotkněme, že množina K může být pochopitelně prázdná.

(B) Tudíž každá primitivní funkce je též zobecněnou primitivní funkcí. Ne již ale naopak! Kupříkladu funkce $F = 0$ je zobecněnou primitivní funkcí k funkci f, kde $f(x) = 0$ pro $x \in (0,1) \cup (1,3)$, $f(1) = 4$, ale není primitivní funkcí k f v $(0,3)$.

(C) Z definice vyplývá, že není třeba se vůbec starat o krajní body intervalu I (pokud k tomuto intervalu patří), můžeme se proto v dalším omezit pouze na otevřené intervaly.

(D) Rovněž tak není nutné předpokládat, že funkce f je definována v celém intervalu I; stačí předpokládat (což dále budeme vždy činit), že funkce f je definována s výjimkou konečné množiny všude v I.

4.3 Věta. Buďte F,G zobecněné primitivní funkce k funkci f v intervalu I. Potom se funkce F,G liší o konstantu; přesněji - existuje $c \in E_1$ tak, že $F = G + c$ v I.

Důkaz. Nechť $I = (a,b)$. Existují $z_i \in I$, $z_1 < z_2 < \dots < z_{n-1}$, $z_0 = a$, $z_n = b$ tak, že $F' = G' = f$ v každém intervalu (z_{i-1}, z_i). Můžeme tudíž nalézt $c_i \in E_1$ $(i = 1,\dots,n)$ tak, že $F = G + c_i$ v (z_{i-1}, z_i). Nyní stačí využít spojitosti funkcí F, G; obdržíme rovnost $c_1 = c_2 = \dots = c_n$.

4.4 Definice. Nechť funkce f má v intervalu $(a,b) \subset E_1$ zobecněnou primitivní funkci F. Nechť existují vlastní limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$, $\lim_{x\to b_-} F(x)$.

Potom definujeme zobecněný Newtonův integrál (krátce ZN-integrál) funkce f rovností

$$(ZN)\int_a^b f = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)$$

a systém všech funkcí f, pro které je tento integrál definován, označme symbolem $ZN((a,b))$.

4.5 Poznámky.

(A) Definice ZN-integrálu nezávisí na volbě zobecněné primitivní funkce F, jak ukazuje předchozí věta 4.3.

(B) Zřejmě $N((a,b)) \subset ZN((a,b))$ a

$$(N)\int_a^b f = (ZN)\int_a^b f$$

pro každou funkci $f \in N((a,b))$. Rozmyslete!

(C) Inkluse systémů $N((a,b))$ a $ZN((a,b))$ je ostrá. Ilustrujte toto výpočtem integrálů

$$(ZN)\int_{-1}^{+1} \operatorname{sign} x, \qquad (ZN)\int_2^5 \log x \ !$$

(D) Existence ani hodnota $(ZN)\int_a^b f$ se nezmění, změníme-li hodnoty funkce f v konečně mnoha bodech (a,b).

(E) Souvislost N-integrálu a ZN-integrálu udává následující věta. Podle ní je též vidět, že ZN-integrál není příliš velkým "zobecněním" N-integrálu (vysvětlete!).

4.6 Věta. Nechť $f \in ZN((a,b))$. Potom existují $z_i \in (a,b)$, $z_1 < z_2 < \dots < z_{n-1}$, (klademe ještě $z_0 = a$, $z_n = b$) tak, že $f \in N((z_{i-1}, z_i))$ pro každé $i = 1,\dots, n$ a

$$(ZN)\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} (N)\int_{z_{i-1}}^{z_i} f .$$

Důkaz. Proveďte podrobně sami !

4.7 Problém. Platí též obrácená věta? Tj. existuje-li

$(N) \int_{z_{i-1}}^{z_i} f$ pro každé i, jest již $f \in ZN((a,b))$ a

$$(ZN) \int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} (N) \int_{z_{i-1}}^{z_i} f \quad ?$$

4.8 Věta (vlastnosti ZN-integrálu).

(A) $f, g \in ZN((a,b)) \Longrightarrow f+g \in ZN((a,b))$ a

$$(ZN) \int_a^b (f+g) = (ZN) \int_a^b f + (ZN) \int_a^b g ,$$

(B) $f \in ZN((a,b))$, $c \in E_1 \Longrightarrow cf \in ZN((a,b))$ a

$$(ZN) \int_a^b cf = c(ZN) \int_a^b f ,$$

(C) $f, g \in ZN((a,b))$, $f \geqq g$ v $(a,b) \Longrightarrow (ZN) \int_a^b f \geqq (ZN) \int_a^b g$,

(D) je-li $a < c < b$, potom

$$(ZN) \int_a^b f = (ZN) \int_a^c f + (ZN) \int_c^b f ,$$

existuje-li buďto integrál vlevo anebo oba integrály vpravo (porovnejte s větami 3.8 a 3.9 !),

(E) je-li $f \in ZN((a,b))$ a $\Phi : x \longrightarrow (ZN) \int_a^x f$, je funkce Φ zobecněnou primitivní funkcí k funkci f na (a,b), přičemž $\Phi' = f$ v těch bodech, v nichž je funkce f spojitá.

(Další vlastnoti ZN-integrálu jsou ve cvičeních.)

Důkaz. Proveďte sami (odvoďte si nejdříve základní vlastnosti zobecněných primitivních funkcí).

4.A Integrace per partes pro ZN-integrály.

Nechť F,G jsou zobecněné primitivní funkce k funkcím f,g v intervalu (a,b) . Potom

$$(ZN)\int_a^b Fg = \Big[FG\Big]_a^b - (ZN)\int_a^b fG ,$$

mají-li alespoň dva výrazy v této rovnosti smysl (viz též 3.11). Dokažte!

4.B Cvičení. Vyslovte pro ZN-integrál věty obdobné větám 3.12, 3.18, 3.20 , 3.22 a dokažte je!

4.C J-integrál

V tomto cvičení ukážeme ještě jedno, a to již dost podstatné zobecnění Newtonova integrálu.

(A) Řekněme, že funkce F je skoro primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a,b) , jestliže

(I) F je spojitá v (a,b),

(II) existuje spočetná množina $S \subset (a,b)$ tak, že

$$F' = f \quad \text{v} \quad (a,b) - S .$$

(B) Jsou-li F,G dvě skoro primitivní funkce k funkci f v (a,b), liší se již v (a,b) o konstantu. Dokažte !

Návod. Stačí dokázat toto tvrzení (proč?):
Je-li F spojitá v $\langle\alpha,\beta\rangle$ a $F' \geq 0$ v $\langle\alpha,\beta\rangle - S$, kde S je spočetná, potom $F(\alpha) \leq F(\beta)$.
Poslední tvrzení dokažte takto. Zvolte $\varepsilon > 0$; nechť $S = \{a_n\}$.
Označte

$$A = \Big\{ y \in \langle\alpha,\beta\rangle ;\ f(x) - f(\alpha) \geq -\varepsilon(x-\alpha) - \varepsilon \sum_{\{n;\, a_n < x\}} \frac{1}{2^n}$$

$$\text{pro každé } x \in \langle\alpha, y\rangle \Big\} .$$

Ukažte, že $A \neq \emptyset$ a že A je interval. Položíte-li $c = \sup A$, lehko ukážete, že $c \in A$. Závěrem stačí dokázat, že $c = \beta$ (rozlište případy $c \in S$ a $c = a_k$).

(C) Symbolem $J((a,b))$ označme systém všech funkcí f na (a,b) takových, že

(I) mají skoro primitivní funkci F v (a,b),

(II) existují vlastní limity $\lim\limits_{x\to a_+} F(x)$, $\lim\limits_{x\to b_-} F(x)$.

Pro $f \in J((a,b))$ definujme J-integrál předpisem

$$(J)\int_a^b f = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)$$

(D) Ukažte, že definice J-integrálu je korektní (vysvětlete, co se tím míní).

(E) Ukažte, že $ZN((a,b)) \subset J((a,b))$ a

$$(ZN)\int_a^b f = (J)\int_a^b f$$

pro každou funkci $f \in (ZN)\int_a^b f$.

(F) Ukažte, že $(J)\int_0^{2} D = 0$, kde D znamená Dirichletovu funkci.

(G) Zkoumejte základní vlastnosti J-integrálu !

4.D Poznámka.

Pokusme se shrnout typické rysy definic N, ZN a J-integrálu. Nejdříve se definuje pojem "primitivní funkce" k funkci f v (a,b), přičemž se požaduje, aby (alespoň)

(I) dvě takové "primitivní funkce" k funkci f se lišily v intervalu (a,b) vždy o konstantu (toto zaručuje korektnost definice integrálu),

(II) "primitivní funkce" k lineární kombinaci funkcí byla lineární kombinací "primitivních funkcí" k těmto funkcím (toto zaručuje později linearitu integrálu).

Nyní uvažujeme třídu všech konečných funkcí f v (a,b), které mají "primitivní funkci", přičemž tato má vlastní limity v krajních bodech intervalu (a,b). Integrál pak definujeme právě jako rozdíl těchto limit.

V našem konkrétním případě jsme uvažovali tyto případy:

"primitivní funkce" F k funkci f byla vždy spojitá, a kromě toho

$F' = f$ všude v (a,b) (N-integrál),

$F' = f$ všude v (a,b) až na konečnou množinu (ZN-integrál),

$F' = f$ všude v (a,b) až na spočetnou množinu (J-integrál).

Jde nyní o to, zda můžeme ještě dále zobecňovat pojem "primitivní funkce", jakým způsobem toto zobecnění vlastně provést a kam až můžeme dojít (při zachování podmínek I, II). Ukazuje se, že v podstatě lze zobecňovat dvojím způsobem.

(a) rovnost $F' = f$ požadovat všude v (a,b) s výjimkou jistých "malých" množin, přičemž je ovšem nutno - pro splnění podmínky I - předpoklady na spojitost funkce F zesilovat,

(b) místo obyčejné derivace uvažovat jisté "zobecněné derivace" .

Tak kupř. podle bodu (a) lze vybudovat teorii Lebesgueova integrálu (tam roli "malých" množin hrají tzv. nulové množiny - viz cvičení 1.L - a spojitost F se nahradí tzv. absolutní spojitostí) a podle bodu (b) zase Denjoy-Chinčinův integrál (s použitím tzv. aproximativní derivace) či symetrický integrál (viz k tomu [Re-Pr] , praktikum 9, odstavec 9). O něčem z toho si ovšem povíme až v II. díle. Poznamenejme pouze závěrem, že definicím integrálu pomocí "primitivních funkcí" se říká obvykle deskriptivní definice integrálu (na rozdíl od konstruktivních definic, jejichž typickým příkladem je definice Riemannova integrálu).

III. D A L Š Í   D R U H Y   I N T E G R Á L Ů

5. Funkce konečné variace

A. DEFINICE A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

5.1 Definice. Buď $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow E_1$ reálná funkce definovaná na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$. Pro libovolné dělení $D = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} \in \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$ položme

$$\overset{b}{\underset{a}{T}}(f, D) = T(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i) - f(x_{i-1}) \right|$$

(kreslete!).

Položíme-li dále

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup_{D\in\mathcal{D}(\langle a,b\rangle)} T(f,D) ,$$

nazýváme číslo $\overset{b}{\underset{a}{V}} f$ $(0 \le \overset{b}{\underset{a}{V}} f \le +\infty)$ variací funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$.

Symbolem BV ($\langle a,b\rangle$) označme systém všech funkcí f na intervalu $\langle a,b\rangle$, pro něž $\overset{b}{\underset{a}{V}} f < +\infty$. Funkce ze systému BV ($\langle a,b\rangle$) budeme nazývat funkce s konečnou variací na $\langle a,b\rangle$.

5.2 Příklady.

(a) Buď f monotonní na intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom $T(f,D) = |f(b) - f(a)|$ pro každé $D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$, odkud $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = |f(b) - f(a)|$. Systém BV ($\langle a,b\rangle$) obsahuje všechny monotonní funkce na $\langle a,b\rangle$.

(b) Funkce f je konstantní na $\langle a,b\rangle$, právě když $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = 0$.

(c) Definujme funkci f na intervalu $\langle 0, \frac{2}{\pi} \rangle$ vztahem

$$f(0) = 0 \ , \quad f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x} \quad \text{pro} \quad x \in (0, \frac{2}{\pi} \rangle .$$

Zřejmě f je spojitá na $\langle 0, \frac{2}{\pi} \rangle$.

Zvolíme-li dělení $D_n \in \mathcal{D}(\langle 0, \frac{2}{\pi} \rangle)$

$$D_n = \left\{ 0 < x_n < x_{n-1} < \dots < x_1 < x_0 = \frac{2}{\pi} \right\} ,$$

$$x_i = \frac{2}{(2i+1).\pi} \ , \text{ je}$$

$$T(f, D_n) \geq \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1} \right) .$$

Odtud vyplývá, že

$$\overset{\frac{2}{\pi}}{\underset{0}{V}} f = \sup T(f, D) = + \infty .$$

Sestrojili jsme příklad spojité funkce s nekonečnou variací.

(d) Řekněme, že funkce f je <u>lipschitzovská</u> na $\langle a,b \rangle$, jestliže existuje $K \in E_1$ tak, že

$$\left| f(x) - f(y) \right| \leq K \left| x - y \right|$$

pro všechna $x,y \in \langle a,b \rangle$. Označíme-li symbolem $\mathrm{Lip}_1(\langle a,b \rangle)$ systém všech lipschitzovských funkcí na $\langle a,b \rangle$, jest $\mathrm{Lip}_1(\langle a,b \rangle) \subset BV(\langle a,b \rangle)$. Dokažte! Nalezněte též příklad funkce s konečnou variací, která není lipschitzovská.

$\boxed{5.3}$ <u>Věta (vlastnosti systému $BV(\langle a,b \rangle)$).</u>

(a) $f \in BV(\langle a,b \rangle) \Longrightarrow f$ omezená na $\langle a,b \rangle$.

(b) $f,g \in BV(\langle a,b \rangle) \Longrightarrow f + g \in BV(\langle a,b \rangle)$ a

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f+g) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{a}{V}} g ,$$

(c) $f \in BV(\langle a,b \rangle)$, $c \in E_1 \Longrightarrow cf \in BV(\langle a,b \rangle)$ a

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} cf = |c| \overset{b}{\underset{a}{V}} f .$$

Důkaz. a) Zvolme $x \in \langle a,b \rangle$, buď D dělení $\langle a,b \rangle$ obsahující bod x. Potom $\left| f(x) - f(a) \right| \leq T(f,D)$, tedy $\left| f(x) \right| \leq \left| f(a) \right| + \overset{b}{\underset{a}{V}} f$.

b) Buď $D \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$, potom

$$T(f+g,D) \leq T(f,D) + T(g,D) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{a}{V}} g ,$$

tedy

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} (f+g) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{a}{V}} g .$$

(c) Dokažte sami.

$\boxed{5.4}$ Věta (další vlastnosti BV $(\langle a,b\rangle)$).

(a) $f,g \in BV(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow f.g \in BV(\langle a,b\rangle)$,

(b) $f \in BV(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow |f| \in BV(\langle a,b\rangle)$,

(c) $f,g \in BV(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow \max(f,g), \min(f,g) \in BV(\langle a,b\rangle)$.

Důkaz. a) Buďte $f,g \in BV(\langle a,b\rangle)$. Podle 5.3 jsou f,g omezené na $\langle a,b\rangle$, nechť $|f| \leq K_f$, $|g| \leq K_g$.

Zvolme $D = \left\{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \right\} \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$, potom

$$T(f.g,D) = \sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i) \cdot g(x_i) - f(x_{i-1}) \; g(x_{i-1}) \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) + g(x_{i-1}) \; (f(x_i) - f(x_{i-1})) \right| \leq$$

$$\leq K_f \cdot T(g,D) + K_g \, T(f,D) \leq$$

$$\leq K_f \overset{b}{\underset{a}{V}} g + K_g \overset{b}{\underset{a}{V}} f .$$

b) Ze vztahu $\left| |a| - |b| \right| \leq |a - b|$ lehko odvodíme, že

$$T(|f|,D) \leq T(f,D) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}} f$$

pro každé $D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$. Tedy $\overset{b}{\underset{a}{V}} |f| \leq \overset{b}{\underset{a}{V}} f$.

c) Plyne ihned z předchozích vět a ze vztahů

$$\max(a,b) = \tfrac{1}{2}(a + b + |a-b|) ,$$

$$\min(a,b) = \tfrac{1}{2}(a + b - |a-b|).$$

$\boxed{5.5}$ Věta (BV jako funkce intervalu).

(a) $f \in BV(\langle a,b\rangle)$, $\langle \alpha,\beta\rangle \subset \langle a,b\rangle$

$$\Longrightarrow f \in BV(\langle \alpha,\beta\rangle) ,$$

(b) $a < c < b$, $f \in BV(\langle a,b\rangle)$

$$\Longrightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}} f = \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f ,$$

(c) $a < c < b$, $f \in BV(\langle a,c\rangle)$, $f \in BV(\langle c,b\rangle)$
$\Longrightarrow f \in BV(\langle a,b\rangle)$.

Důkaz. a) Tvrzení je zřejmé.

b) Buď $D \in \mathscr{D}(\langle a, b\rangle)$, označme $D_c = D \cup \{c\}$.

Potom

$$\overset{b}{\underset{a}{T}}(f,D) \leq \overset{b}{\underset{a}{T}}(f,D_c) = \overset{c}{\underset{a}{T}}(f,D_c) + \overset{b}{\underset{c}{T}}(f,D_c) \leq \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f ,$$

odkud plyne, že $\overset{b}{\underset{a}{V}} f \leq \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f$.

Zvolme nyní $\varepsilon > 0$, existují dělení $D_1 \in \mathscr{D}(\langle a,c\rangle)$, $D_2 \in \mathscr{D}(\langle c,b\rangle)$ tak, že

$$\overset{c}{\underset{a}{T}}(f,D_1) > \overset{c}{\underset{a}{V}} f - \varepsilon , \quad \overset{b}{\underset{c}{T}}(f,D_2) > \overset{b}{\underset{c}{V}} f - \varepsilon .$$

Položíme-li $D = D_1 \cup D_2$, je $D \in \mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$ a

$$\overset{b}{\underset{a}{T}}(f,D) = \overset{c}{\underset{a}{T}}(f,D_1) + \overset{b}{\underset{c}{T}}(f,D_2) > \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f - 2\varepsilon .$$

Tedy $\overset{b}{\underset{a}{V}} f > \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f - 2\varepsilon$. Ale $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, odkud konečně dostáváme

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f \geq \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f .$$

(c) Tvrzení plyne ihned z důkazu části b), kde jsme dokázali, že vždy platí

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f \leq \overset{c}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{c}{V}} f .$$

B. JORDANOVA VĚTA O ROZKLADU

$\boxed{5.6}$ **Věta.**

Buď $f \in BV(\langle a,b\rangle)$ a definujme funkci F vztahem

$$F(a) = 0 , \quad F : x \longrightarrow \overset{x}{\underset{a}{V}} f , \quad x \in (a,b\rangle .$$

Potom funkce F je neklesající na $\langle a,b\rangle$. Navíc F je spojitá (spojitá zprava, spojitá zleva) v bodě $x \in \langle a,b\rangle$, je-li f spojitá (zprava, zleva) v bodě x .

Důkaz. Buďte $x, y \in \langle a,b\rangle$, $x < y$. Potom

$$F(y) = \overset{y}{\underset{a}{V}} f = \overset{x}{\underset{a}{V}} f + \overset{y}{\underset{x}{V}} f \geq \overset{x}{\underset{a}{V}} f = F(x) .$$

Nechť nyní funkce f je spojitá v bodě $x \in (a,b\rangle$ zleva. Chceme dokázat, že

$$\lim_{t \to x_-} \overset{t}{\underset{a}{V}} f = \overset{x}{\underset{a}{V}} f .$$

Zvolme $\varepsilon > 0$, k němu můžeme nalézt dělení $D \in \mathscr{D}(\langle a,x\rangle)$ tak, aby

$$\overset{x}{\underset{a}{T}}(f,D) > F(x) - \varepsilon \; .$$

Dále můžeme najít takové y, $a < y < x$, že

$$\left| f(x) - f(y) \right| < \varepsilon$$

a že mezi body y a x již neleží žádný bod dělení D.
Položíme-li $D_y = D \cup \{y\}$, je $D_y \in \mathscr{D}(\langle a,x\rangle)$ a

$$\overset{x}{\underset{a}{T}}(f,D_y) \geq \overset{x}{\underset{a}{T}}(f,D) \; ,$$

tedy

$$F(y) = \overset{y}{\underset{a}{V}} f \geq \overset{y}{\underset{a}{T}}(f, D_y) = \overset{x}{\underset{a}{T}}(f,D_y) - \left| f(x) - f(y) \right| > F(x) - 2\varepsilon \; ,$$

což nám stačilo dokázat (nezapomeňte, že F je neklesající!).

5.7 Jordanova věta o rozkladu.

Buď f funkce na $\langle a,b\rangle$. Potom

$f \in BV(\langle a,b\rangle) \Longleftrightarrow$ existují neklesající funkce f_1, f_2 v intervalu $\langle a,b\rangle$ tak, že $f = f_1 - f_2$ v $\langle a,b\rangle$.

Důkaz. 1. Buďte f_1, f_2 neklesající, $f = f_1 - f_2$.
Potom $f \in BV(\langle a,b\rangle)$ podle 5.2 a. a 5.3.

2. Nechť naopak $f \in BV(\langle a,b\rangle)$. Položme $f_1(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}} f$, $x \in \langle a,b\rangle$ $\left(\overset{a}{\underset{a}{V}} f \overset{df}{=} 0\right)$, $f_2 = f_1 - f$.

Potom f_1 je neklesající v $\langle a,b\rangle$ podle 5.6, $f = f_1 - f_2$ a stačí ukázat, že funkce f_2 je neklesající.

Zvolme tedy $x, y \in \langle a,b\rangle$, $x < y$. Potom

$$f_2(y) - f_2(x) = \overset{y}{\underset{a}{V}} f - f(y) - \overset{x}{\underset{a}{V}} f + f(x) = \overset{y}{\underset{x}{V}} f - (f(y) - f(x)) \geq 0 \; .$$

5.8 Poznámky.

(a) Je-li f spojitá v bodě x (spojitá v $\langle a,b\rangle$), lze volit funkce f_1, f_2 spojité v x (v $\langle a,b\rangle$). Toto tvrzení plyne ihned z tvrzení 5.6.

(b) Je-li $f \in BV(\langle a,b\rangle)$, má f v každém bodě (a,b) limitu zleva i limitu zprava a množina bodů nespojitosti funkce f je spočetná. Dokažte!

(c) Vyjádření $f = f_1 - f_2$ není zdaleka jednoznačné (uveďte příklad!). Jak však uvidíme v dalším, lze v tomto vyjádření volit "minimální" f_1 a f_2.

$\boxed{5.9}$ Definice. Buď $f \in BV(\langle a,b \rangle)$. Pro každé $x \in \langle a,b \rangle$ položme

$$\overset{*}{f}(x) = \bigvee_a^x f$$

($\overset{*}{f}(a) = 0$). Funkci $\overset{*}{f}$ nazýváme <u>variací</u> funkce f na intervalu $\langle a,b \rangle$ (někdy též používáme názvu totální variace či neurčitá variace). Funkce $\overset{*}{f}$ - v jistém smyslu - připomíná primitivní funkci k funkci f (viz též cvičení 5.J).

$\boxed{5.10}$ <u>Věta</u> (vlastnosti funkce $\overset{*}{f}$).

Buď $f \in BV(\langle a,b \rangle)$, nechť $\overset{*}{f}$ je variace funkce f v $\langle a,b \rangle$. Potom platí

(A) funkce $\overset{*}{f}$ je neklesající v intervalu $\langle a,b \rangle$ (speciálně $\overset{*}{f} \in BV(\langle a,b \rangle)$).

(B) je-li funkce f spojitá (zleva, zprava) v bodě $x \in \langle a,b \rangle$, je i funkce $\overset{*}{f}$ spojitá (zleva, zprava) v bodě x ,

(C) je-li $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a,b \rangle$, je

$$\bigvee_\alpha^\beta f = \overset{*}{f}(\beta) - \overset{*}{f}(\alpha) ,$$

(D) je-li φ taková funkce v $\langle a,b \rangle$, že pro každý interval $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a,b \rangle$ platí $\bigvee_\alpha^\beta f = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$, je funkce $\overset{*}{f} - \varphi$ konstantní v $\langle a, b \rangle$.

Důkaz. Důkaz tvrzení (A), (B), (C) je obsažen ve větě 5.6. Nechť jsou splněny předpoklady (D), buď $x \in \langle a,b \rangle$. Potom

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \bigvee_a^x f = \varphi(a) + \overset{*}{f}(x) .$$

$\boxed{5.11}$ Definice. Buď $\overset{*}{f}$ neurčitá variace funkce $f \in BV(\langle a,b \rangle)$. Položme

$$\overset{+}{f} = \frac{1}{2}(\overset{*}{f} + f) , \qquad \overset{-}{f} = \frac{1}{2}(\overset{*}{f} - f) .$$

Funkce $\overset{+}{f}, \overset{-}{f}$ nazýváme <u>positivní a negativní variací funkce</u> f na intervalu $\langle a,b \rangle$.

<u>Poznámka.</u> Mnozí autoři nazývají neurčitou variací (resp. positivní či negativní variací) celou <u>třídu</u> funkcí, lišících se od $\overset{*}{f}$ (resp. $\overset{+}{f}$ či $\overset{-}{f}$) pouze o konstantu. Jiní autoři tuto konstantu specifikují a nazývají pak neurčitou, positivní či negativní variací funkce

$$\overset{*}{f}\,, \quad \overset{+}{f} - \frac{1}{2}\, f(a)\,, \qquad \overset{-}{f} + \frac{1}{2}\, f(a)$$

(které se tedy anulují v bodě $x = a$). My se však v dalším budeme držet našich definic.

$\boxed{5.12}$ Věta (vlastnosti funkcí $\overset{+}{f}, \overset{-}{f}$).

Funkce $\overset{+}{f}, \overset{-}{f}$ mají následující vlastnosti:

(A) funkce $\overset{+}{f}, \overset{-}{f}$ jsou neklesající v intervalu $\langle a,b \rangle$,

(B) je-li funkce f spojitá (zleva, zprava) v bodě $x \in \langle a,b \rangle$, jsou i funkce $\overset{+}{f}, \overset{-}{f}$ spojité (zleva, zprava) v bodě x,

(C) $\overset{*}{f} = \overset{+}{f} + \overset{-}{f}$, $f = \overset{+}{f} - \overset{-}{f}$ v $\langle a,b \rangle$ (porovnejte se vztahy $|f| = f^+ + f^-$, $f = f^+ - f^-$),

(D) funkce $\overset{+}{f}$ (resp. $\overset{-}{f}$) je konstantní na $\langle a,b \rangle$, právě když f je nerostoucí (resp. neklesající) na $\langle a,b \rangle$.

Důkaz. Proveďte sami.

$\boxed{5.13}$ Věta. Buď $f \in BV(\langle a,b \rangle)$, $f = f_1 - f_2$, kde f_1, f_2 jsou neklesající v $\langle a,b \rangle$. Potom existuje neklesající funkce g v intervalu $\langle a,b \rangle$ tak, že

$$f_1 = \overset{+}{f} + g\,, \quad f_2 = \overset{-}{f} + g \qquad v \quad \langle a,b \rangle\,.$$

Důkaz. Položme $g = f_1 - \overset{+}{f}$ $(= f_2 - \overset{-}{f})$. Stačí dokázat, že g je neklesající. Buďte tedy $x, y \in \langle a,b \rangle$, $x < y$. Potom

$$\bigvee_x^y f \le \bigvee_x^y f_1 + \bigvee_x^y (-f_2) = \bigvee_x^y f_1 + \bigvee_x^y f_2 =$$

$$= f_1(y) - f_1(x) + f_2(y) - f_2(x)$$

(použili jsme 5.3.b, 5.3.c), ale

$$\bigvee_x^y f = \overset{*}{f}(y) - \overset{*}{f}(x) = \overset{+}{f}(y) + \overset{-}{f}(y) - \overset{+}{f}(x) - \overset{-}{f}(x)\,.$$

Tudíž $2\,g(x) \le 2\,g(y)$.

$\boxed{5.14}$ Poznámka. Z předešlé věty vyplývá tvrzení o "minimálnosti" rozkladu $f = f_1 - f_2$: Jsou-li funkce f_1, f_2 neklesající v $\langle a,b \rangle$,

$f = f_1 - f_2$ a $f_1(a) = \overset{+}{f}(a)$ $\left(= \frac{1}{2} f(a)\right)$, $f_2(a) = \overset{-}{f}(a)$ $\left(= -\frac{1}{2} f(a)\right)$, jest

$$f_1 \geq \overset{+}{f}\ , \quad f_2 \geq \overset{-}{f} \quad \text{na } \langle a,b\rangle .$$

(Neboť existuje neklesající funkce g tak, že $f_1 = \overset{+}{f} + g$, $f_2 = \overset{-}{f} + g$ a $g(a) = 0$.)

C. DALŠÍ VLASTNOSTI SYSTÉMU BV ($\langle a,b\rangle$)

V dalším se pokusíme řešit problém, za jakých předpokladů platí implikace

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{na } \langle a,b\rangle \Longrightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}} f_n \longrightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}} f .$$

Na příkladech sami ukažte, že můžeme nalézt posloupnost funkcí $f_n \in BV(\langle a,b\rangle)$ tak, aby $f_n \longrightarrow f$ na $\langle a,b\rangle$ (dokonce $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle a,b\rangle$) a aby $\overset{b}{\underset{a}{V}} f_n \not\longrightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}} f$. Ukážeme dále, že do prostoru funkcí BV($\langle a,b\rangle$) lze zavést takovou metriku ρ , že platí

$$f_n \xrightarrow{\rho} f \Longrightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}} f_n \longrightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}} f .$$

Nejdříve si však odvoďme jednoduché lemma.

$\boxed{5.15}$ **Lemma.** Buďte f_n , f funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$, $f_n \longrightarrow f$ v $\langle a,b\rangle$. Potom

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f \leq \liminf_{n\to+\infty} \overset{b}{\underset{a}{V}} f_n .$$

Důkaz. Tvrzení je zřejmé v případě $\liminf\limits_{n\to\infty} \overset{b}{\underset{a}{V}} f_n = +\infty$.

Nechť tedy $\overline{\lim}\inf \overset{b}{\underset{a}{V}} f_n = C < \infty +$. Můžeme nalézt vybranou posloupnost $\left\{ f_{n_k} \right\}$ z posloupnosti $\left\{ f_n \right\}$ tak, aby $\lim \overset{b}{\underset{a}{V}} f_{n_k} = C$ (proč?). Pro libovolné dělení $D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$ platí $\overset{b}{\underset{a}{T}}(f_{n_k},D) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}} f_{n_k}$, tedy i

$$\lim \overset{b}{\underset{a}{T}} (f_{n_k},D) = \overset{b}{\underset{a}{T}} (f,D) \leq \lim \overset{b}{\underset{a}{V}} f_{n_k} = C .$$

Přechodem k supremu přes všechna $D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$ obdržíme nerovnost $\overset{b}{\underset{a}{V}} f \leq C$.

27571 P6

$\boxed{5.16}$ **Věta.** Pro $f \in BV(\langle a,b\rangle)$ položme

$$\|f\| = |f(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}} f \quad . \text{ (Zřejmě } \|f\| \geq 0 \text{ .).}$$

Potom platí:

(i) $\|f\| = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ na $\langle a,b\rangle$,

(ii) $\|af\| = |a| \cdot \|f\|$, je-li $a \in E_1$,

(iii) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Jinými slovy, funkce $f \longmapsto \|f\|$ je norma na prostoru funkcí $BV(\langle a,b\rangle)$ a dvojice $(BV(\langle a,b\rangle), \|\ldots\|)$ je normovaný lineární prostor.

Důkaz. Snad pouze ověření "trojúhelníkové nerovnosti" je obtížnější, ale

$$\|f+g\| = |f(a) + g(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}} (f+g) \leq |f(a)| + |g(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}} f + \overset{b}{\underset{a}{V}} g =$$

$$= \|f\| + \|g\| .$$

$\boxed{5.17}$ **Věta (zavedení metriky do $BV(\langle a,b\rangle)$).**

Pro $f,g \in BV(\langle a,b\rangle)$ položme

$$\rho(f,g) = \|f - g\| .$$

Potom

(A) $(BV(\langle a,b\rangle), \rho)$ je metrický prostor,

(B) $f, f_n \in BV(\langle a,b\rangle)$, $f_n \xrightarrow{\rho} f \Longrightarrow f_n \rightrightarrows f$ v $\langle a,b\rangle$,

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f_n \to \overset{b}{\underset{a}{V}} f ,$$

(C)* prostor $(BV(\langle a,b\rangle), \rho)$ je (dokonce) úplný, tj. normovaný prostor $(BV(\langle a,b\rangle), \|\ldots\|)$ je Banachův.

Důkaz. (A) Tvrzení plyne ihned z vlastností normy v 5.16.

(B) Nechť $f_n \xrightarrow{\rho} f$, tj. nechť

$$\lim_{n\to\infty} \left(|f_n(a) - f(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}} (f_n - f) \right) = 0 .$$

Speciálně $f_n(a) \to f(a)$, $\overset{b}{\underset{a}{V}} (f_n - f) \to 0$.

Zvolme libovolné $x \in \langle a,b\rangle$. Potom

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(a) - f(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}} (f_n - f)$$

27571 Z6

(neboť $|\varphi(x)| \leq |\varphi(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}} \varphi$ - viz kupř. důkaz 5.3.a), odkud plyne, že $f_n \rightrightarrows f$ v $\langle a,b \rangle$ (proveďte podrobně!).

Zbytek tvrzení dokážeme pomocí nerovnosti

$$\left| \overset{b}{\underset{a}{V}} f_n - \overset{b}{\underset{a}{V}} f \right| \leq \overset{b}{\underset{a}{V}} (f_n - f)$$

(neboť pro $\overset{b}{\underset{a}{V}} \varphi \geq \overset{b}{\underset{a}{V}} \psi$ platí

$$\left| \overset{b}{\underset{a}{V}} \varphi - \overset{b}{\underset{a}{V}} \psi \right| = \overset{b}{\underset{a}{V}} (\varphi + \psi - \psi) - \overset{b}{\underset{a}{V}} \psi \leq \overset{b}{\underset{a}{V}} (\varphi - \psi) + \overset{b}{\underset{a}{V}} \psi - \overset{b}{\underset{a}{V}} \psi =$$

$$= \overset{b}{\underset{a}{V}} (\varphi - \psi)).$$

(C) Nechť posloupnost $\{f_n\} \subset BV(\langle a,b \rangle)$ je ρ-cauchyovská. Lehko zjistíme (obdobně jako při důkazu (B)), že posloupnost $\{f_n\}$ je cauchyovská vzhledem ke stejnoměrné konvergenci na $\langle a,b \rangle$. Existuje tudíž funkce f tak, že

$f_n \rightrightarrows f$ na $\langle a,b \rangle$ (proč?).

Obdobně zjistíme, že posloupnost $\left\{ \overset{b}{\underset{a}{V}} f_n \right\}$ je cauchyovská (jakožto posloupnost reálných čísel!), existuje tedy vlastní $\lim \overset{b}{\underset{a}{V}} f_n$.

Důkaz ukončíme, podaří-li se nám dokázat, že $f \in BV(\langle a,b \rangle)$ a $f_n \xrightarrow{\rho} f$. Ale podle lemmatu 5.15 je

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f \leq \liminf \overset{b}{\underset{a}{V}} f_n = \lim \overset{b}{\underset{a}{V}} f_n < +\infty,$$

tedy $f \in BV(\langle a,b \rangle)$.

Snažme se dokázat, že $f_n \xrightarrow{\rho} f$. Buď tedy $n \in N$ a $\varepsilon > 0$. Potom

$$\lim_{k \to \infty} (f_k - f_n) = f - f_n,$$

tudíž (opět podle 5.15)

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} (f - f_n) \leq \liminf_{k \to \infty} \overset{b}{\underset{a}{V}} (f_k - f_n).$$

Nalezněme nyní M tak, aby pro $i,j \geq M$ bylo $\overset{b}{\underset{a}{V}} (f_i - f_j) < \varepsilon$.

Podle předešlého pak bude $\overset{b}{\underset{a}{V}} (f - f_j) \leq \varepsilon$ pro $j \geq M$ a tvrzení vyplyne z rovnosti

$$\rho(f_n, f) = \left| f_n(a) - f(a) \right| + \overset{b}{\underset{a}{V}} (f_n - f)$$

(dokončete důkaz podrobně sami!).

$\boxed{5.18}$ **Problém.** Zjistěte, zda implikaci v 5.17.B lze obrátit, tj. zda platí

$$f_n \in BV(\langle a,b\rangle),\ f_n \rightrightarrows f \quad v \langle a,b\rangle,\quad \overset{b}{\underset{a}{V}} f_n \to \overset{b}{\underset{a}{V}} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow{\rho} f .$$

Co když přidáme ještě předpoklad $f \in BV(\langle a,b\rangle)$?

D. CVIČENÍ A PROBLÉMY

$\boxed{5.A}$ **Cvičení.** Buďte $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $f(x) = x^{\alpha} \sin \frac{1}{x^{\beta}}$, $x \in (0,1\rangle$, $f(0) = 0$.

Určete (v závislosti na α, β), kdy $f \in BV(\langle 0,1\rangle)$!

$\boxed{5.B}$ **Cvičení.** Je-li $f \in BV(\langle a,b\rangle)$ a $\inf \left\{ \left| f(x) \right| ; x \in \langle a,b\rangle \right\} > 0$, je $\frac{1}{f} \in BV(\langle a,b\rangle)$. Dokažte! Stačilo by předpokládat, že $f(x) > 0$ pro všechna $x \in \langle a,b\rangle$?

$\boxed{5.C}$ **Cvičení.**

(A) Musí složená funkce ze dvou funkcí konečné variace být funkcí konečné variace? (Formulujte přesněji!)

(B) Nechť $\psi \in BV(\langle a,b\rangle)$, $\psi(\langle a,b\rangle) \subset \langle \alpha, \beta\rangle$, nechť funkce φ je lipschitzovská na $\langle \alpha, \beta\rangle$ (viz 5.2.d). Potom $\varphi * \psi \in BV(\langle a,b\rangle)$.

(C) Je-li $f \in BV(\langle a,b\rangle)$, $p \geq 1$, potom $\left| f \right|^p \in BV(\langle a,b\rangle)$.

$\boxed{5.D}$ **Cvičení.** Je-li $f \in Lip_1(\langle a,b\rangle)$ (viz 5.2.d), je $\overset{*}{f} \in Lip_1(\langle a,b\rangle)$.

$\boxed{5.E}$ **Cvičení.** Buď $\overset{*}{f}$ spojitá v bodě $x \in \langle a,b\rangle$ ($f \in BV(\langle a,b\rangle)$). Potom i funkce f (a tedy i funkce $\overset{+}{f}, \overset{-}{f}$) je spojitá v x. Dokažte a porovnejte s 5.10.B.

__Návod.__ Využijte nerovnost

$$\left| f(x) - f(y) \right| \leq \overset{y}{\underset{x}{V}} f = \overset{*}{f}(y) - \overset{*}{f}(x) .$$

Platí tvrzení i pro spojitost zleva či zprava? Jest správná implikace:

$$\overset{+}{f} \text{ spojitá v } x \Longrightarrow f \text{ spojitá v } x \ ?$$

Shrňte všechna tvrzení o souvislostech spojitosti funkcí $f, \overset{*}{f}, \overset{+}{f}, \overset{-}{f}$!

$\boxed{5.F}$ **Problém.** V 5.10.B a ve cvičení 5.E jsme ukázali platnost ekvivalence :

$$f \text{ spojitá v } x \Longleftrightarrow \overset{*}{f} \text{ spojitá v } x .$$

Zkoumejte vztah mezi

existencí $f'(x)$ a existencí $(\overset{*}{f})'(x)$.

$\boxed{5.G}$ **Cvičení.** Buď $f \in BV(\langle a,b\rangle)$, $A = \overset{*}{f}(\langle a,b\rangle)$.

Dokažte, že $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \operatorname{diam} A$.

$\boxed{5.H}$ **Systém $BV(\langle a,b\rangle)$ jako svaz.**

(A) Buď X množina. Relaci $\preceq$ na X nazveme __částečným uspořádáním__, jestliže platí

(i) $x \preceq y$, $y \preceq z \Longrightarrow x \preceq z$,

(ii) $x \preceq y$, $y \preceq z \Longrightarrow x = y$,

(iii) $x \preceq x$.

(B) Nechť $(X, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina, nechť $\emptyset \neq A \subset X$. Řekneme, že $G \in X$ je supremem množiny X (píšeme $G = \sup A$), je-li splněno:

(1) pro všechna $x \in A$ platí $x \preceq G$,

(2) jestliže pro všechna $x \in A$ je $x \preceq G'(G' \in X)$, potom $G \preceq G'$.

Obdobně definujeme infimum.

(C) Ukažte, že $\sup A$ nemusí vždy existovat. Existuje-li $\sup A$, je jednoznačně určeno.

(D) Částečně uspořádanou množinu nazveme __svazem__, jestliže každá dvouprvková množina má supremum a infinum.

(E) Udejte příklad částečně uspořádané množiny, která není svazem !

(F) Pro $f, g \in BV(\langle a,b\rangle)$ položme

$$f \leq g \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f(x) \leq g(x) \text{ pro každé } x \in \langle a,b\rangle$$ (přirozené uspopřirozené uspořádání funkcí!).

Ukažte, že $(BV(\langle a,b\rangle), \leq\ )$ je svaz.

__Návod.__ Použijte 5.4.c.

(G) Označme $X = \left\{ f \in BV(\langle a,b\rangle) \ ; \ f(a) = 0 \right\}$ a definujme $(f,g \in X)$

$f \preceq g \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} g - f$ je neklesající funkce na $\langle a,b\rangle$. Dokažte, že $(X, \preceq\ )$ je svaz.

__Návod.__ Ukažte, že v tomto případě $(f \in X)$

$$\sup(f,0) = \overset{+}{f} \ , \ \inf(f,0) = -\overset{-}{f}$$

a využijte poznatku, že

$\sup(f,g) = g + \sup(f - g, 0)$,

$\inf(f,g) = g + \inf(f - g, 0)$.

5.I Cvičení a problém.

(A) Ukažte, že $BV(\langle a,b\rangle) \subset R(\langle a,b\rangle)$.

Návod. Použijte Jordanovu větu a 1.8.b.

(B) Do prostoru $BV(\langle a,b\rangle)$ můžeme zavést kromě metriky ρ z 5.17 též tedy "integrální" metriku a podle 5.3.a i "supremovou" metriku. Zkoumejte vzájemný vztah těchto metrik!

5.J Cvičení.

(A) Buď f spojitá v $\langle a,b\rangle$. Položme $F: x \to \int_a^x f$, $x \in \langle a,b\rangle$. Potom $F \in BV(\langle a,b\rangle)$ a

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} F = (R) \int_a^b |f| .$$

Dokažte!

Návod. Použijte Lagrangeovu větu o střední hodnotě.

(B)* Tvrzení z (A) zůstává v platnosti i pro $f \in R(\langle a,b\rangle)$. Pokuste se o důkaz, tento však již není nikterak snadný.

Návod. Pište $F(x) = \int_a^x f^+ - \int_a^x f^-$.

(C) Speciálně z (A) plyne: Má-li funkce φ na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitou derivaci, potom $\varphi \in BV(\langle a,b\rangle)$ a

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} \varphi = \int_a^b |\varphi'| .$$

5.K Cvičení. Funkce f má konečnou variaci na $\langle a,b\rangle$, právě když ke každému $x \in \langle a,b\rangle$ existují α_x, β_x ($\alpha_x = 0$ pro $x = a$, $\beta_x = 0$ pro $x = b$, v ostatních případech α_x, β_x kladná) tak, že $\langle x - \alpha_x, x + \beta_x\rangle \subset \langle a,b\rangle$ a $f \in BV(\langle x - \alpha_x, x + \beta_x\rangle)$. Jinými slovy, funkce f má konečnou variaci na $\langle a,b\rangle$, právě když f je "lokálně" konečné variace na $\langle a,b\rangle$.

Dokažte!

Návod. Použijte 5.5 a Borelovu větu.

5.L* Cvičení.

(A) Definujme usměrnění na množině $\mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$ jako v 1.K.a.5 (tj. $D_1 \preceq^* D_2 \iff \nu(D_1) \leq \nu(D_2)$). Buď f spojitá funkce na $\langle a,b\rangle$. Potom

$$\lim (T(f,D) ; \mathcal{D}(\langle a,b\rangle), \preceq^*) = \overset{b}{\underset{a}{V}} f$$

(často též píšeme $\lim_{\nu(D)\to 0} T(f,D) = \bigvee_a^b f$).

Dokažte!

Návod. Zvolte $A < \bigvee_a^b f$, najděte $D_o \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$,

$D_o = \{ a = x_o < x_1 < \dots < x_n = b \}$ tak, aby $T(f,D_o) > A$.

Využitím stejnoměrné spojitosti f nalezněte $\delta > 0$ tak, aby

$$|f(x) - f(y)| < \frac{T(f,D_o) - A}{4\,n}, \text{ kdykoliv } |x-y| < \delta .$$

Konečně ukažte, že pro každé $D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$, pro které $\nu(D) < \delta$, platí $T(f,D) > A$.

(B) Ukažte, že pro nespojité funkce tvrzení neplatí.

$\boxed{5.M}$ Cvičení. Jak vypadá lineární obal množiny všech nerostoucích (resp. rostoucích, resp. monotonních) funkcí v $\langle a,b\rangle$?

Poznámka. Buď W vektorový prostor, $A \subset W$. Nejmenší vektorový podprostor W obsahující množinu A (lze ukázat, že vždy existuje a je jednoznačně určen) nazveme lineárním obalem množiny A. V našem případě volíme za W systém všech funkcí na intervalu $\langle a,b\rangle$ s obvyklými operacemi).

$\boxed{5.N}$ Cvičení. Buď ψ Riemannova funkce na intervalu $\langle 0,1\rangle$ (viz 1.3.d). Rozhodněte, zda $\psi \in BV(\langle 0,1\rangle)$, resp. trochu obecněji - pro jaká k je $\psi^k \in BV(\langle 0,1\rangle)$?

$\boxed{5.O^*}$ Cvičení. Buďte $f_n \in BV(\langle a,b\rangle)$ a předpokládejme, že

(i) existuje K tak, že $\bigvee_a^b f_n \leq K$ pro každé n (funkce f_n mají stejně omezené variace),

(ii) posloupnost reálných čísel $\{f_n(a)\}$ je omezená.

Potom existuje $f \in BV(\langle a,b\rangle)$ a vybraná posloupnost $\{f_{n_k}\}$ z posloupnosti $\{f_n\}$ tak, že

$$\lim f_{n_k}(x) = f(x) \quad \text{pro každé } x \in \langle a,b\rangle .$$

Poznámka. Uvedené větě se obvykle říká Hellyova věta. Porovnejte ji se známou Bolzano-Weierstrassovou větou pro reálná čísla (z každé omezené posloupnosti reálných čísel lze vybrat konvergentní posloupnost).

Návod k důkazu. Předpokládejte, že všechny funkce f_n jsou v intervalu $\langle a,b\rangle$ neklesající (jinak použijte Jordanovu větu o rozkladu). Nechť $\{x_n\}$ je spočetná hustá podmnožina v $\langle a,b\rangle$ obsahující body a,b (existuje vůbec?).

(a) Ukažte, že existuje posloupnost $\{n_k\}$ tak, že pro každé $i \in N$ je posloupnost $\{ f_{n_k}(x_i) \}$ konvergentní (použijte Bolzano-Weierstrassovu větu a diagonální metodu).

(b) Označte $\hat{f}(x) = \limsup f_{n_k}(x)$ pro $x \in \langle a,b \rangle$. Zřejmě $\hat{f}(x_i) = \lim f_{n_k}(x_i)$ pro každé i.

(c) Ukažte dále, že $\hat{f}(x) = \lim f_{n_k}(x)$ v každém bodě x, ve kterém je funkce $\hat{f}$ spojitá. Zvolte $\varepsilon > 0$, nalezněte x_p, x_q, $x_p < x < x_q$ tak, aby

$$|\hat{f}(x_p) - \hat{f}(x_q)| < \varepsilon, \quad |\hat{f}(x_q) - \hat{f}(x)| < \varepsilon$$

a n_o tak, aby

$$|\hat{f}(x_p) - f_{n_k}(x_p)| < \varepsilon, \quad | \hat{f}(x_q) - f_{n_k}(x_q)| < \varepsilon,$$

kdykoliv $n_k > n_o$.

(d) Funkce $\hat{f}$ je nespojitá nejvýše v spočetné množině bodů $\{y_n\}$ (proč?). Posloupnosti reálných čísel $\{ f_{n_k}(y_i) \}$ jsou opět omezené a stejně jako v (a) ještě jednou vyberme posloupnost $\{ f_{n_k'} \}$ z posloupnosti $\{ f_{n_k} \}$ tak, aby $\lim f_{n_k'}(x)$ existovala pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$.

6. Riemann-Stieltjesův integrál

Obsah:

A. DEFINICE A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI RS-INTEGRÁLU (φ neklesající)

Různé fyzikální problémy, jakož i čistě teoretické otázky nás vedou přirozeným způsobem k zobecnění definice Riemannova integrálu. V tomto odstavci vybudujeme teorii Riemann-Stieltjesova integrálu. Přesně jako tomu bylo u R-integrálu, kde jsme měli možnost volby celé řady ekvivalentních definic (viz 1.1, 1.25, 1.J, 1.K), máme i pro definici RS-integrálu různé varianty definice. Přiklonil jsem se k jedné z nich, ostatní způsoby zavedení RS-integrálu jsou v odstavci D (6.21, 6.26) či ve cvičení 6.S. Při tom již není zřejmé, zda různé definice RS-integrálu jsou ekvivalentní (a také tomu tak není!).

6.1 Definice RS-integrálu.

Buď φ neklesající funkce na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$, f buď omezená funkce na $\langle a,b\rangle$ a $D = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \}$ buď dělení intervalu $\langle a,b\rangle$.

Utvořme tzv. horní a dolní součet,

$$S_\varphi(f;D) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) \cdot (\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) ,$$

$$s_\varphi(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x) \cdot (\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) .$$

Stejně jako v 1.5 lze dokázat (provádějte!), že $s_\varphi(f;D_1) \leq S_\varphi(f,D_2)$, kdykoliv $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$.

Můžeme tedy definovat horní a dolní RS-integrál vztahy

$$(RS)\overline{\int_a^b} f\, d\varphi = \inf\left\{ S_\varphi(f;D);\; D\in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)\right\},$$

$$(RS)\underline{\int_a^b} f\, d\varphi = \sup\left\{ s_\varphi(f;D)\,;\; D\in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)\right\}.$$

Zřejmě je vždy splněna nerovnost $(RS)\underline{\int_a^b} f\, d\varphi \le (RS)\overline{\int_a^b} f\, d\varphi$.

Systém všech funkcí f , pro něž (při dané funkci φ !)

$(RS)\underline{\int_a^b} f\cdot d\varphi = (RS)\overline{\int_a^b} f\, d\varphi$ značme symbolem $R_\varphi(\langle a,b\rangle)$ a společnou hodnotu horního a dolního integrálu značme v tomto případě $(RS)\int_a^b f\, d\varphi$, či krátce $\int_a^b f\, d\varphi$, a říkejme tomuto číslu <u>Riemann-Stieltjesův integrál</u> funkce f podle funkce φ přes interval $\langle a,b\rangle$.

6.2 <u>Poznámky</u>.

(A) Riemannův integrál je tedy speciálním případem RS-integrálu a obdržíme jej volbou funkce $\varphi(x) = x$.

(B) Bylo by vhodné, kdybyste si již nyní vyřešili některá ze cvičení 6.A, kde jsou udány konkrétní příklady RS-integrálů.

(C) Při vyšetřování vlastností RS-integrálu můžeme zkoumat integrál $\int_a^b f\, d\varphi$:

(a) v závislosti na funkci f ,

(b) v závislosti na funkci φ ,

(c) v závislosti na intervalu $\langle a,b\rangle$.

Nejdříve si ovšem odvodíme některé existenční podmínky. Předpokládejme v dalším, že φ je neklesající funkce v intervalu $\langle a,b\rangle$, f omezená funkce v $\langle a,b\rangle$.

6.3 <u>Věta</u> (nutná a postačující podmínka existence).

Funkce $f \in R_\varphi(\langle a,b\rangle)$, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít dělení $D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$ tak, že $S_\varphi(f;D) - s_\varphi(f;D) < \varepsilon$.

<u>Důkaz.</u> Proveďte sami podle důkazu věty 1.7.

6.4 <u>Věta</u> (postačující podmínka integrability).

Každá spojitá funkce v intervalu $\langle a,b\rangle$ leží v systému $R_\varphi(\langle a,b\rangle)$, tedy $\mathcal{C}(\langle a,b\rangle) \subset R_\varphi(\langle a,b\rangle)$.

Důkaz (obdobný důkazu věty 1.8.a). Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme dělení $D \equiv \left\{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \right\}$ tak, aby

$$\sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) - \inf_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) < \varepsilon$$

pro všechna i $(i = 1, \dots, n)$. Potom ovšem

$$S_{\varphi}(f;D) - s_{\varphi}(f;D) < \varepsilon \cdot (\varphi(b) - \varphi(a)) ,$$

odkud již plyne podle 6.3 tvrzení.

6.5 Věta (vlastnosti RS- integrálu v "závislosti na funkci f").

Platí následující implikace:

(A) $f, g \in R_{\varphi}(\langle a,b \rangle) \Rightarrow f + g \in R_{\varphi}(\langle a,b \rangle)$ a

$$\int_a^b (f + g)\, d\varphi = \int_a^b f\, d\varphi + \int_a^b g\, d\varphi ,$$

(B) $f \in R_{\varphi}(\langle a,b \rangle)$, $\lambda \in E_1 \Rightarrow \lambda f \in R_{\varphi}(\langle a,b \rangle)$ a

$$\int_a^b \lambda f\, d\varphi = \lambda \int_a^b f\, d\varphi ,$$

(C) $f \in R_{\varphi}(\langle a,b \rangle)$, $f \geq 0$ v $\langle a,b \rangle \Rightarrow \int_a^b f\, d\varphi \geq 0$.

Důkaz. Tvrzení dokažte sami. Použijte analogické důkazy vět 1.11, 1.12.

6.6 Věta (další vlastnosti RS-integrálu).

Platí následující implikace:

(A) $f \in R_{\varphi}(\langle a,b \rangle) \Rightarrow |f| \in R_{\varphi}(\langle a,b \rangle)$ a

$$\left| \int_a^b f\, d\varphi \right| \leq \int_a^b |f|\, d\varphi ,$$

(B) $f, g \in R_{\varphi}(\langle a,b \rangle) \Rightarrow \max(f,g),\ \min(f,g) \in R_{\varphi}(\langle a,b \rangle)$,

(C) $f, g \in R_{\varphi}(\langle a,b \rangle) \Rightarrow f.g \in R_{\varphi}(\langle a,b \rangle)$.

Důkaz. Opět dokazujte sami podle 1.15, 1.17.

6.7 Věta (vlastnosti RS-integrálu v "závislosti na funkci φ ").

Platí implikace:

(A) $f \in R_{\varphi}(\langle a,b\rangle) \cap R_{\psi}(\langle a,b\rangle) \Rightarrow f \in R_{\varphi+\psi}(\langle a,b\rangle)$ a

$$\int_a^b f \, d(\varphi + \psi) = \int_a^b f \, d\varphi + \int_a^b f \, d\psi \ ,$$

(B) $f \in R_{\varphi}(\langle a,b\rangle)$, $c \geq 0 \Rightarrow f \in R_{c\varphi}(\langle a,b\rangle)$ a

$$\int_a^b f \, d(c\,\varphi) = c \int_a^b f \, d\varphi \ .$$

Důkaz.

(A) Buď $D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$, potom

$$S_{\varphi+\psi}(f,D) = S_{\varphi}(f,D) + S_{\psi}(f,D) \ .$$

Tedy nerovnost

$$\overline{\int_a^b} f \, d(\varphi + \psi) \leq S_{\varphi}(f,D_1) + S_{\psi}(f,D_2)$$

platí pro každé $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$, (provádějte podrobně, viz též důkaz věty 1.11), tudíž i

$$\overline{\int_a^b} f \, d(\varphi + \psi) \leq \int_a^b f \, d\varphi + \int_a^b f \, d\psi \ .$$

Obdobná nerovnost se dokáže pro dolní integrál a jejich spojením obdržíme důkaz (A).

(B) Dokazujte sami!

$\boxed{6.8}$ Věta (vlastnosti RS-integrálu v "závislosti na $\langle a,b\rangle$ ").

(A) $f \in R_{\varphi}(\langle a,b\rangle)$, $a < c < b \Rightarrow f \in R_{\varphi}(\langle a,c\rangle)$, $f \in R_{\varphi}(\langle c,b\rangle)$ a

$$\int_a^b f \, d\varphi = \int_a^c f \, d\varphi + \int_c^b f \, d\varphi$$

(viz poznámku v 1.18!).

(B) $f \in R_{\varphi}(\langle a,c\rangle)$, $f \in R_{\varphi}(\langle c,b\rangle) \Rightarrow f \in R_{\varphi}(\langle a,b\rangle)$ a

$$\int_a^c f \, d\varphi + \int_c^b f \, d\varphi = \int_a^b f \, d\varphi \ .$$

Důkaz. Proveďte sami podle důkazů 1.18, 1.19 .

$\boxed{6.9}$ Poznámka. Dále bychom mohli vyšetřovat - obdobně jako u Riemannova integrálu - integrál $\int_a^x f\,d\varphi$ jakožto funkci horní meze, mohli bychom zkoumat otázky limitních přechodů

$$f_n \to f \overset{?}{\Longrightarrow} \int_a^b f_n\,d\varphi \to \int_a^b f\,d\varphi ,$$

$$\varphi_n \to \varphi \overset{?}{\Longrightarrow} \int_a^b f\,d\varphi_n \to \int_a^b f\,d\varphi ,$$

vyšetřovat "Jordan-Peano-Stieltjesův" objem, rovněž jako řadu dalších otázek. Nebudeme nyní tyto problémy vyšetřovat, ponecháme si je do odstavce (D) a do cvičení.

$\boxed{6.10}$ Poznámka. Ukážeme, že již neplatí analogické tvrzení jako v 1.23, tj. není správná věta:

"Nechť $\{D_n\} \subset \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$ je posloupnost dělení s vlastností $\lim \nu(D_n) = 0$, nechť $f \in R_\varphi(\langle a,b\rangle)$. Potom

$$\lim s_\varphi(f,D_n) = \lim S_\varphi(f,D) = \int_a^b f\,d\varphi ."$$

Příklad. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \langle 0,1) , \\ 1 & \text{pro } x \in \langle 1,2\rangle , \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \langle 0,1\rangle , \\ 1 & \text{pro } x \in (1,2\rangle . \end{cases}$$

Ukažte, že $f \in R_\varphi(\langle 0,2\rangle)$, $\int_0^2 f\,d\varphi = 1$.

Buď D_n dělení $\langle 0,2\rangle$ určené dělícími body:

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < 1 - \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n} < \dots < 2 - \frac{1}{n} < 2 .$$

Zřejmě $\nu(D_n) = \frac{2}{n}$, $S(f,D_n) = 1$, $s(f,D_n) = 0$ pro každé $n \in N$. Ukažte, že v tomto případě neplatí ani tvrzení věty 1.24 a tudíž i definice RS-integrálu, kterou bychom založili na poznámce z 1.25, by nebyla ekvivalentní s naší definicí. O tom však až v odstavci D .

Vyslovíme nyní větu, podle které lze RS-integrál převést na R-integrál. Předpoklady této věty jsou však značně silné, lze vyslovit věty daleko obecnější (viz cvičení 6.D).

$\boxed{6.11}$ **Věta.**

Buď f spojitá v $\langle a,b\rangle$, nechť φ je neklesající v $\langle a,b\rangle$ a má v $\langle a,b\rangle$ spojitou derivaci. Potom

$$(RS)\int_a^b f\, d\varphi = (R)\int_a^b f\,\varphi'$$

(víme již, že oba dva integrály existují - podle kterých vět?).

Důkaz. Buď $D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$, $D = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$.
Existují $\xi_i \in (x_{i+1}, x_i)$ $(i = 1,\dots,n)$ tak, že

$$\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}) = \varphi'(\xi_i)\,.\,(x_i - x_{i-1})\,.$$

Tudíž

$$s_\varphi(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \inf f(x)\,.\,(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\varphi'(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}) \le S_\varphi(f,D).$$

Odtud již plyne (viz větu 1.24) požadovaná rovnost (proveďte podrobně!).

B. RS - INTEGRÁL VZHLEDEM K FUNKCÍM S KONEČNOU VARIACÍ

Dříve než přistoupíme k definici a základním vlastnostem, odvodíme si jedno potřebné pomocné tvrzení.

$\boxed{6.12}$ **Lemma.** Buďte f,g,h neklesající funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$, nechť $f = g+h$. Potom $R_f(\langle a,b\rangle) \subset R_g(\langle a,b\rangle)$.

Důkaz. Buď $F \in R_f(\langle a,b\rangle)$; zvolme $\varepsilon > 0$. Podle 6.3 najděme $D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$, $D = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ tak, aby

$$S_f(F,D) - s_f(F,D) < \varepsilon\,.$$

Potom

$$S_g(F,D) - s_g(F,D) = \sum_{i=1}^{n} (\sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} F(x) - \inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} F(x))\,(g(x_i) - g(x_{i-1})) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} (\sup_{\dots} F(x) - \inf_{\dots} F(x))\,(f(x_i) - f(x_{i-1})) =$$

$$= S_f(F,D) - s_f(F,D),$$

odtud opět podle 6.3 plyne tvrzení.

6.13 Definice. Buď f omezená funkce definovaná v intervalu $\langle a,b\rangle$ a φ nechť je funkce s konečnou variací v tomto intervalu. Označme symboly $\overset{+}{\varphi}$, $\bar{\varphi}$ pozitivní a negativní variaci φ na $\langle a,b\rangle$ (viz 5.11).

Řekneme, že funkce f je riemann-stieltjesovsky integrovatelná na intervalu $\langle a,b\rangle$ vzhledem k funkci φ, jestliže $f \in R_{\overset{+}{\varphi}}(\langle a,b\rangle) \cap R_{\bar{\varphi}}(\langle a,b\rangle)$.

Označme $R_{\varphi}(\langle a,b\rangle) = R_{\overset{+}{\varphi}}(\langle a,b\rangle) \cap R_{\bar{\varphi}}(\langle a,b\rangle)$ a pro $f \in R_{\varphi}(\langle a,b\rangle)$ definujme Riemann-Stieltjesův integrál vztahem

$$(RS)\int_a^b f\,d\varphi = (RS)\int_a^b f\,d\overset{+}{\varphi} - (RS)\int_a^b f\,d\bar{\varphi}\,.$$

6.14 Poznámky.

(A) Je-li funkce φ neklesající v intervalu $\langle a,b\rangle$, není nová definice v rozporu s definicí v předešlém odstavci, neboť funkce $\bar{\varphi}$ je na $\langle a,b\rangle$ konstantní (viz 5.12.D) a

$$\int_a^b f\,d\bar{\varphi} = 0\,, \quad \int_a^b f\,d\overset{+}{\varphi} = \int_a^b f\,d\varphi\,.$$

(B) Naskýtá se otázka, zda definice systému $R_{\varphi}(\langle a,b\rangle)$ závisí na Jordanově "rozkladu" funkce φ ($\varphi = f_1 - f_2$, kde f_1, f_2 jsou neklesající). Uvedeme příklad, že ano.

Buď G funkce z příkladu 1.3.c a nechť funkce h je definována předpisem

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{8}\rangle\,, \\ 1 & \text{pro } x \in (\frac{1}{8}, 1\rangle\,. \end{cases}$$

Potom $(R)\int_0^1 G(x)\,dx$ existuje, $x = [x + h(x)] - h(x)$ je Jordanův rozklad funkce x, ale přitom $(RS)\int_0^1 G\,dh$ neexistuje (viz kupř. cvičení 6.C).

(C) Z lemmatu 6.12 vyplývá, že naše definice RS-integrálu je vlastně "nejvýhodnější", dostaneme systém $R_{\varphi}(\langle a,b\rangle)$ největší. Přesněji - nechť $\varphi = f_1 - f_2$ (f_1, f_2 neklesající v $\langle a,b\rangle$). Podle 5.13 existuje v intervalu $\langle a,b\rangle$ neklesající funkce g tak, že

$$f_1 = \overset{+}{\varphi} + g\,, \qquad f_2 = \bar{\varphi} + g\,.$$

Ze 6.12 tedy vyplývá, že

$$R_{f_1}(\langle a,b\rangle) \subset R_{\overset{+}{\varphi}}(\langle a,b\rangle)\,, \quad R_{f_2}(\langle a,b\rangle) \subset R_{\bar{\varphi}}(\langle a,b\rangle)\,,$$

jinými slovy

$$R_{f_1}(\langle a,b\rangle) \cap R_{f_2}(\langle a,b\rangle) \subset R_\varphi(\langle a,b\rangle) .$$

Jak jsme viděli v (B), rovnost nemusí nastat.

(D) Problém. Nechť f,g,h jsou neklesající funkce v $\langle a,b\rangle$, nechť $f = g + h$. Víme již, že $R_f(\langle a,b\rangle) \subset R_g(\langle a,b\rangle)$. Za jakých předpokladů o funkcích f,g,h může nastat rovnost těchto systémů ?

$\boxed{6.15}$ **Věta.** Buď $\varphi \in BV(\langle a,b\rangle)$, nechť $\overset{*}{\varphi}$ je neurčitá variace funkce f na $\langle a,b\rangle$ (viz 5.9). Potom $R_\varphi(\langle a,b\rangle) = R_{\overset{*}{\varphi}}(\langle a,b\rangle)$.

Důkaz. Buď $f \in R_\varphi(\langle a,b\rangle)$; potom $f \in R_{\varphi^+}(\langle a,b\rangle) \cap R_{\varphi^-}(\langle a,b\rangle)$ a podle věty 6.7.A je $f \in R_{\varphi^+ + \varphi^-}(\langle a,b\rangle)$. Ale $\varphi^+ + \varphi^- = \overset{*}{\varphi}$.
Naopak ze vztahu $\overset{*}{\varphi} = \varphi^+ + \varphi^-$ a z lemmatu 6.12 (funkce $\overset{*}{\varphi}, \varphi^+, \varphi^-$ jsou neklesající!) plyne, že

$$R_{\overset{*}{\varphi}}(\langle a,b\rangle) \subset R_{\varphi^+}(\langle a,b\rangle) \cap R_{\varphi^-}(\langle a,b\rangle) = R_\varphi(\langle a,b\rangle) .$$

$\boxed{6.16}$ **Věta** (Základní vlastnosti RS-integrálu)

Platí následující tvrzení (předpokládáme $\varphi, \psi \in BV(\langle a,b\rangle)$) :

(A) $\mathcal{C}(\langle a,b\rangle) \subset R_\varphi(\langle a,b\rangle)$,

(B_1) $f,g \in R_\varphi(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow f + g \in R_\varphi(\langle a,b\rangle)$ a

$$\int_a^b (f+g)\,d\varphi = \int_a^b f\,d\varphi + \int_a^b g\,d\varphi ,$$

(B_2) $f \in R_\varphi(\langle a,b\rangle)$, $c \in E_1 \Longrightarrow cf \in R_\varphi(\langle a,b\rangle)$ a

$$\int_a^b cf\,d\varphi = c\int_a^b f\,d\varphi ,$$

(C_1) $f \in R_\varphi(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow |f| \in R_\varphi(\langle a,b\rangle)$ ($= R_{\overset{*}{\varphi}}(\langle a,b\rangle)$) a

$$\left|\int_a^b f\,d\varphi\right| \leq \int_a^b |f|\,d\overset{*}{\varphi} \quad (!!) ,$$

(C_2) $f,g \in R_\varphi(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow \max(f,g), \min(f,g) \in R_\varphi(\langle a,b\rangle)$,

(C_3) $f,g \in R_\varphi(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow f.g \in R_\varphi(\langle a,b\rangle)$,

(D_1) $f \in R_\varphi(\langle a,b\rangle) \cap R_\psi(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow f \in R_{\varphi+\psi}(\langle a,b\rangle)$ a

$$\int_a^b f\,d(\varphi+\psi) = \int_a^b f\,d\varphi + \int_a^b f\,d\psi ,$$

(D_2) $f \in R_\varphi(\langle a,b\rangle)$, $c \in E_1 \Longrightarrow f \in R_{c\varphi}(\langle a,b\rangle)$ a

$$\int_a^b f\,d(c\varphi) = c\int_a^b f\,d\varphi ,$$

(E_1) $\quad f \in R_\varphi(\langle a,b\rangle)$, $a<c<b \Longrightarrow f \in R_\varphi(\langle a,c\rangle)$, $f \in R_\varphi(\langle c,b\rangle)$

a $$\int_a^b f\,d\varphi = \int_a^c f\,d\varphi + \int_c^b f\,d\varphi ,$$

(E_2) $\quad f \in R_\varphi(\langle a,c\rangle)$, $f \in R_\varphi(\langle c,b\rangle) \Longrightarrow f \in R_\varphi(\langle a,b\rangle)$ a

$$\int_a^b f\,d\varphi = \int_a^c f\,d\varphi + \int_c^b f\,d\varphi .$$

Důkaz. Důkazy plynou ihned z příslušných vět z odstavce (A) a z definice systému $R_\varphi(\langle a,b\rangle)$. Pro ilustraci dokážeme (C_3), nerovnost v (C_1) a (D_1), ostatní proveďte sami.

(C_3): Buďte $f,g \in R_\varphi(\langle a,b\rangle)$, tj. $f,g \in R_{\overset{+}{\varphi}}(\langle a,b\rangle) \cap R_{\bar{\varphi}}(\langle a,b\rangle)$.
Podle 6.6.C ovšem $f.g \in R_{\overset{+}{\varphi}}(\langle a,b\rangle) \cap R_{\bar{\varphi}}(\langle a,b\rangle) = R_\varphi(\langle a,b\rangle)$.

(C_1): Obdobně dokážeme, že $|f| \in R_\varphi(\langle a,b\rangle)$, kdykoliv $f \in R_\varphi(\langle a,b\rangle)$.
Potom

$$\left|\int_a^b f\,d\varphi\right| = \left|\int_a^b f\,d\overset{+}{\varphi} - \int_a^b f\,d\bar{\varphi}\right| \le \left|\int_a^b f\,d\overset{+}{\varphi}\right| + \left|\int_a^b f\,d\bar{\varphi}\right| \le$$

$$\le \int_a^b |f|\,d\overset{+}{\varphi} + \int_a^b |f|\,d\bar{\varphi} = \int_a^b |f|\,d\,(\overset{+}{\varphi} + \bar{\varphi}) =$$

$$= \int_a^b |f|\,d\,\overset{*}{\varphi}$$

(kterých vět jsme používali?) .

(D_1): Nechť $f \in R_\varphi(\langle a,b\rangle) \cap R_\psi(\langle a,b\rangle)$, tj. nechť
$f \in R_{\overset{+}{\varphi}}(\langle a,b\rangle) \cap R_{\bar{\varphi}}(\langle a,b\rangle) \cap R_{\overset{+}{\psi}}(\langle a,b\rangle) \cap R_{\bar{\psi}}(\langle a,b\rangle)$.
Podle 6.7.A je

$$f \in R_{\overset{+}{\varphi}+\overset{+}{\psi}}(\langle a,b\rangle) \cap R_{\bar{\varphi}+\bar{\psi}}(\langle a,b\rangle)$$

a

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b f\,d\,(\overset{+}{\varphi}+\overset{+}{\psi}) &= \int_a^b f\,d\overset{+}{\varphi} + \int_a^b f\,d\overset{+}{\psi} ,\\ \int_a^b f\,d\,(\bar{\varphi}+\bar{\psi}) &= \int_a^b f\,d\bar{\varphi} + \int_a^b f\,d\bar{\psi} . \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Obtíž je nyní v tom, že nevíme, zda-li positivní (negativní) variace funkce $H = \varphi + \psi$ je rovna $\overset{+}{\varphi} + \overset{+}{\psi} - (\bar{\varphi} + \bar{\psi})$ - ostatně, platí toto?

Ale ze vztahu

$$\varphi + \psi = \varphi^+ + \psi^+ - (\varphi^- + \psi^-)$$

a z věty 5.13 plyne existence neklesající funkce g na $\langle a,b\rangle$ takové, že

$$\varphi^+ + \psi^+ = \overset{+}{H} + g\,, \qquad \varphi^- + \psi^- = \bar{H} + g\,.$$

Odtud pomocí 6.12 dostáváme, že

$$f \in R_{H}^{+}(\langle a,b\rangle) \cap R_{\bar{H}}(\langle a,b\rangle) \cap R_g(\langle a,b\rangle)\,.$$

Tedy konečně $f \in R_H(\langle a,b\rangle)$ $(H = \varphi + \psi\,!)$ a

$$\int_a^b f\,d(\varphi^+ + \psi^+) = \int_a^b f\,d\overset{+}{H} + \int_a^b f\,dg\,, \quad \int_a^b f\,d(\varphi^- + \psi^-) = \int_a^b f\,d\bar{H} + \int_a^b f\,dg\,,$$

což ve spojení s (*) dá hledanou rovnost.

$\boxed{6.17}$

V dalším ukážeme, jakým jiným způsobem lze ještě definovat Riemann-Stieltjesův integrál ; ukážeme, proč jsme se omezili v naší definici pouze na omezené funkce f a na funkce φ s konečnou variací. Podotýkám , že se jedná o poněkud obtížnější partii a doporučuji ji ke studiu pouze lepším studentům.

C.* ZOBECNĚNÉ POSLOUPNOSTI A LIMITY

$\boxed{6.18}$ Definice. Zopakujte si pojmy - "usměrněný soubor", "zobecněná posloupnost", "zobecněná limita" - které jsme zavedli ve cvičení 1.K. Místo symbolu $\lim\,(F,A,\preceq)$ použijme označení $\lim_x F(x)$ či též $\lim\limits_{\preceq} F$.

$\boxed{6.19}$ Cvičení. Nechť $(D,\preceq)$ je usměrněný soubor; f,g buďte reálné funkce na D . Dokažte následující tvrzení.

(A) Limita $\lim_x f(x)$, pokud existuje, je jednoznačně určena.

(B) Limita $\lim_x f(x)$ existuje, právě když je splněna následující Bolzano-Cauchyova podmínka

$$(BC):\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x_0\ \forall x', x''\ (x' \succeq x_0,\ x'' \succeq x_0 \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon\,.$$

(C) Existuje-li $\lim_x f(x)$ a je-li $c \in E_1$, existuje též $\lim_x cf(x)$ a platí

$$\lim_x cf(x) = c \lim_x f(x)$$

(D) Existuje-li $\lim_x f(x)$, existuje též $\lim_x |f(x)|$ a

$$\lim_x |f(x)| = |\lim_x f(x)|\,.$$

27571 Z7

(E) Existuje-li $\lim_x f(x) = A$, můžeme nalézt $K > 0$ a $x_0 \in D$ tak, že

$$x \succeq x_0 \Longrightarrow |f(x)| \leq K .$$

(F) Existují-li limity $\lim_x f(x)$, $\lim_x g(x)$, existují též limity $\lim_x (f(x) + g(x))$, $\lim_x (f(x) \cdot g(x))$ a platí

$$\lim_x (f(x) + g(x)) = \lim_x f(x) + \lim_x g(x), \quad \lim_x (f(x) \cdot g(x)) = \lim_x f(x) \cdot \lim_x g(x) .$$

Návod.

(A) Nechť $\lim_x f(x) = A$ a současně $\lim_x f(x) = B$. Zvolte $\varepsilon > 0$ a nalezněte $x_1, x_2 \in D$ tak, aby

$$x \succeq x_1 \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \quad , \quad x \succeq x_2 \Longrightarrow |f(x) - B| < \varepsilon .$$

Existuje $x_0 \in D$, $x_0 \succeq x_1$, $x_0 \succeq x_2$. Potom

$$|A-B| \leq |A - f(x_0)| + |f(x_0) - B| < 2\varepsilon .$$

(B) Existuje-li $\lim_x f(x)$, je BC-podmínka splněna. Naopak předpokládejte platnost BC. Nalezněte $x_n \in D$ ($n = 1,2,\dots$) tak, aby

$$x' \succeq x_n , \ x'' \succeq x_n \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{1}{n} .$$

Můžete hned předpokládat, že $x_1 \preceq x_2 \preceq x_3 \preceq \dots$ (proč?) . Posloupnost reálných čísel $\{ f(x_n) \}$ je cauchyovská (neboť pro každé n, $p \in N$ je $|f(x_n) - f(x_{n+p})| < \frac{1}{n}$), tudíž existuje $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Stačí nyní dokázat, že $\lim_x f(x) = A$.

(C) - (F) . Použijte standardních metod.

D.* STIELTJESŮV INTEGRÁL JAKO ZOBECNĚNÁ LIMITA

$\boxed{6.20}$ **Definice.** Buď $\langle a,b \rangle$ uzavřený interval v E_1 . Do množiny $\mathcal{M}$ všech dvojic $\{ D, \xi \}$ (kde $D \equiv \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \}$ je dělení intervalu $\langle a,b \rangle$ a $\xi \in I(D)$ - viz 1.J.- je n-tice ($\xi_1, \dots \xi_n$) taková, že $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$)
zaveďme uspořádání $\preceq$, $\preceq^*$ podle 1.K.e,f , tj.

$$\{ D_1, \xi_1 \} \preceq \{ D_2, \xi_2 \} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} D_1 \subset D_2 \quad \text{(uspořádání dané inklusí)},$$

$$\{ D_1, \xi_1 \} \preceq^* \{ D_2, \xi_2 \} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \nu(D_2) \leq \nu(D_1) \quad \text{(uspořádání dané normou)}.$$

Lehko sami zjistíte, že dvojice $(\mathcal{M}, \trianglelefteq)$ a $(\mathcal{M}, \trianglelefteq^*)$ jsou usměrněné soubory.

Buďte nyní f, φ reálné funkce na intervalu $\langle a,b \rangle$. Pro každé $D \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$ a $\xi \in I(D)$ položme

$$\sigma_\varphi(f,D,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) .$$

Zřejmě $\sigma_\varphi(f,\cdot,\cdot)$ je funkce na $\mathcal{M}$ a můžeme tudíž uvažovat její limity vzhledem k usměrněním $\trianglelefteq$ a $\trianglelefteq^*$.

6.21 <u>Definice.</u> Podržme označení z předchozího odstavce. Existuje-li zobecněná limita $\lim\limits_{\trianglelefteq} \sigma_\varphi(f,D,\xi)$ vzhledem k uspořádání $\trianglelefteq$, řekneme, že funkce f má <u>Stieltjesův i-integrál</u> (krátce ^{i}S-integrál) podle funkce φ na intervalu $\langle a,b \rangle$. Klademe přitom

$$({}^{i}S)\int_a^b f\,d\varphi \overset{\text{def}}{=} \lim_{\trianglelefteq} \sigma_\varphi(f,D,\xi) .$$

Můžeme nyní – při pevné funkci φ – zkoumat třídu všech funkcí f, pro něž integrál $({}^{i}S)\int_a^b f\,d\varphi$ existuje. Označme tuto třídu symbolem ${}^{i}S_\varphi(\langle a,b \rangle)$. (Obdobně můžeme též zkoumat – naopak při pevné funkci f – třídu všech funkcí φ, pro něž existuje integrál $({}^{i}S)\int_a^b f\,d\varphi$.)

V případě, kdy existuje zobecněná limita $\lim\limits_{\trianglelefteq^*} \sigma_\varphi(f,D,\xi)$ vzhledem k druhému uspořádání $\trianglelefteq^*$, definujeme <u>Stieltjesův n-integrál</u> (krátce ^{n}S-integrál) vztahem

$$({}^{n}S)\int_a^b f\,d\varphi \overset{\text{def}}{=} \lim_{\trianglelefteq^*} \sigma_\varphi(f,D,\xi);$$

přitom symbolem ${}^{n}S_\varphi(\langle a,b \rangle)$ označíme množinu všech funkcí f, pro něž tento integrál existuje.

6.22 <u>Poznámky.</u>

(A) Přepíšeme-li definici zobecněné limity, obdržíme následující tvrzení

(i) Integrál $({}^{i}S)\int_a^b f\,d\varphi$ existuje, právě když existuje $A \in E_1$ s vlastností:

"ke každému $\varepsilon > 0$ můžeme nalézt dělení $D_0 \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$ tak, že $|\sigma_\varphi(f,D,\xi) - A| < \varepsilon$, kdykoliv $D \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$, $D_0 \subset D$, $\xi \in I(D)$".

Potom zřejmě $A = ({}^{i}S)\int_a^b f\,d\varphi$ - porovnejte s 1.J.a!)

(n) Integrál $({}^{n}S)\int_a^b f\,d\varphi$ existuje, právě když existuje $B \in E_1$ s vlastností:

"ke každému $\varepsilon > 0$ můžeme nalézt $\delta > 0$ tak, že $|\sigma_\varphi(f,D,\xi) - B| < \varepsilon$, kdykoliv $D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$, $\nu(D) \leq \delta$ a $\xi \in I(D)$ ".

(Opět pak $B = ({}^{n}S)\int_a^b f\,d\varphi$, viz též 1.J.b.).

(B) Prostudujte si pečlivě tvrzení (i) ve cvičení 1.K. Z něj vyplývá, že ${}^{n}S_\varphi(\langle a,b\rangle) \subset {}^{i}S_\varphi(\langle a,b\rangle)$ pro každou funkci φ a

$$({}^{n}S)\int_a^b f\,d\varphi = ({}^{i}S)\int_a^b f\,d\varphi \quad \text{pro } f \in {}^{n}S_\varphi(\langle a,b\rangle) .$$

V 1.K. jsme též ukázali, že v případě Riemannova integrálu ($\varphi(x) = x$) se systémy ${}^{n}S(\langle a,b\rangle)$ a ${}^{i}S(\langle a,b\rangle)$ shodují. Je tudíž lhostejné, zda R-integrál definujeme pomocí uspořádání dělení podle inkluse či normy. Později ukážeme (viz 6.31), že systémy ${}^{i}S_\varphi(\langle a,b\rangle)$ a ${}^{n}S_\varphi(\langle a,b\rangle)$ splývají pro spojité funkce φ, zatímco pro nespojité funkce φ již mezi nimi může nastat ostrá inkluse.

(C) Prozatím nevíme, jaký je vztah integrálu $(RS)\int_a^b f\,d\varphi$ (který byl v odstavci (B) definován pouze pro omezené funkce f a funkce φ s konečnou variací!), integrálů $({}^{i}S)\int_a^b f\,d\varphi$, $({}^{n}S)\int_a^b f\,d\varphi$ a jaký je vztah systémů $R_\varphi(\langle a,b\rangle)$ a ${}^{i}S_\varphi(\langle a,b\rangle)$ či ${}^{n}S_\varphi(\langle a,b\rangle)$. O tom všem se dozvíme až v odstavci 6.38.

(D) V dalších odstavcích se spíše soustředíme na existenční otázky Stieltjesových integrálů, na jejich vzájemný vztah, na problémy, proč jsme v minulém odstavci definovali RS-integrál pouze pro omezené funkce a podle funkcí s konečnou variací; z vlastností Stieltjesových integrálů uvedeme pouze ty nejzákladnější, ostatní ponecháme do cvičení. Nejde nám v tomto odstavci o celou šíři teorie Stieltjesova integrálu, jde nám více o to, proč tuto teorii budujeme právě tímto způsobem, jak široké třídy integrovatelných funkcí nám zachytí a jaké problémy s tím vznikají.

(E) Integrály $({}^{i}S)$ a $({}^{n}S)$ mají mnoho společných vlastností. Některé věty platí pro ${}^{n}S$ integrál i pro ${}^{i}S$ integrál. Abychom je nemuseli rozepisovat, zavedeme tuto úmluvu: Jestliže budeme mluvit o S-integrálu, máme na mysli buď všude ${}^{i}S$-integrál nebo všude ${}^{n}S$-integrál. Rovněž tak používejme v dalším symbolu $S_\varphi(\langle a,b\rangle)$ a představujme si pod ním kterýkoliv ze systémů ${}^{i}S_\varphi(\langle a,b\rangle)$ či ${}^{n}S_\varphi(\langle a,b\rangle)$.

6.23 **Věta** (BC - podmínka pro existenci)

Integrál $({}^{1}S)\int_a^b f\,d\varphi$ existuje, právě když je splněna podmínka:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists D_0\in\mathscr{D}(\langle a,b\rangle)\ \forall D',\ D''\in\mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$$

$$D_0\subset D',\ D_0\subset D'',\quad \xi'\in I(D'),\quad \xi''\in I(D'')\implies$$
$$\implies\left|\sigma_\varphi(f,D',\xi')-\sigma_\varphi(f,D'',\xi'')\right|<\varepsilon.$$

Integrál $({}^{n}S)\int_a^b f\,d\varphi$ existuje, právě když je splněna podmínka:

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\ \ \forall D',\ D''\in\mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$$

$$\nu(D')\le\delta,\quad \nu(D'')\le\delta,\quad \xi'\in I(D'),\quad \xi''\in I(D'')\implies$$

$$\implies\left|\sigma_\varphi(f,D',\xi')-\sigma_\varphi(f,D'',\xi'')\right|<\varepsilon.$$

Důkaz. Plyne ihned z 6.19.B.

6.24 **Lemma.**

Nechť $f\in{}^{1}S_\varphi(\langle a,b\rangle)$. Potom platí:

"Ke každému $\varepsilon>0$ existuje $D_0\in\mathscr{D}(\langle a,b\rangle)$ tak, že kdykoliv interval $\langle c,d\rangle$ je obsažen v některém z intervalů dělení D_0 a kdykoliv $t_1,\ t_2\in\langle c,d\rangle$, potom

$$\left|(f(t_1)-f(t_2))\,(\varphi(d)-\varphi(c))\right|<\varepsilon\ ."$$

Nechť $f\in{}^{n}S_\varphi(\langle a,b\rangle)$. Potom platí:

"Ke každému $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ tak, že kdykoliv interval $\langle c,d\rangle\subset\langle a,b\rangle$ splňuje nerovnost $(d-c)\le\delta$ a kdykoliv t_1, $t_2\in\langle c,d\rangle$, potom opět

$$\left|(f(t_1)-f(t_2))\,(\varphi(d)-\varphi(c))\right|<\varepsilon\ ."$$

Důkaz. Dokážeme nejdříve první tvrzení. Zvolme $\varepsilon>0$ a nalezněme dělení

$$D_0=\left\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\right\}\quad\text{tak, aby}$$

$$D',\ D''\supset D_0,\quad \xi'\in I(D'),\quad \xi''\in I(D'')\implies\left|\sigma_\varphi(f,D',\xi')-\sigma_\varphi(f,D'',\xi'')\right|<\varepsilon.$$

Existuje k, $k\in\{1.\quad$ tak, že $\langle c,d\rangle\subset\langle x_{k-1},x_k\rangle$. Uvažujme dělení

$$D=\left\{a=x_0<x_1\qquad<x_{k-1}\le c<d\le x_k<\dots x_n<=b\right\}.$$

Zvolíme-li $\xi', \xi'' \in I(D)$ tak, aby $\xi'_i = \xi''_i$ pro $i \neq k$, $\xi'_k = t_1$, $\xi''_k = t_2$, dostáváme, že

$$\left|\sigma_\varphi(f,D,\xi') - \sigma_\varphi(f,D,\xi'')\right| = \left|(f(t_1)-f(t_2)).(\varphi(d)-\varphi(c)\right| < \varepsilon .$$

Obdobně dokažte sami druhou část tvrzení !

6.25 Věta (podmínka pro existenci $({}^nS)\int_a^b f\,d\varphi$)

Integrál $({}^nS)\int_a^b f\,d\varphi$ existuje, právě když je splněna podmínka (*) :

"Pro každou posloupnost dělení $D_n \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$ s vlastností $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$ a pro každou posloupnost $\xi_n \in I(D_n)$ existuje vlastní limita $\lim_{n\to\infty} \sigma_\varphi(f,D_n,\xi_n)$".

Důkaz. Existuje-li $({}^nS)\int_a^b f\,d\varphi$, je zřejmě podmínka (*) splněna.

(Dokažte podrobně!) Nechť naopak je podmínka (*) splněna. Poznamenejme, že hodnota limity $\lim_{n\to\infty} \sigma_\varphi(f,D_n,\xi_n)$ nezávisí na výběru posloupností D_n, ξ_n (máme-li totiž dvě posloupnosti D'_n, D''_n, $\xi'_n \in I(D'_n)$, $\xi''_n \in I(D''_n)$, s vlastností $\lim \nu(D'_n) = \lim \nu(D''_n) = 0$, můžeme utvořit posloupnost $D'_1, D''_1, D'_2, D''_2, \ldots$ a na ni aplikovat (*) - rozmyslete!). Označme tedy $A = \lim \sigma_\varphi(f,D_n,\xi_n)$ a předpokládejme, že není $\lim_{\mathcal{D}} \sigma_\varphi(f,D,\xi) = A$. Existuje $\varepsilon > 0$ tak, že ke každému $n \in N$ můžeme nalézt dělení $D_n \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$ a $\xi_n \in I(D_n)$ s vlastnostmi $\nu(D_n) < \frac{1}{n}$ a $\left|\sigma_\varphi(f,D_n,\xi_n) - A\right| > \varepsilon$. Potom ovšem $\lim \nu(D_n) = 0$ a $\lim \sigma_\varphi(f,D_n,\xi_n) \neq A$.

6.26 Poznámky.

(A) Podmínka (*), uvedená v předchozí větě, slouží mnoha autorům právě k definici Stieltjesova integrálu (viz kupř. J II, kap. X, § 7) a na ní bývá založena celá teorie.

(B) Lze vyslovit obdobnou větu i pro $({}^iS)\int_a^b f\,d\varphi$?

6.27 Věta. Nechť existuje $(S)\int_a^b f\,d\varphi$. Potom můžeme nalézt po dvou disjunktní uzavřené intervaly $I_1,\ldots,I_n$ v $\langle a,b\rangle$ takové, že

(I) funkce φ je konstantní na každém intervalu $I_1,\ldots,I_n$,

(II) funkce f je omezená na $\langle a,b\rangle - (I_1 \cup \ldots \cup I_n)$.

Důkaz. Předpokládejme, že $f \in {}^{i}S_{\varphi}(\langle a,b\rangle)$. Podle 6.24 existuje dělení

$$D = \left\{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \right\}$$

tak, že

$$\left|(f(t_1) - f(t_2)) \cdot (\varphi(d) - \varphi(c))\right| < 1 , \qquad (++)$$

kdykoliv interval $\langle c,d\rangle$ je obsažen v některém z intervalů $\langle x_{i-1},x_i\rangle$ a $t_1, t_2 \in \langle c,d\rangle$. Předpokládejme, že funkce f je neomezená v intervalu $\langle x_{i-1},x_i\rangle$. Potom $\sup\left\{\left|f(t_1)-f(t_2)\right| ; t_1,t_2 \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\right\} = +\infty$ a podle (++) tudíž $\varphi(x_i) = \varphi(x_{i-1})$. Zvolme ještě $y \in (x_{i-1}, x_i)$. Potom funkce f není omezená buďto v intervalu $\langle x_{i-1}, y\rangle$ či v intervalu $\langle y, x_i\rangle$. Nechť f není omezená v $\langle x_{i-1}, y\rangle$. Opět z (++) plyne, že $\varphi(x_{i-1}) = \varphi(y)$. Tím jsme dokázali, že funkce φ je konstantní v intervalu $\langle x_{i-1},x_i\rangle$. Nyní stačí uvažovat soustavu všech intervalů $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, na nichž funkce f není omezená a obdržíme tvrzení.

Existuje-li $({}^{n}S)\int_a^b f\,d\varphi$, existuje podle 6.22.B i $({}^{i}S)\int_a^b f\,d\varphi$ a stačí použít právě dokázané tvrzení.

6.28 Poznámky.

(A) Z právě dokázané věty je vidět, jakou roli hrají v teorii Stieltjesova integrálu omezené funkce. Protože hodnota integrálu $(S)\int_a^b f\,d\varphi$ se nezmění, jestliže pozměníme hodnoty funkce f v intervalech, kde funkce φ je konstantní (viz 6.A.b), můžeme vždy hned předpokládat, že funkce f je na <u>celém</u> intervalu $\langle a,b\rangle$ omezená.

(B) Lze vyslovit obdobné tvrzení předchozí větě, pouze role funkcí f a φ jsou prohozeny. O tom však až ve cvičení 6.O.

6.29 Věta.

(A) Nechť existuje $({}^{n}S)\int_a^b f\,d\varphi$. Potom funkce f a φ nemají v intervalu $\langle a,b\rangle$ společný bod nespojitosti.

(B) Nechť existuje $({}^{i}S)\int_a^b f\,d\varphi$. Potom v intervalu $\langle a,b\rangle$ neexistuje bod, kde by funkce f a φ byly současně nespojité zprava či zleva (tedy obě funkce f, φ mohou být v nějakém bodě nespojité, ale tento bod nesmí být bodem nespojitosti "zprava" ani "zleva" obou funkcí f, φ).

Důkaz. Dokažme tvrzení (B). Nechť existuje bod $y \in (a,b\rangle$, v němž funkce f , φ jsou nespojité zleva. Potom

$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \ \exists x', \ x'' \in (y - \delta, y) \quad |f(x') - f(y)| \geq \varepsilon$,

$|\varphi(x'') - \varphi(y)| \geq \varepsilon$.

Podle 6.24 však existuje dělení $D \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$
$D = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \}$ tak, že kdykoliv interval $\langle c,d \rangle$ je obsažen v některém z intervalů dělení D a kdykoliv $t_1, t_2 \in \langle c,d \rangle$, potom

$$|(f(t_1) - f(t_2)) \cdot (\varphi(d) - \varphi(c))| < \varepsilon^2 .$$

Nalezněme k $(k = 1,\dots,n)$ tak, aby $y \in (x_{k-1}, x_k \rangle$. Aplikujeme-li právě řečené na interval $\langle c,d \rangle = \langle x'', y \rangle$, obdržíme již lehko spor (proveďte detailně!).

Tvrzení (A) dokažte pomocí 6.24 obdobnou metodou sami!

$\boxed{6.30}$ **Věta.** Buďte f, φ omezené funkce na intervalu $\langle a,b \rangle$ (podle 6.27 a 6.0 není toto nikterak podstatné omezení). Potom integrál $({}^nS) \int_a^b f \, d\varphi$ existuje, právě když existuje $({}^iS) \int_a^b f \, d\varphi$ a funkce f, φ nemají v intervalu $\langle a,b \rangle$ společný bod nespojitosti.

Důkaz. Existuje-li $({}^nS) \int_a^b f \, d\varphi$, existuje i $({}^iS) \int_a^b f \, d\varphi$ podle 6.22.B a jak jsme právě dokázali, funkce f, φ nemají společný bod nespojitosti. Dokažme nyní obrácenou implikaci.

Označme $A = ({}^iS) \int_a^b f \, d\varphi$ a zvolme $\varepsilon > 0$. K němu můžeme nalézt dělení $D_0 \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$ tak, že platí

$$D \supset D_0 , \quad \xi \in I(D) \implies |\sigma_\varphi(f, D, \xi) - A| < \varepsilon .$$

Nechť $D_0 = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b \}$. Dále nalezněme $\delta > 0$ tak, aby

$$|(f(t_1)-f(t_2))(\varphi(d) - \varphi(x_i)) + (f(t_1)-f(t_2))(\varphi(x_i) - \varphi(c)| < \frac{\varepsilon}{n} ,$$

kdykoliv interval $\langle c,d \rangle \subset \langle x_i - \delta, x_i + \delta \rangle$ $(i = 1,\dots,n)$ a $t_1, t_2 \in \langle c,d \rangle$ (rozmyslete podrobně! využijte spojitost a omezenost funkcí f, φ).

Nechť nyní je $D \in \mathcal{D}(\langle a,b \rangle)$ s vlastností $\nu(D) < \delta$, $\xi \in I(D)$. Položme ještě $\hat{D} = D_0 \cup D$ a v intervalech dělení $\hat{D}$, v nichž neleží žádná složka vektoru ξ zvolme libovolné hodnoty a takto "doplněný" vektor ξ označme $\hat{\xi}$ (precizujte tuto myšlenku!).

Potom $\hat{D} \supset D_0$, $\hat{\xi} \in I(D)$ a

$$|\sigma_\varphi(f,D,\xi) - A| \leq |\sigma_\varphi(f,D,\xi) - \sigma_\varphi(f,\hat{D},\hat{\xi})| +$$
$$+ |\sigma_\varphi(f,\hat{D},\hat{\xi}) - A| < 2\varepsilon .$$

Tím jsme ukázali, že integrál $({}^nS)\int_a^b f\,d\varphi$ existuje a je roven A.

Proveďte tento důkaz ještě jednou a pořádně! Porovnejte též s důkazem věty 1.23.

6.31 Poznámka. Jsou-li tedy funkce f, φ omezené v intervalu $\langle a,b\rangle$ alespoň jedna z nich je navíc spojitá, potom

integrál $({}^iS)\int_a^b f\,d\varphi$ existuje, právě když existuje $({}^nS)\int_a^b f\,d\varphi$

(a oba integrály mají pochopitelně stejnou hodnotu). Speciálně pro funkci $\varphi(x) = x$, která vede k definici Riemannova integrálu, platí ${}^iS_\varphi(\langle a,b\rangle) = {}^nS_\varphi(\langle a,b\rangle)$.

V dalším ukážeme, jakou roli hrají v teorii Stieltjesova integrálu funkce s konečnou variací. Dokážeme následující věty.

(I) Je-li funkce f spojitá a φ má konečnou variaci v $\langle a,b\rangle$, potom integrál $(S)\int_a^b f\,d\varphi$ existuje (je jedno v jakém smyslu, neboť f je spojitá!!).

(II) Má-li existovat $(S)\int_a^b f\,d\varphi$ pro každou spojitou funkci f na intervalu $\langle a,b\rangle$, musí být již nutně funkce φ s konečnou variací.

(III) Má-li existovat $(S)\int_a^b f\,d\varphi$ pro každou funkci φ s konečnou variací v $\langle a,b\rangle$, musí být již funkce f spojitá v $\langle a,b\rangle$.

Ještě jednou připomeňme, že je lhostejné, zda pracujeme s ${}^iS$ či ${}^nS$-integrálem, neboť vždy zkoumáme spojité funkce !

6.32 Věta. Je-li funkce f spojitá v intervalu $\langle a,b\rangle$ a funkce φ tam má konečnou variaci, potom integrál $(S)\int_a^b f\,d\varphi$ existuje.

Důkaz. Použijeme BC-podmínku z 6.23. Označme $M = \bigvee_a^b \varphi$ a zvolme $\varepsilon > 0$.

Můžeme nalézt $\delta > 0$ (proč?) s vlastností

$$t_1, t_2 \in \langle a,b\rangle\ , \quad |t_1 - t_2| < \delta \implies |f(t_1) - f(t_2)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Buďte nyní $D', D'' \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$, $\nu(D') < \delta$, $\nu(D'') < \delta$,

$\xi' \in I(D')$, $\xi'' \in I(D'')$.

Potom

$$\left|\sigma_\varphi(f,D',\xi') - \sigma_\varphi(f,D'',\xi'')\right| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot \bigvee_a^b \varphi = \varepsilon$$

(proveďte podrobně!).

$\boxed{6.33}$ Věta. Existuje-li $(S)\int_a^b f\,d\varphi$ pro každou spojitou funkci f v $\langle a,b\rangle$, má nutně funkce φ konečnou variaci v $\langle a,b\rangle$.

Důkaz. Předpokládáme, že φ má v $\langle a,b\rangle$ nekonečnou variaci. Potom existuje takový bod $y \in \langle a,b\rangle$, že funkce φ má nekonečnou variaci v každém jeho "okolí" (viz kupř. cvičení 5.K), a tudíž i v každém jeho levém či pravém okolí (připouštíme i $y = a$ či $y = b$). Nechť pro určitost funkce φ má nekonečnou variaci v každém intervalu $\langle y-\delta, y\rangle \subset \langle a,b\rangle$, $\delta > 0$.

Můžeme nalézt rostoucí posloupnost $\{y_n\}$ s vlastnostmi

$$y_n \nearrow y,\ y_n \in (a,y)\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(y_{n+1}) - \varphi(y_n)| = +\infty .$$

Dále nalezněme posloupnost $\{c_n\}$ tak, aby

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0\ , \quad c_n > 0\ , \quad \sum_{n=1} c_n\, |\varphi(y_{n+1}) - \varphi(y_n)| = +\infty .$$

(Stačí kupř. položit $s_n = \sum_{i=1}^{n} |\varphi(y_{i+1}) - \varphi(y_i)|$, $c_n = \frac{1}{s_n}$) .

Definujme funkci f na $\langle a,b\rangle$ předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \langle a,b\rangle - (y_1, y)\ , \\ 0 & \text{pro } x = y_n \quad (n = 1,2,\dots), \\ c_n \cdot \operatorname{sign}(\varphi(y_{n+1}) - \varphi(y_n)) & \text{pro } x = \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\ , \\ \text{lineárně v intervalech } \langle y_n, \frac{1}{2}(y_n+y_{n+1})\rangle \text{ a } \langle \frac{1}{2}(y_n+y_{n+1}), y_{n+1}\rangle . \end{cases}$$

(Kreslete!) Zřejmě f je spojitá v $\langle a,b\rangle$.

Je-li nyní $D \in \mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$ libovolné dělení a přidáme-li k jeho dělícím bodům "dostatečný počet" bodů y_n (a volíme-li $\xi_i = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1})$), lehko vidíme, že $\lim \sigma_\varphi(f,D,\xi)$ nemůže existovat (opět podrobně rozveďte!).

6.34 **Věta.** Existuje-li $(S)\int_a^b f\,d\varphi$ pro každou funkci φ s konečnou variací v $\langle a,b\rangle$, je již funkce f v intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitá.

Důkaz. Buď $y \in \langle a,b\rangle$ a definujme funkci φ_y předpisem

$$\varphi_y(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \langle a,y) \\ 1 & \text{pro } x = y\,, \\ 2 & \text{pro } x \in (y,b\rangle\,. \end{cases}$$

Zřejmě $\varphi_y \in BV(\langle a,b\rangle)$, tudíž $(S)\int_a^b f\,d\varphi$ existuje. Podle 6.29 však musí být funkce f spojitá v bodě y.

6.35 **Věta** (Vlastnosti S-integrálu)

(A_1) $f,g \in S_\varphi(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow f+g \in S_\varphi(\langle a,b\rangle)$ a

$$(S)\int_a^b (f+g)\,d\varphi = (S)\int_a^b f\,d\varphi + (S)\int_a^b g\,d\varphi$$

(viz poznámku 6.22.E!),

(A_2) $f \in S_\varphi(\langle a,b\rangle)$, $c \in E_1 \Longrightarrow cf \in S_\varphi(\langle a,b\rangle)$ a

$$(S)\int_a^b c\,f\,d\varphi = c\,(S)\int_a^b f\,d\varphi\,,$$

(B_1) $f \in S_\varphi(\langle a,b\rangle) \cap S_\psi(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow f \in S_{\varphi+\psi}(\langle a,b\rangle)$ a

$$(S)\int_a^b f\,d(\varphi+\psi) = (S)\int_a^b f\,d\varphi + (S)\int_a^b f\,d\psi\,,$$

(B_2) $f \in S_\varphi(\langle a,b\rangle)$, $c \in E_1 \longrightarrow f \in S_{c\varphi}(\langle a,b\rangle)$ a

$$(S)\int_a^b f\,d(c\,\varphi) = c\,(S)\int_a^b f\,d\varphi\,,$$

(C_1) $f \in S_\varphi(\langle a,b\rangle)$, $a<c<b \Longrightarrow f \in S_\varphi(\langle a,c\rangle)$, $f \in S_\varphi(\langle c,b\rangle)$ a

$$(S)\int_a^b f\,d\varphi = (S)\int_a^c f\,d\varphi + (S)\int_c^b f\,d\varphi\,,$$

(C_2) $f \in {}^1S_\varphi(\langle a,c\rangle)$, $f \in {}^1S_\varphi(\langle c,b\rangle) \Longrightarrow f \in {}^1S_\varphi(\langle a,b\rangle)$

(neplatí pro ^{n}S-integrál! viz další poznámku).

Důkaz.

(A_1) Buď $D \in \mathscr{D}(\langle a,b \rangle)$, $\xi \in I(D)$. Potom

$$\sigma_\varphi(f+g, D, \xi) = \sigma_\varphi(f,D,\xi) + \sigma_\varphi(g,D,\xi)$$

a tvrzení dostaneme ze základních vlastností zobecněných limit (viz 6.19).

Další tvrzení dokažte obdobně sami! Kde selže důkaz tvrzení (C_2), kdybychom uvažovali ^nS-integrál?

$\boxed{6.36}$ Poznámka. Jak jsme již řekli, tvrzení (C_2) z předchozí věty neplatí pro ^nS-integrál. Jako protipříklad použijte 6.A.d. Lze však vyslovit větu:

Je-li $f \in {}^nS_\varphi(\langle a,c \rangle)$, $f \in {}^nS_\varphi(\langle c,b \rangle)$ a je-li alespoň jedna z funkcí f , φ spojitá v bodě c , potom $f \in {}^nS_\varphi(\langle a,b \rangle)$.

Dokažte!

Návod. Použijte (C_2) a 6.30.

Již jsme ukázali, jaký význam mají pro teorii Stieltjesova integrálu funkce s konečnou variací. Odvodíme nyní ještě další věty a objasníme též, jaký je vztah Stieltjesových integrálů a Riemann-Stieltjesova integrálu.

$\boxed{6.37}$ Věta. Buď f omezená funkce na $\langle a,b \rangle$ (není podstatné omezení!) a nechť φ je funkce s konečnou variací na $\langle a,b \rangle$. Označme $\overset{*}{\varphi}$, $\overset{+}{\varphi}$, $\overset{-}{\varphi}$ totální, positivní a negativní variaci funkce φ (viz 5.9, 5.11). Potom následující výroky jsou ekvivalentní:

(I) $(S)\int_a^b f \, d\varphi$ existuje

(II) $(S)\int_a^b f \, d\overset{*}{\varphi}$ existuje,

(III) $(S)\int_a^b f d\overset{+}{\varphi}$, $(S)\int_a^b f d\overset{-}{\varphi}$ existují

(integrály samozřejmě chápeme všechny jako ^nS, resp. ^iS-integrály!).

Je-li splněna kterákoliv z podmínek (I) - (III), potom

$$(S)\int_a^b f d\varphi = (S)\int_a^b f d\overset{+}{\varphi} - (S)\int_a^b f d\overset{-}{\varphi} .$$

Důkaz. Poslední rovnost plyne ihned z 6.35.B_1. Dokazujme jednotlivé implikace; myšlenky důkazů však naznačíme stručně, proveďte je do podrobností sami.

(I)$\Rightarrow$(II). Nechť existuje $({}^iS)\int_a^b f \, d\varphi$. Můžeme předpokládat, že funkce f je v intervalu $\langle a,b \rangle$ omezená (proč?). Zvolme $\varepsilon > 0$ a nalezněme dělení $D_o \in \mathscr{D}(\langle a,b \rangle)$ tak, aby

$$D \supset D_0 \Longrightarrow \overset{b}{\underset{a}{T}} (\varphi, D) < \overset{b}{\underset{a}{V}} \varphi + \varepsilon$$

$$D', D'' \supset D_0, \quad \xi' \in I(D'), \quad \xi'' \in I(D'') \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left| \sigma_\varphi(f, D', \xi') - \sigma_\varphi(f, D'', \xi'') \right| < \varepsilon .$$

Nyní stačí vhodně odhadnout výraz $\left| \sigma_\varphi(f,D', \xi') - \sigma_\varphi(f,D'', \xi'') \right|$, který si nejlépe rozepíšeme podle definice.

Existuje-li $({}^nS) \int_a^b f \, d\varphi$, existuje podle 6.30 také $({}^iS) \int_a^b f \, d\varphi$ a funkce f, φ nemají v intervalu $\langle a,b \rangle$ společný bod nespojitosti. Podle předešlého pak existuje $({}^iS) \int_a^b f \, d\varphi^*$ a jelikož podle 5.10.B, 5.E mají funkce φ , φ^* stejné body nespojitosti, existuje opět podle 6.30 integrál $({}^nS) \int_a^b f \, d\varphi^*$.

(II) $\Longrightarrow$ (I) Při důkazu použijte BC-podmínku (lze vždy předpokládat, že jedno dělení tam vystupující je zjemněním druhého !) a odhad

$$\left| \varphi(x) - \varphi(y) \right| \le \overset{y}{\underset{x}{V}} \varphi = \varphi^*(y) - \varphi^*(x).$$

(III) $\Longrightarrow$ (II) Použijte 6.35.B_1 a vztah $\varphi^* = \overset{+}{\varphi} + \bar{\varphi}$.

(I) $\Longrightarrow$ (III) Použijte opět 6.35, již dokázanou ekvivalenci (I) a (II) a vztah $\overset{+}{\varphi} = \frac{1}{2} (\varphi^* + \varphi)$, $\bar{\varphi} = \frac{1}{2} (\varphi^* - \varphi)$.

$\boxed{6.38}$ **Důsledek.** Buď f omezená v $\langle a,b \rangle$, $\varphi \in BV(\langle a,b \rangle)$. Potom $f \in R_\varphi(\langle a,b \rangle)$, právě když $f \in {}^iS_\varphi(\langle a,b \rangle)$. Dále platí rovnost

$$(RS) \int_a^b f \, d\varphi = ({}^iS) \int_a^b f \, d\varphi$$ pro každou takovou funkci f .

Důkaz. Můžeme předpokládat, že funkce φ je neklesající v $\langle a,b \rangle$ (proč?) Buď $\langle \alpha , \beta \rangle \subset \langle a,b \rangle$ uzavřený interval, $\xi_1, \xi_2 \in \langle \alpha , \beta \rangle$. Potom ze vztahů

$$\left| f(\xi_1) - f(\xi_2) \right| \le \sup_{x \in \langle \alpha, \beta \rangle} f(x) - \inf_{x \in \langle \alpha, \beta \rangle} f(x) ,$$

$$\sup_{x \in \langle \alpha, \beta \rangle} f(x) - \inf_{x \in \langle \alpha, \beta \rangle} f(x) \le \sup \left\{ \left| f(\xi_1) - f(\xi_2) \right| ; \xi_1, \xi_2 \in \langle \alpha, \beta \rangle \right\}$$

a z 6.3, 6.23 plyne první část tvrzení. Jako cvičení na zobecněné limity pak dokažte rovnost integrálů!

E. CVIČENÍ A PROBLÉMY

6.A Příklady RS-integrálů.

(a) Je-li f konstantní funkce na $\langle a,b\rangle$, φ s konečnou variací na $\langle a,b\rangle$, potom $f \in R_\varphi(\langle a,b\rangle)$.

Čemu je roven $(RS)\int_a^b f\, d\varphi$?

(b) Je-li naopak φ konstantní a f libovolná omezená na $\langle a,b\rangle$, je opět $f \in R_\varphi(\langle a,b\rangle)$. Spočítejte $(RS)\int_a^b f\, d\varphi$!

(c) Definujme funkci φ takto:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \langle 0, \tfrac{1}{2}) , \\ c & \text{pro } x = \tfrac{1}{2} , \\ d & \text{pro } x \in (\tfrac{1}{2}, 1\rangle . \end{cases}$$

Zkoumejte existenci a hodnotu $(RS)\int_0^1 f\, d\varphi$ pro různé funkce f v závislosti na c, d !

(d) Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 , \\ 1 & \text{pro } x \geq 0 , \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 , \\ 1 & \text{pro } x > 0 . \end{cases}$$

Zkoumejte existenci i hodnotu integrálů $\int_{-1}^{+1} g\, df$, $\int_{-1}^{1} g\, dg$ a též integrály $\int_{-1}^{0}$, $\int_{0}^{1}$!

(e) Buď D Dirichletova funkce v $\langle 0,1\rangle$, $\varphi \in BV(\langle 0,1\rangle)$. Zkoumejte hodnotu i existenci $\int_0^1 D\, d\varphi$.

(f)* Buď ψ Cantorova funkce na intervalu $\langle 0,1\rangle$ (viz $[\mathcal{T}]$, 8.71).

Ukažte, že $\int_0^1 x\, d\psi = \frac{1}{2}$.

Návod. Dokažte přímo. Zkuste též použít 6.38 a 6.N.

6.B Cvičení. Nechť omezená funkce f má pouze konečně mnoho bodů nespojitosti v intervalu $\langle a,b\rangle$, nechť φ je v $\langle a,b\rangle$ neklesající funkce, která nemá žádné společné body nespojitosti s funkcí f . Potom $f \in R_\varphi(\langle a,b\rangle)$, dokažte!

6.C Cvičení. Nechť $f \in R_\varphi(\langle a,b\rangle)$ (f omezená, φ neklesající). Potom v intervalu $\langle a,b\rangle$ neexistuje bod, kde by funkce f, φ byly současně nespojité zprava či zleva. Dokažte!

Návod. Dokažte nejdříve přímo pomocí definice. Poté můžete též použít 6.29 a 6.38.

6.D Substituční věty.

(a) Zopakujte si větu 6.11, kde jsme ukázali, že

$$(RS)\int_a^b f\,d\varphi = (R)\int_a^b f\varphi' \qquad (\triangle)$$

za předpokladů: f spojitá v $\langle a,b\rangle$, φ neklesající, φ' spojitá v $\langle a,b\rangle$.

(b) Ukažte příklady f, φ tak, aby vždy jeden z integrálů v rovnosti $(\triangle)$ existoval a druhý nikoliv.

(c) Ukažte, že rovnost $(\triangle)$ platí i za těchto předpokladů:

(α) $f \in R(\langle a,b\rangle)$, φ neklesající, φ' spojitá v $\langle a,b\rangle$,

(β) $f \in R_\varphi(\langle a,b\rangle)$, φ neklesající, φ' spojitá v $\langle a,b\rangle$.

(d)* Nechť $g \in R(\langle a,b\rangle)$, $F(x) = (R)\int_a^x g$ (zřejmě $F \in BV(\langle a,b\rangle)$, třeba podle 5.J). Potom

$$(RS)\int_a^b f\,dF = (R)\int_a^b fg\,,$$

existuje-li jeden z těchto integrálů. Dokažte!

(e) Odvoďte speciálně z (d): Má-li funkce F v $\langle a,b\rangle$ derivaci a je-li $F' \in R(\langle a,b\rangle)$, potom

$$(RS)\int_a^b f\,dF = (R)\int_a^b fF',$$

existuje-li jeden z těchto integrálů.

(f) Z (d) odvoďte větu 6.11 a výsledky z (c).

(g)* Poznámka. Lze odvodit obecnější větu. Buď třeba f spojitá v $\langle a,b\rangle$, $g \in \mathscr{L}(\langle a,b\rangle)$ (= lebesgueovsky integrovatelná),

$\varphi(x) = (L)\int_a^x g$. Potom opět $\varphi \in BV(\langle a,b\rangle)$ a

$$(RS)\int_a^b f\,d\varphi = (L)\int_a^b fg\,,$$

speciálně,

$$(RS)\int_a^b f\,d\varphi = (L)\int_a^b f\varphi'\,,$$

je-li f spojitá a φ absolutně spojitá v $\langle a,b\rangle$. O tom však až později.

(h) Odvoďte obdobné věty i pro S-integrály.

6.E Stieltjesův objem.

(a) Buď φ neklesající v E_1. Definujte systém množin $\mathcal{N}_\varphi$ vztahem

$$A \in \mathcal{N}_\varphi \Longleftrightarrow c_A \in R_\varphi(\langle a,b\rangle),$$

kde $\langle a,b\rangle$ je libovolný interval obsahující množinu A.
Pro $A \in \mathcal{N}_\varphi$ položte

$$\nu_\varphi A = (RS)\int_a^b c_A \, d\varphi \quad \text{(Stieltjesův objem množiny } A\text{)}$$

a zkoumejte, obdobně jako u Jordan-Peanova objemu, vlastnosti systému $\mathcal{N}_\varphi$ a množinové funkce ν_φ.

(b) Definujte též horní RS-integrál a tím i horní Stieltjesův objem. Pokuste se přenést výsledky cvičení 2.A - 2.E.

(c) Definujte též systémy $\mathcal{N}_\varphi$ a funkce ν_φ pomocí S-integrálů, zkoumejte jejich vlastnosti i vzájemný vztah.

(d) Uvažujte též libovolnou funkci φ, resp. $\varphi \in BV(\langle a,b\rangle)$ pro každý interval $\langle a,b\rangle \subset E_1$.

6.F Problém.

(a) Buď φ neklesající v $\langle a,b\rangle$. Řekneme, že množina $M \subset \langle a,b\rangle$ je φ-nulová, jestliže
ke každému $\varepsilon > 0$ existují intervaly (a_n, b_n) tak, že

$$M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(b_n-) - \varphi(a_n+)) < \varepsilon .$$

(b) Ukažte, že

(α) sjednocení spočetného systému φ-nulových množin je opět φ-nulová množina,

(β) φ-nulová množina nemůže obsahovat žádný bod nespojitosti funkce φ.

(c)* Zkoumejte, zda platí věta (f omezená v $\langle a,b\rangle$):

$$f \in R_\varphi(\langle a,b\rangle) \Longleftrightarrow \text{množina bodů nespojitosti funkce } f \text{ je } \varphi\text{-nulová.}$$

(d) Zkoumejte, zda předchozí věta bude platit, nahradíme-li systém $R_\varphi(\langle a,b\rangle)$ systémem ${}^nS_\varphi(\langle a,b\rangle)$.

6.G Cvičení. Nechť φ je neklesající v $\langle a,b\rangle$, $f \geq 0$ v $\langle a,b\rangle$.

Předpokládejme dále, že $(RS)\int_a^b f\,d\varphi = 0$. Je pravda, že potom $f = 0$ s výjimkou snad φ-nulové množiny (viz 6.F)?

Porovnejte se cvičením 1.M.d !

6.H Cvičení. Dokažte větu:

$$f_n \in R_\varphi(\langle a,b\rangle),\ f_n \rightrightarrows f \text{ v } \langle a,b\rangle \Longrightarrow f \in R_\varphi(\langle a,b\rangle) \text{ a}$$

$$\int_a^b f_n\,d\varphi \to \int_a^b f\,d\varphi.$$

Návod. Viz 1.34.

6.I Problémy.

(a) Pokuste se nalézt, obdobně jako u R-integrálu, některé nutné či postačující podmínky pro platnost implikace

$$f_n \to f \quad \text{v } \langle a,b\rangle \Longrightarrow \int_a^b f_n\,d\varphi \to \int_a^b f\,d\varphi$$

(ať jde již o RS- anebo S-integrál).

(b) Rovněž tak zkoumejte implikaci

$$\varphi_n \to \varphi \quad \text{v } \langle a,b\rangle \Longrightarrow \int_a^b f\,d\varphi_n \to \int_a^b f\,d\varphi$$

(můžete též použít (a) a 6.N).

(c) Zkoumejte $\int_a^x f\,d\varphi$ jakožto funkci horní meze pro RS- či S-integrály.

6.J* Spojité lineární funkcionály na $\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$

(a) Uvažujme prostor $\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$ všech spojitých funkcí na intervalu $\langle a,b\rangle$. Spojitým lineárním funkcionálem L na systému $\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$ rozumíme zobrazení $\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$ do E_1 splňující požadavky

(i) $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(\langle a,b\rangle),\ c_1, c_2 \in E_1 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow L(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 Lf_1 + c_2 Lf_2,$$

(ii) $f_n \in \mathcal{C}(\langle a,b\rangle),\ f_n \rightrightarrows f$ na $\langle a,b\rangle \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow Lf_n \to Lf.$$

27571 Z8

(b) Ukažte, že za předpokladu (i) lze (ii) nahradit následující ekvivalentní podmínkou

(ii*) existuje $K > 0$ tak, že pro každou funkci $f \in \mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$ platí $|Lf| \leq K \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f(x)|$.

Návod. Nechť platí (ii*). Využijte vztahu

$$|Lf_n - Lf| = |L(f_n - f)| \leq K \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f_n(x) - f(x)| .$$

Naopak, nechť platí (ii) a neplatí (ii*). Nalezněte posloupnost funkcí $f_n \in \mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$ tak, aby

$$\max |f_n(x)| = 1 , \quad Lf_n > n$$

a uvažujte posloupnost funkcí $\dfrac{f_n}{\sqrt{n}}$.

(c) Buď $\varphi \in BV(\langle a,b\rangle)$. Položíme-li

$$Lf = (RS) \int_a^b f \, d\varphi$$

pro každou spojitou funkci f na $\langle a,b\rangle$, je L spojitý lineární funkcionál na $\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$. Dokažte!

Návod. Použijte 6.35 a 6.H.

(d) Buď $g \in R(\langle a,b\rangle)$. Opět ukažte, že funkcionál L definovaný předpisem

$$Lf = (R) \int_a^b fg$$

je spojitý a lineární na prostoru $\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$.

Návod. Dokažte přímo anebo použijte (c) a 6.D.d.

(e) Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní řada, nechť $\{x_n\}$ je posloupnost bodů z $\langle a,b\rangle$. Položíme-li

$$Lf = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(x_n) ,$$

je L spojitý lineární funkcionál na $\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$. Dokažte!

(f) F.Riesz dokázal následující větu (porovnejte s (c) !):
Je-li L spojitý lineární funkcionál na prostoru $\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$, existuje funkce $\varphi \in BV(\langle a,b\rangle)$ tak, že

$$Lf = (RS) \int_a^b f \, d\varphi$$

pro každou funkci $f \in \mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$.

V tomto smyslu jsou tedy prostory $\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$ a $BV(\langle a,b\rangle)$ "duální". Rozmyslete !

(g) Podle (f) nalezněte funkci φ pro funkcionál L z (e) a (d) !

(h) E. Borel dokázal podobnou větu:

Je-li L spojitý lineární funkcionál na $\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$, potom existuje posloupnost funkcí $g_n \in R(\langle a,b\rangle)$ tak, že

$$Lf = \lim_{n\to\infty} (R) \int_a^b f\, g_n$$

pro každou funkci $f \in \mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$.

6.K Zobecněné limity.

(a) Předpokládejme, že v definici usměrnění (viz cvičení 1.K.a) vynecháme požadavek (iii). Bude potom zobecněná limita jednoznačně určená (porovnej s 6.19.A) ?

(b) Definujte "nevlastní" zobecněné limity a odvoďte jejich základní vlastnosti!

(c) Pokuste se formulovat a dokázat větu o zobecněné limitě složené funkce.

6.L Cvičení . Zkoumejte S-integrály z funkcí ve cvičení 6.A.

6.M Cvičení . Zopakujte si větu 6.27 a uvědomte si, co jsme v ní vlastně dokázali. Ukažte navíc, že v případě ^{n}S-integrálu musí být každý bod "neomezenosti" funkce f (tj. bod, v jehož každém okolí je funkce f neomezená) vnitřním bodem některého z intervalů, kde je φ konstantní; zatímco pro ^{i}S-integrál body neomezenosti funkce f mohou být i krajními body těchto intervalů.

6.N Integrace per partes.

Existuje-li $(S)\int_a^b f\, d\varphi$, existuje i $(S)\int_a^b \varphi\, df$ a platí

$$(S)\int_a^b f\, d\varphi = \Big[f\varphi \Big]_a^b - (S)\int_a^b \varphi\, df .$$

Dokažte!

Návod důkazu. Buď $D = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \}$ dělení intervalu $\langle a,b\rangle$, $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in I(D)$. Položme ještě $\xi_0 = a$, $\xi_{n+1} = b$. Dokažte nejdříve rovnost

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\,(f(x_i)-f(x_{i-1})) = \Big[f\varphi \Big]_a^b - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(\varphi(\xi_{i+1}) - \varphi(\xi_i)).$$

Nyní stačí použít definici ^{n}S- či ^{i}S-integrálu.

6.O **Cvičení.** Nechť existuje (S) $\int_a^b f\, d\varphi$. Potom existují po dvou disjunktní uzavřené intervaly $I_1,\dots, I_n$ v $\langle a,b\rangle$ takové, že

(i) funkce f je konstantní na každém intervalu $I_1,\dots,I_n$,

(ii) funkce φ je omezená na $\langle a,b\rangle - (I_1 \cup \dots \cup I_n)$.

Dokažte!

Návod. Použijte 6.N a 6.27. Pokuste se též dokázat přímo.

6.P **Cvičení.**

(a) Předpokládejte, že (S) $\int_a^b f\, df$ existuje. Potom

$$(S) \int_a^b f\, df = \frac{1}{2} (f^2(b) - f^2(a)) .$$

Dokažte!

Návod. Použijte 6.N.

(b) Ukažte, že (S) $\int_a^b f\, df$ nemusí vždy existovat.

Návod. Použijte 6.A.d či 6.29.

(c) Nechť $f^k \in S_f(\langle a,b\rangle)$. Platí potom, že

$$(S) \int_a^b f^k\, df = \frac{1}{k+1} (f^{k+1}(b) - f^{k+1}(a)) \ ?$$

6.Q **Cvičení.** Nechť $\varphi \in BV(\langle a,b\rangle)$. Potom platí

(a) $f,g \in S_\varphi(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow f.g \in S_\varphi(\langle a,b\rangle)$,

(b) $f \in S_\varphi(\langle a,b\rangle) \Longrightarrow |f| \in S_\varphi(\langle a,b\rangle)$ a

$$\left|(S) \int_a^b f\, d\varphi\right| \leq (S) \int_a^b |f|\, d\overset{*}{\varphi} .$$

Dokažte a porovnejte s 6.16. Platí uvedené implikace i bez předpokladu $\varphi \in BV(\langle a,b\rangle)$?

6.R* **Cvičení.**

(a) Nechť $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(x)$ s výjimkou nejvýše spočetně mnoha x, nechť f je spojitá v $\langle a,b\rangle$. Potom

$$(S) \int_a^b f\, d\varphi = 0 \ .$$ Ukažte !

(b) Buď φ omezené variace v $\langle a,b\rangle$ a nechť (S) $\int_a^b f\, d\varphi = 0$ pro každou spojitou funkci f v $\langle a,b\rangle$. Potom $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(x)$ pro všechna $x \in \langle a,b\rangle - T$, kde T je spočetná. Dokažte !

Návod. Položíte-li $f(x) = 1$, potom $\varphi(a) = \varphi(b)$. Dále položte

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \langle a, x_0 \rangle, \\ x_0 & \text{pro } x \in \langle x_0, b \rangle. \end{cases}$$

Podle 6.N dostanete, že

$$0 = \int_a^b f \, d\varphi = x_0 \varphi(b) - a\,\varphi(a) - (R)\int_a^{x_0} \varphi$$

a derivováním zjistíte, že $\varphi(x_0) = \varphi(b)$, je-li x_0 bod spojitosti funkce φ.

Jiný návod. Položte též $f(x) = (R)\int_a^x (\varphi(b) - \varphi(t))\,dt$

(integrál existuje! a f je spojitá podle 1.26), použijte opět 6.N a dostanete

$$0 = \int_a^b f \, d\varphi = (R)\int_a^b (\varphi(b) - \varphi(x))^2 \, dx,$$

čili - viz cvičení 1.C - $\varphi(x) = \varphi(b)$ v každém bodě spojitosti funkce φ.

$\boxed{6.S^*}$ Problém. V odstavci 6.21 jsme definovali Stieltjesův integrál jako zobecněnou limitu funkce $\sigma_\varphi(f,.,.)$ vzhledem k jistým uspořádáním, kde

$$\sigma_\varphi(f, D, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}))$$

a $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$. Pokuste se studovat vlastnosti obdobných integrálů, při jejichž definici nahradíte výraz "$f(\xi_i)(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}))$" z definice $\sigma_\varphi(f, D, \xi)$ následujícími výrazy:

(α) $f(x_{i-1})(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}))$
(β) $f(x_i)(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}))$
} tzv. Cauchyho integrály

(γ) $\frac{1}{2}(f(x_i) + f(x_{i-1}))(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}))$ ... tzv. M-integrál

(δ) $f(\xi_i)(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}))$ pro $x_{i-1} < \xi_i < x_i$

... tzv. modifikovaný S-integrál.

Zkuste nejdříve volit $\varphi(x) = x$.

7. Riemannův vícerozměrný integrál

A. DEFINICE VÍCEROZMĚRNÉHO R-INTEGRÁLU

7.1 Definice. Kartézským součinem množin $M_1, \dots, M_n$ nazýváme množinu všech n-tic $[x_1, \dots, x_n]$, kde $x_i \in M_i$ pro každé i, $i = 1, \dots, n$, a značíme jej symbolem $M_1 \times \dots \times M_n$. Kompaktním intervalem v E_r rozumíme kartézský součin r jednorozměrných uzavřených intervalů.
Nechť $I = \langle a_1, b_1 \rangle \times \dots \times \langle a_r, b_r \rangle$ je kompaktní interval v E_r.
Objemem intervalu I nazýváme číslo $\operatorname{vol} I = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_r - a_r)$.
Nechť $D_k = \left\{ a_k = x_0^k < x_1^k < \dots < x_{n_k}^k = b_k \right\}$ jsou dělení intervalů $\langle a_k, b_k \rangle$ $(k = 1, \dots, r)$. Potom systém D všech intervalů +) tvaru

$$\langle x_{i_1-1}^1, x_{i_1}^1 \rangle \times \langle x_{i_2-1}^2, x_{i_2}^2 \rangle \times \dots \times \langle x_{i_r-1}^r, x_{i_r}^r \rangle$$

nazveme dělením intervalu I. Množinu všech dělení intervalu I značme symbolem $\mathcal{D}(I)$.
Je-li $I \subset E_r$ kompaktní interval, f omezená funkce na intervalu I a $D \in \mathcal{D}(I)$ dělení intervalu I, $D = \left\{ I_i \right\}_{i=1}^N$, definujeme horní a dolní součet funkce f pro dělení D vztahy

$$S(f,D) = \sum_{i=1}^{N} \sup_{x \in I_i} f(x) \cdot \operatorname{vol} I_i ,$$

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{N} \inf_{x \in I_i} f(x) \cdot \operatorname{vol} I_i .$$

Obdobně jako v jednorozměrném případě lze poměrně snadno dokázat (proveďte !), že pro libovolná dělení $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(I)$ je

$$s(f,D_1) \leq S(f,D_2) .$$

+) Tato definice dělení není v přesné shodě s definicí dělení v 1.1, proto obě definice porovnejte !

Můžeme dále definovat horní a dolní Riemannův integrál funkce f přes interval I předpisem

$$(R)\overline{\int_I} f = \inf_{D\in\mathcal{D}(I)} S(f,D)\ , \qquad (R)\underline{\int_I} f = \sup_{D\in\mathcal{D}(I)} s(f,D)\ .$$

Vždy platí, že $(R)\underline{\int_I} f \leq (R)\overline{\int_I} f$ a v případě, že $(R)\underline{\int_I} f = (R)\overline{\int_I} f$, nazveme tuto společnou hodnotu Riemannovým integrálem funkce f přes interval I a označíme ji $(R)\int_I f$ či $(R)\int_I f(x_1,\ldots,x_r)\,dx_1\ldots dx_r$.

Systém všech omezených funkcí na intervalu I, které mají R-integrál, označme symbolem $R(I)$; těmto funkcím říkejme též riemannovsky integrovatelné funkce na intervalu I .

B. ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

7.2 Skoro stejně jako v jednorozměrném případě se odvodí následující věty. Pokuste se je sami dokázat!

(A) Funkce $f \in R(I)$, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ můžeme nalézt dělení $D \in \mathcal{D}(I)$ tak, že

$$S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon\ .$$

(B) Každá spojitá funkce na kompaktním intervalu $I \subset E_r$ je na tomto intervalu riemannovsky integrovatelná, tj. $\mathcal{C}(I) \subset R(I)$.

(C) Nechť $f \in R(I)$, $c \in E_1$. Potom $cf \in R(I)$ a

$$\int_I cf = c\int_I f\ .$$

(D) Nechť $f,g \in R(I)$, potom $f + g \in R(I)$ a

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g\ .$$

(E) Nechť $f,g \in R(I)$, $f \leq g$ na I . Potom

$$\int_I f \leq \int_I g\ .$$

(F) Nechť $f,g \in R(I)$. Potom $f \cdot g \in R(I)$.

(G) Nechť $f \in R(I)$. Potom $|f| \in R(I)$ a

$$\left|\int_I f\right| \le \int_I |f| .$$

(H) Nechť intervaly $I_1,\dots,I_N$ tvoří dělení intervalu I. Potom

$$\int_I f = \sum_{i=1}^{N} \int_{I_i} f ,$$

má-li jedna strana této rovnosti smysl (tj. buď $f \in R(I)$ anebo $f \in R(I_i)$ pro každé $i = 1,\dots,N$).

$\boxed{7.3}$ Jordan-Peanův objem v E_r . Postupujme stejně jako v kapitole 2. Všechny úvahy provádějte podrobně!

Buď $A \subset E_r$ omezená množina. Řekneme, že $A \in \mathcal{R}_r$, jestliže existuje kompaktní interval $I \subset E_r$ tak, že

$$A \subset I , \quad c_A \in R(I) .$$

Pro $A \in \mathcal{R}_r$ definujeme číslo $\nu_r A$ předpisem

$$\nu_r A = (R) \int_I c_A ,$$

kde I je libovolný kompaktní interval obsahující množinu A . Ukažte, že definice $\nu_r A$ nezávisí na volbě intervalu I ! Číslo $\nu_r A$ nazýváme Jordan-Peanův objem množiny A , množiny ze systému $\mathcal{R}_r$ pak jordan-peanovsky měřitelné množiny v E_r.

Dokažte, že platí následující věty.

(A) Systém $\mathcal{R}_r$ je množinový okruh, tj.

$$A, B \in \mathcal{R}_r \implies A \cup B,\ A \cap B ,\ A - B \in \mathcal{R}_r .$$

(B) Funkce $\nu_r : \mathcal{R}_r \longrightarrow E_1$ má tyto vlastnosti:

(I_ν) : $A \in \mathcal{R}_r \implies \nu_r A \ge 0$,

(II_ν): $\nu_r \emptyset = 0$,

(III_ν): $A,B \in \mathcal{R}_r$, $A \subset B \longrightarrow \nu_r A \le \nu_r B$,

(IV_ν): $A,B \in \mathcal{R}_r$, $A \cap B = \emptyset \implies \nu_r(A \cup B) = \nu_r A + \nu_r B$.

(C) Je-li $I \subset E_r$ kompaktní interval, je $I \in \mathcal{R}_r$ a $\nu_r I = \operatorname{vol} I$.

(D) Libovolný omezený otevřený interval $J = (a_1,b_1) \times \dots \times (a_r,b_r)$ leží v systému $\mathcal{R}_r$ a

$$\nu_r J = \nu_r \bar{J} = \operatorname{vol} \bar{J} = (b_1-a_1)\cdot \dots \cdot (b_r-a_r) .$$

(E) Jednobodové množiny leží v $\mathcal{N}_r$ a jejich objem je roven nule.

(F) Buď $A \in \mathcal{N}_r$. Potom

$$\nu A = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{N} \operatorname{vol} I_n \right\}$$

kde infimum se bere přes všechna možná konečná pokrytí množiny A kompaktními intervaly $I_1, \dots, I_n$ (ukažte, že je lze nahradit otevřenými intervaly).

C. FUBINIOVA VĚTA PRO R-INTEGRÁL

V případě jednorozměrného R-integrálu máme pro výpočet integrálu k disposici kupř. následující větu:

"Je-li funkce f spojitá v intervalu $\langle a,b \rangle$, potom

$$(R) \int_a^b f = F(b) - F(a) \text{ , kde } F \text{ znamená primitivní funkci k funkci } f$$

v $\langle a,b \rangle$."

Představte si nyní, že máte zadánu spojitou funkci $x^2 + y^2$ dvou proměnných třeba na intervalu $I = \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,2 \rangle$. Jak spočítáme

$\int_I (x^2 + y^2)\, dxdy$? Prozatím nám nezbývá nic jiného, než použít definici.

Pojem primitivní funkce pro funkci dvou proměnných není zaveden a i kdybychom jej měli, tak jaké hodnoty dosazovat za x,y ?

V dalším si odvodíme větu, jak dvourozměrné - a obecně i vícerozměrné - integrály se dají převádět na jednorozměrné integrály, k jejichž výpočtu již známe řadu metod.

$\boxed{7.4}$ **Definice.** Je-li $I \subset E_{r+s}$ kompaktní interval, $I = I_1 \times I_2$, $I_1 \subset E_r$, $I_2 \subset E_s$ kompaktní intervaly a je-li funkce f definována na intervalu I, potom nechť pro $x \in I_1$ $f^{x,*}$ znamená funkci, definovanou na intervalu I_2 předpisem

$$f^{x,*}(y) = f(x,y) \text{ , } y \in I_2 \text{ .}$$

Místo symbolu $f^{x,*}$ budeme též používat značení $f(x,.)$.

Obdobně definujeme funkci $f^{*,y}$ $(:= f(\,.\,, y))$.

$\boxed{7.5}$ **Fubiniova věta pro R-integrál.**

Nechť funkce f je spojitá v kompaktním intervalu $I \subset E_{r+s}$.

Nechť $I = I_1 \times I_2$, kde $I_1 \subset E_r$, $I_2 \subset E_s$ jsou kompaktní intervaly.

Potom pro každé $x \in I_1$ existuje integrál $\int_{I_2} f^{x,*}(y)\, dy = F(x)$,

(funkce F je spojitá v I_1) a

$$\int_I f = \int_{I_1} F(x)\, dx,$$

tj.

$$\int_{I_1} f(x,y)\, dxdy = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x,.) \right) dx$$

(podrobně si rozmyslete!). Obdobně

$$\int_I f = \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f^{*,y}(x)\, dx \right) dy .$$

[Kupříkladu tedy,

$$\int_{\langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle} (x^2+y^2)\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^2 (x^2+y^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2} dx =$$

$$= \int_0^1 (2x^2 + \frac{8}{3})\, dx = \left[\frac{2}{3} x^3 + \frac{8}{3} x \right]_0^1 = \frac{10}{3} .]$$

<u>Důkaz věty.</u> Ukážeme, že $\overline{\int_I} f \geq \overline{\int_{I_1}} F$, potom již lehko dokážeme nerovnost

$$\overline{\int_I} f \geq \overline{\int_{I_1}} F \geq \underline{\int_{I_1}} F \geq \underline{\int_I} f ,$$

a protože $f \in R(I)$, musí všude nastat rovnost.

Buď tedy $D \in \mathcal{D}(I)$ dělení intervalu I , nechť $D = D_1 \times D_2$, kde

$$D_1 = \left\{ J_i^1 \right\}_{i=1}^{k} , \quad D_2 = \left\{ J_j^2 \right\}_{j=1}^{n}$$

jsou dělení intervalů I_1 a I_2 . Položme

$$J_{i,j} = J_i^1 \times J_j^2 , \qquad V_{i,j} = \sup \left\{ f(x) \ ; \ x \in I_{i,j} \right\}$$

$(i = 1,\dots,k, \quad j=1,\dots,n)$.

Je-li $x \in I_1$, nalezněme i $(i=1,\dots,k)$ tak, aby $x \in I_i^1$. Potom

$$F(x) = \int_{I_2} f(x,.) = \sum_{j=1}^{n} \int_{I_j^2} f(x,.) \leq \sum_{j=1}^{n} V_{i,j} \text{ vol } (I_j^2)$$

(funkce $f(x,.)$ je spojitá v I_2 a tudíž $\int_{I_2} f(x,.)$ existuje),

odkud dostáváme

$$\overline{\int_{I_1}} F \leq \sum_{i=1}^{k} \overline{\int_{I_i^1}} F \leq \sum_{i=1}^{k} \overline{\int_{I_i^1}} \sum_{j=1}^{n} V_{i,j} \text{ vol } (I_j^2) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} V_{i,j} \text{ vol } (I_j^2) \text{ vol } (I_i^1) = S(f,D).$$

Tudíž $\overline{\int_{I_1}} F \leq \overline{\int_I} f$. (Dokažte sami, že funkce F je spojitá na I_1 !)

D. CVIČENÍ A PROBLÉMY

$\boxed{7.A}$ **Příklady.** Buď $I = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$. Zkoumejte, zda $f \in R(I)$ a spočtěte $(R)\int_I f$ pro následující funkce $^{+)}$

(a)
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } x \in \langle 0, \frac{1}{2}), \ y \in \langle 0,1\rangle, \\ 1 & \text{jestliže } x \in \langle \frac{1}{2}, 1\rangle, \ y \in \langle 0,1\rangle, \end{cases}$$

(b)
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } x \text{ anebo } y \text{ je iracionální}, \\ \varphi(y) , & \text{jestliže } x,y \text{ jsou racionální}, \end{cases}$$

(c)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(y)} , & \text{jsou-li } x,y \text{ racionální}, \\ 0 & \text{jinde v } I , \end{cases}$$

(d)
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x,y \text{ racionální}, \ \varphi(x) = \varphi(y) \\ 0 & \text{jinde v } I , \end{cases}$$

(e)
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x \in \langle 0,1\rangle \text{ racionální}, \ y \in \langle 0,\frac{1}{2}\rangle , \\ 1 & \text{je-li } x \in \langle 0,1\rangle \text{ iracionální}, \ y \in \langle \frac{1}{2}, 1\rangle , \\ 0 & \text{je-li } x \in \langle 0,1\rangle \text{ racionální} \ \ y \in (\frac{1}{2}, 1\rangle , \\ 0 & \text{je-li } x \in \langle 0,1\rangle \text{ iracionální}, \ y \in \langle 0,\frac{1}{2}) . \end{cases}$$

$\boxed{7.B}$ **Cvičení.** Zkoumejte, pro které funkce z 7.A platí tvrzení Fubiniovy věty (kterou jsme vyslovili pouze pro spojité funkce!), tj. kdy

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, \cdot\,)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(\,\cdot\,,y)\, dx \right) dy ,$$

a kdy tato společná hodnota je rovna $\int_I f$.

+) Je-li $z \in (0,1)$ racionální, $z = \frac{p}{q}$ (p,q nesoudělná, $q > 0$) , položme $\varphi(z) = q$. Dále nechť $\varphi(0) = \infty$, $\varphi(1) = 1$.

7.C Cvičení. Pokuste se dokázat (třeba i použitím Lebesgueovy teorie) následující zajímavou větu.

"Buď f omezená funkce na intervalu $\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$. Nechť

$$f(x,\,.) \in R(\langle c,d\rangle) \text{ pro každé } x \in \langle a,b\rangle,$$
$$f(.\,,y) \in R(\langle a,b\rangle) \text{ pro každé } y \in \langle c,d\rangle.$$

Potom pro funkce G,H, $G(y) = \int_a^b f(\,.\,,y)$, $H(x) = \int_c^d f(x,\,.)$, platí

$$G \in R(\langle c,d\rangle),\ H \in R(\langle a,b\rangle) \text{ a } \int_a^b H = \int_c^d G."$$

Vyplývá již z těchto předpokladů, že $f \in R(\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle)$? (Viz třeba 14.18.F.)

7.D Vícerozměrné R-integrály jako zobecnění limity.

Pro jednoduchost pracujme v E_2.

(a) Pokuste se dokázat věty analogické větám z 1.J, 1.K ! Je ovšem otázka, jak definovat uspořádání na množině všech dělení – zřejmě se pokusíte o uspořádání dané jednak "inklusí", jednak "normou" (= maximem délek všech stran obdélníků).

(b) Pokusme se nyní ještě o jiné definice "dělení" kompaktního intervalu $I \subset E_2$. "Dělením I" nazveme každou konečnou soustavu kompaktních intervalů, majících společné nejvýše vrcholy a strany, jejichž sjednocení je I (precizujte!). Porovnejte s naší definicí v 7.1!

(c) Nechť $\{I_1,\dots,I_n\}$ tvoří "dělení" D intervalu I ve smyslu (b). Položme

$$|D|_A = \max\{\mathrm{vol}\, I_1,\dots,\mathrm{vol}\, I_n\}, \quad |D|_S = \text{maximum délek stran všech obdélníků } I_1,\dots,I_n.$$

Do množiny všech dělení zaveďme nyní uspořádání, daná normami $|\dots|_A$, $|\dots|_S$.

(d) Pokuste se definovat vícerozměrné integrály jako zobecněné limity vzhledem k předchozím uspořádáním (a též k uspořádání, danému inklusí), vyšetřovat jejich vlastnosti, jejich vzájemný vztah i vztah k R-integrálu z definice 7.1 (jako zajímavost uveďme, že použijeme-li pro definici normu $|\dots|_A$ (která se také nepoužívá; obvykle se použije norma $|\dots|_S$ a definice integrálu pomocí ní je pak ekvivalentní s naší definicí), nemusí pak být každá spojitá funkce na I integrovatelná (porovnejte s 7.2.B !).

Návod konstrukce. Položte $I = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$, $f(x,y) = x$ na I,

$$D_n = \left\{ \langle 0,1\rangle \times \langle 0, \tfrac{1}{n}\rangle, \langle 0,1\rangle \times \langle \tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}\rangle, \dots \right.$$
$$\left. \dots, \langle 0,1\rangle \times \langle \tfrac{n-1}{n}, 1\rangle \right\}.$$

IV. DANIELLŮV INTEGRÁL

8. Systém funkcí C_1

Obsah:

A. ÚVOD

8.1 V předcházejících kapitolách jsme zavedli Riemannův integrál a odvodili jsme jeho základní vlastnosti. Ukázali jsme, že kromě "příjemných" vlastností má tento integrál i řadu "nedostatků". K nejvážnějším z nich patří ta, že jen "velmi málo" funkcí je riemannovsky integrovatelných (zhruba řečeno, tyto funkce se nesmějí mnoho lišit od spojitých funkcí) a dále skutečnost, že Riemannův integrál není "uzavřen na limitní přechody". Snahou je rozšířit systém integrovatelných funkcí, na tomto systému definovat nový integrál (s rozumnými vlastnostmi), a to tak, aby na původním systému se nový integrál shodoval s Riemannovým integrálem. Naší snahou bude též zahrnout do integrace i funkce neomezené či neomezené intervaly.

Jinými slovy, chceme jistým podmnožinám M v E_1 přiřadit třídy funkcí $\mathcal{L}_M$, každé funkci f ze systému $\mathcal{L}_M$ chceme přiřadit ~~reálné~~ číslo $L_M f$ tak, aby byly splněny následující axiomy:

(1) $f,g \in \mathcal{L}_M \Longrightarrow f+g \in \mathcal{L}_M$ a $L_M(f+g) = L_M f + L_M g$,

(2) $f \in \mathcal{L}_M$, $c \in E_1 \Longrightarrow cf \in \mathcal{L}_M$ a $L_M(cf) = c\, L_M f$,

(3) $f \in \mathcal{L}_M$, $f \geq 0 \Longrightarrow L_M f \geq 0$,

(4) $f \in \mathcal{L}_M \Longrightarrow |f| \in \mathcal{L}_M$,

(5) $f_n \in \mathcal{L}_M$, $f_n \geq 0$, $f_n \nearrow f \Longrightarrow f \in \mathcal{L}_M$ a

$$L_M(f_n) \longrightarrow L_M f ,$$

(6) je-li $M = P \cup Q$, $P \cap Q = \emptyset$, potom

$$f \in \mathcal{L}_M \Longleftrightarrow f \in \mathcal{L}_P \text{ a } f \in \mathcal{L}_Q ,$$

přičemž $L_{P \cup Q} f = L_P f + L_Q f$,

(7) $R(\langle a,b\rangle)\subset \mathcal{L}_{\langle a,b\rangle}$ a $L_{\langle a,b\rangle} f = (R)\int_a^b f$ pro

$f \in R(\langle a,b\rangle)$.

(Připomeňme, že se jedná o nepřesný úvod!)

Pochopitelně budeme též vyžadovat, aby systémy $\mathcal{L}_M$ byly definovány pokud možno pro co nejvíce množin M a aby byly co nejobsáhlejší. V dalším uvidíme, že se nám tento úkol vcelku podaří úspěšně vyřešit.

Je mnoho způsobů, jak nový integrál zavést. Podle toho dostáváme různé třídy integrovatelných funkcí a různé druhy integrálů. V dalším ukážeme dvě podstatné metody: metodu, kterou vypracoval P.J.Daniell a která spočívá na metodě rozšiřování jistých funkcionálů a metodu pocházející od H. Lebesguea, budovanou na základě teorie míry.

-.-.-.-.-.-.-

Naznačíme stručně, byť ne zcela přesně, Daniellovu myšlenku, kterou se budeme v této IV. kapitole zabývat.

Mějme dánu, třeba na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$ libovolnou reálnou funkci f . Vezměme všechny možné spojité funkce g na $\langle a,b\rangle$, které jsou na intervalu $\langle a,b\rangle$ větší anebo rovny naší funkci f , označme

$$H_f(a,b) = \left\{ g;\ g \geq f \quad \text{a} \quad g \quad \text{spojitá na} \quad \langle a,b\rangle \right\} .$$

Pro funkce ze systému $H_f(a,b)$ existuje Riemannův integrál a můžeme položit

$\tilde{L}f = \inf \left\{ (R)\int_a^b g;\ g \in H_f(a,b) \right\}$. Obdobně můžeme definovat

$\underset{\sim}{L} f = \sup \left\{ (R)\int_a^b h\ ;\ h \leq f \ \text{a} \ h \ \text{spojitá na} \ \langle a,b\rangle \right\}$. V případě, že

nastane rovnost $\underset{\sim}{L}f = \tilde{L}f$, mohli bychom tuto společnou hodnotu nazvat kupř. Daniellovým integrálem funkce f . Ukazuje se, že tato myšlenka sestrojení nového integrálu je vhodná, ovšem je zapotřebí ji poněkud modifikovat. Nemohli bychom kupříkladu počítat touto metodou integrály z neomezených funkcí na $\langle a,b\rangle$ (proč?) a také kupříkladu Dirichletova funkce by neměla integrál (opět proč?). Je nutno celý postup trochu upravit, nejdříve je nutno třídu spojitých funkcí, které jsme používali pro definici $\underset{\sim}{L}f$, $\tilde{L}f$, nahradit o něco širší třídou funkcí (zhruba řečeno tzv. polospojitými funkcemi), je nutno pro tyto funkce definovat integrál, a potom je již možno použít Daniellovu myšlenku.

Závěrem ještě připojme poznámku, že uvedenou teorii Daniellova integrálu je možno budovat zcela abstraktně a nevázat se přitom případem Riemannova integrálu. Komu by tato abstrakce v dalším příliš vadila, může se omezit pouze na případ E_1 s Riemannovým integrálem, který teď v dalším ukážeme.

8. SYSTÉM FUNKCÍ C_1

8.2 Definice systému C_1.

Označme symbolem C_1 systém všech spojitých funkcí v E_1 s následující vlastností: ke každé funkci f ze systému C_1 existuje uzavřený interval $\langle a_f, b_f \rangle$ (závislý na funkci f) tak, že $f = 0$ na $E_1 - \langle a_f, b_f \rangle$. tedy

$$f \in C_1 \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} f \text{ je spojitá v } E_1 \text{ a existuje interval } \langle a_f, b_f \rangle \text{ tak,}$$
$$\text{že } f\,(E_1 - \langle a_f, b_f \rangle) = \{0\} .$$

Označíme-li

$$N_f = \overline{\{ x \in E_1 ;\ f(x) \neq 0 \}}$$

(kde pruh nahoře znamená uzávěr množiny v E_1) tzv. nosič funkce f , lze říci, že C_1 je systém všech spojitých funkcí v E_1 s kompaktním nosičem (vysvětlete!).

8.3 Základní vlastnosti systému C_1.

Systém funkcí C_1 má následující vlastnosti:

(1_z) : $f \in C_1 \Longrightarrow f$ je konečná na E_1 ,

(2_z) : $f, g \in C_1$, $\alpha, \beta \in E_1 \Longrightarrow \alpha f + \beta g \in C_1$,

(3_z) : $f \in C_1 \Longrightarrow |f| \in C_1$.

Důkaz. Proveďte sami.

8.4 Definice $(R)\int_{E_1}$.

Buď $f \in C_1$; existuje tedy interval $\langle a_f, b_f \rangle$ tak, že mimo interval $\langle a_f, b_f \rangle$ je $f = 0$. Definujeme Riemannův integrál funkce f přes E_1 předpisem

$$(R)\int_{E_1} f \overset{\text{def.}}{=} (R)\int_{a_f}^{b_f} f .$$

Je vidět, že tato definice má smysl, neboť

(1) $(R)\int_{a_f}^{b_f} f$ vždy existuje (viz 1.8),

2) definice $(R)\int_{E_1} f$ nezávisí na volbě intervalu $\langle a_f, b_f \rangle$.

(Buďte totiž $\langle a_f, b_f \rangle , \langle A_f, B_f \rangle$ intervaly takové, že

$$N_f \subset \langle a_f, b_f \rangle \cap \langle A_f, B_f \rangle ,$$

potom $(R)\int_{a_f}^{b_f} f = (R)\int_{A_f}^{B_f} f$ - podrobně odůvodněte!)

$\boxed{8.5}$ Poznámky.

(A) Definovali jsme tedy Riemannův integrál přes E_1 (dosud jsme měli definován Riemannův integrál pouze přes omezené uzavřené intervaly) pouze pro funkce ze systému C_1. Bylo by možné definovat tento integrál i pro širší třídu funkcí - ovšem pro naše pozdější úvahy toto není nikterak nutné.

(B) Ukažte, že $C_1 \subset N((-\infty, +\infty))$ (viz 3.2.D, 3.9) a

$$(R) \int_{E_1} f = (N) \int_{-\infty}^{+\infty} f \quad \text{pro} \quad f \in C_1 .$$

$\boxed{8.6}$ Vlastnosti $(R) \int_{E_1}$.

Riemannův integrál přes E_1 má následující vlastnosti:

(4_A) : $f \in C_1 \Longrightarrow (R) \int_{E_1} f$ je konečný,

(5_A) : $f \in C_1$, $f \geq 0$ na $E_1 \Longrightarrow (R) \int_{E_1} f \geq 0$,

(6_A) : $f, g \in C_1$, $\alpha, \beta \in E_1 \Longrightarrow (R) \int_{E_1} (\alpha f + \beta g) = \alpha (R) \int_{E_1} f + \beta (R) \int_{E_1} g$,

(7_A) : $f_n \in C_1$, $f_n \searrow 0$ na $E_1 \Longrightarrow (R) \int_{E_1} f_n \to 0$.

Důkaz. Důkaz tvrzení (4_A) - (6_A) je snadný, proveďte sami.

Důkaz (7_A) spočívá na tzv. Diniho větě +); buďte tedy $f_n \in C_1$, $f_n \searrow 0$. Pro každé n označme $\sigma_n = \sup_{x \in E_1} f_n(x)$.

Protože $f_1 \in C_1$, existuje interval $\langle a,b \rangle$ tak, že $f_1(E_1 - \langle a,b \rangle) = \{0\}$. Potom též $f_n(E_1 - \langle a,b \rangle) = \{0\}$ a podle Diniho věty je $\lim \sigma_n = 0$. Odtud vyplývá, že

$$0 \leq (R) \int_{E_1} f_n = (R) \int_a^b f_n \leq$$

$$\leq (R) \int_a^b \sigma_n = \sigma_n (b - a),$$

a tedy i tvrzení (7_A).

+) Diniho věta: Nechť f_n jsou definovány na kompaktní množině K, nechť $f_n \to f$ monotonně na K, nechť f_n, f jsou spojité na K.

Potom $f_n \rightrightarrows f$ na K.

C. CVIČENÍ A PROBLÉMY

8.A **Cvičení.** **Předpokládejme, že funkcionál A** (ne nutně Riemannův integrál !) splňuje na systému C_1 požadavky (4_A) - (6_A) z odstavce 8.6 či 9.1. Potom A splňuje již i (7_A), dokažte!

Návod. Pro $f \in C_1$ položme $\|f\| = \max\left\{ |f(x)| \; ; \; x \in E_1 \right\}$ (existuje?).

1. Nejdříve ukažte, že ke každému kompaktu $K \subset E_1$ můžeme nalézt $M_K > 0$ tak, že $|Af| \leq M_K \|f\|$ pro každou funkci $f \in C_1$, pro niž $N_f \subset K$.

   (Nalezněte otevřený omezený interval $I \supset K$ a funkci $g \in C_1$ s vlastností

   $$g = 0 \text{ na } E_1 - I \; , \; g(x) = 1 \text{ pro } x \in K, \; 0 \leq g \leq 1 \text{ na } E_1$$

   a položte $M_K = Ag$; je-li nyní $f \in C_1$, $N_f \subset K$, vyplývá tvrzení z nerovností $-\|f\| g \leq f \leq \|f\| g$) .

2. Jsou-li $f_n \in C_1$, $f_n \searrow 0$, označte $K = N_{f_1}$ a uvědomte si, že $f_n \rightrightarrows 0$ na K, tedy i $f_n \rightrightarrows 0$ na E_1. Odtud plyne, že $\|f_n\| \to 0$ a stačí užít předchozí.

8.B Cvičení. Pro $f,g \in C_1$ položme $\rho(f,g) = \|f - g\|$ (viz 8.A). Ukažte, že

(a) (C_1, ρ) je metrický prostor,

(b) $(C_1, \|\ldots\|)$ je lineární normovaný prostor,

(c) (C_1, ρ) není úplný.

Návod. Položte

$$f_n(x) = \frac{\sin \pi x}{n} \quad \text{pro } x \in \langle -n-1, -n \rangle \cup \langle n, n+1 \rangle \; ,$$

$$f_n(x) = 0 \text{ jinde}$$

a uvažujte posloupnost F_n, kde $F_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$.

27571 Z9

9. Abstraktní teorie integrálu

Obsah:

A. ZÁKLADNÍ PROSTOR (Z, A)

V dalším P bude značit neprázdnou množinu; symbolem $S(P)$ označme systém všech funkcí na množině P , tj. množinu všech zobrazení množiny P do E_1^* (připouštíme tedy, že funkce mohou nabývat i hodnot $\pm\infty$).

9.1 Základní prostor (Z, A).

V množině všech funkcí $S(P)$ vybereme jistou neprázdnou její podmnožinu Z tak, aby byly splněny následující axiomy:

(1_z) $f \in Z \Longrightarrow f$ je konečná na P , tj. $f(P) \subset E_1$,

(2_z) $f, g \in Z$, $\alpha, \beta \in E_1 \Longrightarrow \alpha f + \beta g \in Z$,

(3_z) $f \in Z \Longrightarrow |f| \in Z$.

Každé funkci $f \in Z$ nechť je přiřazeno jisté reálné číslo Af (tj. nechť A je zobrazení Z do E_1) tak, že jsou splněny tyto axiomy:

(4_A) $f \in Z \Longrightarrow Af \in E_1$,

(5_A) $f \in Z$, $f \geq 0$ na $P \Longrightarrow Af \geq 0$,

(6_A) $f, g \in Z$, $\alpha, \beta \in E_1 \Longrightarrow A(\alpha f + \beta g) = \alpha Af + \beta Ag$,

(7_A) $f_n \in Z$, $f_n \searrow 0$ na $P \Longrightarrow Af_n \to 0$.

Systému Z splňujícímu axiomy (1_z) - (3_z) budeme říkat základní systém funkcí, zobrazení A splňující (4_A) - (7_A) budeme nazývat základním funkcionálem na Z a dvojici (Z,A) pak nazveme <u>základním prostorem.</u>

9.2 Příklady.

(a) Podle 8.3 a 8.6 tvoří dvojice $(C_1, (R)\int_{E_1})$ základní prostor (v tomto případě je $P = E_1$). Tento konkrétní příklad je vlastně nejdůležitějším případem základního prostoru a víceméně pro tento případ zde budujeme celou abstraktní teorii.

(b) Buď $P = \{a,b\}$ dvoubodová množina, tj. množina skládající se právě ze dvou prvků a,b. Nechť Z je systém všech konečných funkcí na P, anulujících se v bodě a (tj. $Z = \{ f \in S(P) \; ; \; f$ konečná na P, $f(a) = 0 \}$). Pro $f \in Z$ položme $Af = f(b)$. Potom dvojice (Z,A) tvoří základní prostor - dokažte !

(c) $P = \langle a,b \rangle$, $Z = R(\langle a,b \rangle)$, $Af = (R)\int_a^b f$ je opět příkladem základního prostoru (viz kapitola 1; viz též [$\mathcal{T}$], př. 2.23).

(d) Další příklady základního prostoru naleznete v [$\mathcal{T}$], příklady 2.5 - 2.23 a ve cvičení 9.A.

(e) Systém $(N((a,b))$, $(N)\int_a^b)$ netvoří základní prostor (viz 3.7.a).

9.3 Poznámky.

(a) Množina P nemusí být částí E_1, ani to nemusí být podmnožina nějakého metrického prostoru, je to zcela libovolná abstraktní množina.

(b) Buď (Z,A) základní prostor. Označíme-li symbolem f_0 funkci identicky rovnou nule na množině P, jest $f_0 \in Z$ a $Af_0 = 0$ (dokažte z axiomů (2_Z) a (6_A)).

(c) Axiom (2_Z) říká, že Z je lineárním prostorem funkcí na množině P (tj. s každými dvěma funkcemi obsahuje systém Z i jejich libovolnou lineární kombinaci), jinými slovy systém Z tvoří vektorový prostor. Z axiomů (2_Z) a (3_Z) ihned plyne, že

$$f,g \in Z \Longrightarrow \max(f,g) \in Z \; , \; \min(f,g) \in Z$$

(neboť $\max(a,b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$, $\min(a,b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$),

tedy systém Z je uzavřen i na tvoření maxim i minim konečného počtu funkcí. Takovému systému funkcí někdy říkáme s v a z .

(d) Axiom (5_A) vlastně vyjadřuje nezápornost (a tedy monotonii) funkcionálu A, neboť

$$f,g \in Z \; , \; f \leq g \Longrightarrow Af \leq Ag$$

(dokažte z axiomů (5_A) a (6_A));

axiom (6_A) zaručuje linearitu funkcionálu A a axiom (7_A) jakousi jeho "spojitost" (tento pojem prozatím nikterak neprecizujeme).

B. SYSTÉM Z^*

9.4 Systém Z^*.

Systém funkcí Z rozšíříme nyní o monotonní limity posloupností funkcí ze Z ; definujeme

$f \in Z^R \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ existuje posloupnost funkcí $f_n \in Z$ taková, že $f_n \nearrow f$ na P .

Obdobně

$$Z^K = \left\{ f \in S(P) \;;\; \text{existují } f_n \in Z \,,\; f_n \searrow f \right\} .$$

Konečně položme

$$Z^* = Z^R \cup Z^K \;.$$

9.5 Poznámky.

(a) Zřejmě $Z \subset Z^R$ i $Z \subset Z^K$ - ukažte !

(b) V konkrétním případě $Z = C_1$, $A =$ (R) $\int_{E_1}$ ukažte např., že funkce φ :

$\varphi(x) = 0$ pro $x \in E_1 - \{ 0 \}$,

$\varphi(0) = 1$,

leží v systému Z^K (sestrojte posloupnost $f_n \in C_1$ tak, aby $f_n \searrow \varphi$) , ale neleží v systému Z . Viz též $[\mathcal{T}]$, př. 2.28 - 2.32.

Obecnější charakteristiku systémů Z^R a Z^K v případě (C_1, (R) $\int_{E_1}$) podáme až v odstavci 10.5.

Prozatím pouze poznamenejme, že každá funkce ze systému Z^* (v případě $Z = C_1$!!) je funkcí Baireovy 1.třídy a tudíž množina bodů spojitosti f je hustá v E_1 .

(c) Funkce ze systému Z^R již mohou - na rozdíl od funkcí ze systému Z - nabývat i hodnot $+\infty$ (uveďte příklady!). Funkce ze systému Z^R nemůže však nabývat hodnoty $-\infty$ (proč?).

9.6 Definice Af pro $f \in Z^*$.

Prozatím máme definován funkcionál A pouze na systému Z ; víme již, že mohou existovat funkce, které patří do systému Z^* a neleží v Z . Pokusíme se nyní i pro tyto funkce definovat hodnotu Af.

Buď tedy $f \in Z^*$ - existuje posloupnost funkcí $f_n \in Z$ taková, že konverguje k funkci f monotonně; tj. $f_n \nearrow f$ nebo $f_n \searrow f$.

Definujeme $Af \overset{def.}{=} \lim Af_n$.

Tato definice je korektní, neboť:

(a) $\lim Af_n$ vždy existuje (nechť kupříkladu $f_n \nearrow f$, potom $f_1 \le f_2 \le$ $\le f_3 \le \dots$ na P , podle poznámky 9.3.d je $Af_1 \le Af_2 \le Af_3 \le \dots$

a každá monotonní posloupnost reálných čísel má - byť nevlastní - limitu),

(b) číslo Af pro $f \in Z^*$ nezávisí na výběru posloupnosti $f_n \in Z$ (viz následující lemma 9.7) - mohlo by se totiž stát (uveďte příklad !), že k funkci $f \in Z^*$ existují dvě (anebo i více) posloupnosti funkcí $f_n \in Z$, $g_n \in Z$ tak, že $f_n \to f$ monotonně, $g_n \to f$ monotonně - dokonce se může stát, že $f_n \searrow f$, $g_n \nearrow f$.

(c) pro funkce ze systému Z splývá nová definice Af s původním Af (jest totiž $Z \subset Z^*$ a na systému Z jsme již funkcionál A měli definován ! - dokažte toto tvrzení) - proto jsme též ponechali původní označení funkcionálu A.

$\boxed{9.7}$ Lemma.

Buďte $f_n \in Z$, $g_n \in Z$, $f_n \to f$ monotonně na P, $g_n \to f$ monotonně na P, potom

$$\lim Af_n = \lim Ag_n .$$

Důkaz. Dokážeme následující tvrzení:
"$f_n, g_n \in Z$, $f_n \to f$ monotonně, $g_n \to g$ monotonně,
$f \leq g$ na $P \Longrightarrow \lim Af_n \leq \lim Ag_n$. "

Rozlišme čtyři případy:

(a) $f_n \nearrow f$, $g_n \searrow g \Rightarrow f_n \leq f \leq g \leq g_n$ na $P \overset{9.3.d}{\Longrightarrow}$
$Af_n \leq Ag_n$ pro všechna $n \Longrightarrow \lim Af_n \leq \lim Ag_n$,

(b) $f_n \nearrow f$, $g_n \nearrow g$: buď N pevné a označme $h_n = \min(g_n , f_N)$, potom $h_n \in Z$ (viz 9.3.c), $h_n \nearrow \min(g, f_N) = f_N \Longrightarrow f_N - h_n \searrow 0$ (pro $n \to \infty$) $\Longrightarrow$ (axiom (7_A), (6_A)) $\lim Ah_n = A f_N$, ale ze vztahu $g_n \geq h_n$ dostáváme, že $\lim Ag_n \geq \lim Ah_n = Af_N$, tj. pro každé N jest $\lim Ag_n \geq Af_N$, tedy i $\lim Ag_n \geq \lim Af_N$,

(c) $f_n \searrow f$, $g_n \searrow g \Longrightarrow -f_n \nearrow -f$, $-g_n \nearrow -g$ a použijeme předchozí část (b),

(d) $f_n \searrow f$, $g_n \nearrow g \Longrightarrow f_n - g_n \leq \max(f_n - g_n, 0)$ a označíme-li $h_n = \max(f_n - g_n, 0)$, jest $h_n \in Z$, $h_n \searrow 0 \Longrightarrow \lim Ah_n = 0$ a tedy

$$\lim (Af_n - Ag_n) = \lim A(f_n - g_n) \leq \lim Ah_n = 0 .$$

Položíme-li v tomto tvrzení $f = g$, dostaneme naše lemma.

$\boxed{9.8}$ Poznámky.

(a) Dokažte, že $A\varphi = 0$ pro funkci φ z odstavce 9.5.b.

(b) Pro některé funkce ze systému Z^* může již funkcionál A nabývat i nekonečných hodnot - uveďte příklad ! (pro Z^R jen $+\infty$!!).

(c) Vyšli jsme tedy původně z nějakého základního systému funkcí Z, na kterém byl definován původní funkcionál A. Tento systém funkcí jsme nyní rozšířili na širší systém funkcí Z^* a na celý systém Z^* se nám podařilo rozšířit i funkcionál A. Schematicky si tento krok znázorněme takto:

$$\boxed{(Z,A)} \longrightarrow \boxed{(Z^*, A)}$$

$\boxed{9.9}$ Vlastnosti (Z^*, A)

Systém Z^* a funkcionál A na Z^* mají následující vlastnosti:

(a) $f,g \in Z^R \Longrightarrow f + g \in Z^R$ a $A(f + g) = Af + Ag$,

(b) $f \in Z^R$, $c \geq 0 \Longrightarrow cf \in Z^R$ a $A(cf) = c\,Af$,

(c) $f,g \in Z^R \Longrightarrow \max(f,g) \in Z^R$, $\min(f,g) \in Z^R$,

(d) $f,g \in Z^*$, $f \leq g \Longrightarrow Af \leq Ag$,

(e) $f \in Z^R \Longrightarrow -f \in Z^K$,

(f) $f_n \in Z^R$, $f_n \nearrow f \Longrightarrow f \in Z^R$ a $Af_n \nearrow Af$,

(vyslovte obdobná tvrzení pro systém Z^K).

Důkaz.

(a) Buďte $f,g \in Z^R$, potom existují $f_n \in Z$, $g_n \in Z$, $f_n \nearrow f$, $g_n \nearrow g$. Ale $f_n + g_n \in Z$, $f_n + g_n \nearrow f + g$ a $A(f_n + g_n) = Af_n + Ag_n$, tedy $f + g \in Z^R$ a $Af + Ag = \lim Af_n + \lim Ag_n =$
$$= \lim A(f_n + g_n) = A(f + g).$$

Body (b), (c), (e) dokažte sami: uvědomte si pouze, že platí následující:

$$a_n \to a,\ b_n \to b \Longrightarrow \max(a_n, b_n) \to \max(a,b).$$

(d) Toto je vlastně tvrzení v důkazu lemmatu 9.7.

(f) Buďte $f_n \in Z^R$ – existují tedy posloupnosti funkcí $g_{n,k} \in Z$ (pro každé n) tak, že $g_{n,k} \nearrow f_n$ pro $k \to \infty$.
Položme $h_n = \max(g_{i,j})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$;
potom posloupnost h_n konverguje monotonně nahoru, buď $h = \lim h_n$. Tedy $h \in Z^R$; ukážeme, že $h = f$. Zřejmě $h_n \leq f_n$ pro každé n, tedy $h \leq f$. Je-li n pevné, potom $h_k \geq g_{n,k}$ pro $k \geq n$, tedy i $h \geq f_n$ (limitní přechod pro $k \to \infty$), a tudíž $h \geq f$.
Ze vztahu $h_n \leq f_n \leq f$ plyne $Ah_n \leq Af_n \leq Af$ a

$$Af = Ah = \lim Ah_n \leq \lim Af_n \leq Af$$

tedy $Af = \lim Af_n$.

C. HORNÍ A DOLNÍ INTEGRÁL

9.10 Definice.

Pro libovolnou funkci $f \in S(P)$ definujeme její horní a dolní integrál předpisem

$$\widetilde{A}f = \inf_{\substack{g \geq f \\ g \in Z^R}} Ag \, , \qquad \underset{\sim}{A}f = \sup_{\substack{h \leq f \\ h \in Z^K}} Ah \, ,$$

9.11 Poznámky.

(a) V případě, kdy neexistuje žádná funkce $g \in Z^R$, $g \geq f$, bereme v definici horního integrálu funkce f infimum prázdné množiny, a toto jsme definovali jako $+\infty$. Existují konkrétní příklady, že tato situace může skutečně nastat (viz cvičení 9.A.a či příklad s dvoubodovou množinou v 9.A.c). Naproti tomu v případě základního systému $(C_1 \, , \, (R)\int_{E_1})$ ke každé funkci f existuje větší funkce g ze systému Z^R (ukažte, že funkce identicky rovna $+\infty$ patří do Z^R).

(b) Ukažte, že platí následující:

$$\widetilde{A}f = \inf_{\substack{g \geq f \\ g \in Z^*}} Ag \, , \qquad \underset{\sim}{A}f = \sup_{\substack{h \leq f \\ h \in Z^*}} Ah \, .$$

9.12 Věta.

Z definice sami dokažte následující:

(a) $\underset{\sim}{A}f \leq \widetilde{A}f$ pro každou $f \in S(P)$,

(b) $f \leq g \Longrightarrow \underset{\sim}{A}f \leq \underset{\sim}{A}g$, $\widetilde{A}f \leq \widetilde{A}g$.

9.13 Věta.

$f \in Z^* \Longrightarrow \underset{\sim}{A}f = \widetilde{A}f = Af$.

Důkaz. Předpokládejme, že $f \in Z^R$. Potom $\widetilde{A}f \leq Af$ (neboť sama funkce f leží v množině všech funkcí ze Z^R, které jsou větší anebo rovny f); stačí nyní dokázat, že

$$Af \leq \underset{\sim}{A}f \, .$$

Existují funkce $f_n \in Z$, $f_n \nearrow f$. Ze vztahů $f_n \leq f$, $f_n \in Z \subset Z^K$ plyne, že $Af_n \leq \underset{\sim}{A}f$, odkud limitním přechodem dostáváme $Af \leq \underset{\sim}{A}f$.

D. SYSTÉMY $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^*$, Λ

9.14 Definice systému $\mathcal{L}$.

Označme symbolem $\mathcal{L}$ systém všech funkcí z $S(P)$, pro něž horní a dolní integrál splývají a jsou konečná čísla; tedy

$$\mathcal{L} = \left\{ f \in S(P) \; ; \; \underset{\sim}{A}f = \tilde{A}f \in E_1 \right\}.$$

Pro funkce ze systému $\mathcal{L}$ buď

$$Af \overset{\text{def}}{=} \underset{\sim}{A}f \; (= \tilde{A}f) \; .$$

Věta 9.13 nám dává k této definici oprávnění, naše nové označení není v rozporu s označením původním.

Funkcionálu A (tj. zobrazení množiny $\mathcal{L}$ do E_1

$$A : f \in \mathcal{L} \longrightarrow Af \in E_1 \;)$$

budeme říkat abstraktní Lebesgueův integrál.

9.15 Poznámky.

(a) Systém funkcí $\mathcal{L}$ a integrál A na $\mathcal{L}$ pochopitelně závisí na původním základním prostoru (Z,A). Je vidět, že se nám podařilo (prozatím částečně) splnit náš cíl - základní systém funkcí Z (a původní integrál A na Z) rozšířit na obecně širší systém funkcí $\mathcal{L}$ a pro tyto funkce definovat nový integrál A, který na systému Z splývá s původním integrálem. Jde nyní o to, zda systém $\mathcal{L}$ a integrál A na $\mathcal{L}$ mají "vlastnosti integrálu", které jsme požadovali v úvodu.

Schematicky si můžeme celý proces následovně znázornit:

$$\boxed{(Z,A)} \longrightarrow \boxed{(Z^*, A)} \longrightarrow \boxed{(\underset{\sim}{A}f, \tilde{A}f)} \longrightarrow \boxed{(\mathcal{L}, A)}$$

(b) Funkce ze systému $\mathcal{L}$ mají tedy konečný integrál Af. Nikterak z toho zatím neplyne, že by samy funkce musely být konečné na P. Uvidíme později, že funkce ze systému $\mathcal{L}$ mohou nabývat i nekonečných hodnot; ovšem bodů, v kterých těchto hodnot nabývají, nemůže být v jistém smyslu "mnoho".

9.16 Lemma.

Uvedeme následující nutnou a postačující podmínku, podle které dovedeme rozhodnout, kdy daná funkce leží v systému $\mathcal{L}$ (aniž k tomu používáme pojmu horního a dolního integrálu). Platí:

$$f \in \mathcal{L} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \, g_1, g_2, \; g_1 \in Z^K, \; g_2 \in Z^R,$$

$$g_1 \leq f \leq g_2, \quad Ag_1, Ag_2 \text{ konečné}, \quad Ag_2 - Ag_1 < \varepsilon \; .$$

Důkaz.

(1) Nechť je splněna podmínka pro funkci $f \in S(P)$. Buď $\varepsilon > 0$. Existují tedy funkce $g_1 \in Z^K$, $g_2 \in Z^R$ s konečnými integrály , $g_1 \leq f \leq g_2$,

$$Ag_2 - Ag_1 < \varepsilon \text{ . Potom}$$

$$Ag_1 = \underset{\sim}{A}g_1 \leq \underset{\sim}{A}f \leq \tilde{A}f \leq \tilde{A}g_2 = Ag_2$$

odkud vyplývá, že $\underset{\sim}{A}f$, $\tilde{A}f$ jsou konečné.

Dále dostáváme, že

$$\tilde{A}f \leq Ag_2 < Ag_1 + \varepsilon \leq \underset{\sim}{A}f + \varepsilon \quad ,$$

tudíž $\tilde{A}f \leq \underset{\sim}{A}f$. Podle 9.12.a dostáváme, že $f \in \mathscr{L}$.

(2) Buď naopak $f \in \mathscr{L}$. Z definice infima a suprema ukažte, že je naše podmínka splněna.

9.17 Vlastnosti $\mathscr{L}$.

(a) $f,g \in \mathscr{L} \Longrightarrow f + g \in \mathscr{L}$ a $A(f + g) = Af + Ag$

(v bodech, kde funkce f,g nabývají nevlastních "opačných" hodnot definujeme funkci $f + g$ libovolně - kupříkladu jako nula),

(b) $f \in \mathscr{L}$, $c \in E_1 \Longrightarrow cf \in \mathscr{L}$ a $A(cf) = c\,Af$,

(c) $f,g \in \mathscr{L} \Longrightarrow \max(f,g) \in \mathscr{L}$, $\min(f,g) \in \mathscr{L}$,

(d) $f,g \in \mathscr{L}$, $f \leq g \Longrightarrow Af \leq Ag$,

(e) $f \in \mathscr{L} \Longrightarrow f^+, f^- \in \mathscr{L}$,

(f) $f \in \mathscr{L} \Longrightarrow |f| \in \mathscr{L}$ a $|Af| \leq A|f|$.

Důkaz.

(a) Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle definice 9.10 existují funkce $f_1, g_1 \in Z^K$, $f_2, g_2 \in Z^R$ tak, že $f_1 \leq f \leq f_2$, $g_1 \leq g \leq g_2$

$Af - Af_1 < \varepsilon$, $Af_2 - Af < \varepsilon$,

$Ag - Ag_1 < \varepsilon$, $Ag_2 - Ag < \varepsilon$.

Potom zřejmě

$$f_1 + g_1 \in Z^K ,\ f_2 + g_2 \in Z^R \ ,\ f_1 + g_1 \leq f + g \leq f_2 + g_2$$

(poslední nerovnost platí i pro ta $x \in P$, pro něž kupříkladu $f(x) = +\infty$, $g(x) = -\infty$ - odůvodněte !),

$$A(f_2 + g_2) - A(f_1 + g_1) < 4\varepsilon \ .$$

Podle 9.16 je $f + g \in \mathscr{L}$.

Z výše uvedených nerovností dále dostáváme, že

$$Af + Ag - 2\varepsilon < Af_1 + Ag_1 = A(f_1 + g_1) \leq A(f + g) \leq$$
$$\leq A(f_2 + g_2) = Af_2 + Ag_2 < Af + Ag + 2\varepsilon \quad ,$$

tedy $Af + Ag = A(f + g)$.

(b) Dokažte sami, je nutno rozlišit případy $c > 0$, $c = 0$, $c < 0$.

(c) Zvolme opět $\varepsilon > 0$, vybereme funkce f_1, g_1, f_2, g_2 jako v části (a). Potom

$$\max(f_1, g_1) \in Z^K, \quad \max(f_2, g_2) \in Z^R,$$

$$\max(f_1, g_1) \leq \max(f,g) \leq \max(f_2,g_2).$$

Ukažte, že platí následující nerovnost

$$\max(f_2,g_2) - \max(f_1,g_1) \leq (f_2 - f_1) + (g_2 - g_1),$$

odkud vyplývá, že

$$A(\max(f_2,g_2)) - A(\max(f_1,g_1)) \leq A(f_2 - f_1) + A(g_2 - g_1) \leq 4\varepsilon.$$

Z lemmatu 9.16 plyne, že $\max(f,g) \in \mathcal{L}$.

(d) Plyne ihned z věty 9.12.

(e) Plyne ihned z části (c).

(f) Buď $f \in \mathcal{L}$. Podle předešlého je $f^+, f^- \in \mathcal{L}$ a podle části (a) i $|f| = f^+ + f^- \in \mathcal{L}$.

Poslední tvrzení dostaneme z nerovností

$$|Af| = |Af^+ - Af^-| \leq Af^+ + Af^- = A|f|.$$

9.18 Lemma (základní lemma pro limitní přechody).

Nechť $f_n \in \mathcal{L}$, $f_n \nearrow f$. Potom $Af_n \nearrow \tilde{A}f$.

Důkaz. Z monotonie integrálu a ze vztahu $f_n \leq f$ plyne existence $\lim Af_n$ a nerovnost $\lim Af_n \leq \tilde{A}f$. Potřebujeme dokázat obrácenou nerovnost: $\lim Af_n \geq \tilde{A}f$, kterážto je zřejmá v případě $\lim Af_n = +\infty$. Buď tedy $\lim Af_n < +\infty$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Podle definice 9.10 existují funkce

$$h_n \in Z^R, \; h_n \geq f_n, \; Ah_n \text{ konečné}, \; Af_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} > Ah_n.$$

Buď $q_n = \max(h_1,\dots,h_n)$. Potom $q_n \in Z^R$, $q_n \nearrow$; označme $q = \lim q_n$; je tedy $q \in Z^R$.

Z nerovností

$$f_n \leq h_n \leq q_n \text{ plyne, že } f \leq q, \text{ tedy}$$

$$(*) \qquad \tilde{A}f \leq Aq.$$

Na druhé straně z nerovností

$$q_n - f_n \leq (h_1 - f_1) + \dots + (h_n - f_n) \quad \text{(dokazujte!)}$$

dostáváme

$$Aq_n - Af_n \leq \frac{\varepsilon}{2} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \leq \varepsilon,$$

tedy

$$Aq_n \leq Af_n + \varepsilon \leq \lim_{n\to\infty} Af_n + \varepsilon, \text{ z čehož plyne}$$

$$(**) \qquad Aq \leq \lim Af_n + \varepsilon.$$

Spojením nerovností (*) a (**) plyne

$$\tilde{A}f \le Aq \le \lim Af_n + \varepsilon ,$$

tedy $\tilde{A}f \le \lim Af_n$.

9.19 Poznámky.

(a) Lemma lze vyslovit značně obecněji, podle [Č-M] , 2.7 platí dokonce toto tvrzení (viz též cvičení 9.G.a):

$$f_n \in S(P) , \ \tilde{A}f_1 > -\infty , \quad f_n \nearrow f \Longrightarrow \tilde{A}f_n \nearrow \tilde{A}f .$$

(b) Lemma 9.18 je základním lemmatem při důkazech vět o limitním přechodu pro abstraktní integrál (viz věty 9.37 a 9.38) a nakonec je i základem pro důkaz σ -aditivity míry (viz 9.47.d).

9.20 Definice systémů $\mathcal{L}^R$, $\mathcal{L}^K$, $\mathcal{L}^*$, Λ .

Definujeme následující systémy funkcí:

$$\mathcal{L}^R = \left\{ f \in S(P) \ ; \text{ existují } f_n \in \mathcal{L} ,\ f_n \nearrow f \right\} ,$$

$$\mathcal{L}^K = \left\{ f \in S(P) \ ; \text{ existují } f_n \in \mathcal{L} ,\ f_n \searrow f \right\} ,$$

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L}^R \cup \mathcal{L}^K ,$$

$$\Lambda = \left\{ f \in S(P) \ ; \text{ existují } f_n \in \mathcal{L} ,\ f_n \to f \right\} .$$

Funkcím ze systému Λ říkáme <u>měřitelné funkce.</u>

9.21 Poznámka.

Systémy $\mathcal{L}^R$, $\mathcal{L}^K$ jsme vytvořili ze systému $\mathcal{L}$ obdobně jako systémy Z^R a Z^K ze systému Z . Potřebovali bychom nyní definovat integrál Af i pro funkce $f \in \mathcal{L}^* - \mathcal{L}$. Nabízela by se myšlenka definice obdobné definici 9.6 pro funkce ze systému Z^* . Nesmíme však zapomenout, že pro každou funkci f máme již definován její horní a dolní integrál $\tilde{A}f$, $\underset{\sim}{A}f$. Proto definici Af pro $f \in \mathcal{L}^*$ založme na následující větě.

9.22 Věta.

$$f \in \mathcal{L}^* \Longrightarrow \underset{\sim}{A}f = \tilde{A}f .$$

Důkaz. Buď $f \in \mathcal{L}^R$; existují tedy funkce $f_n \in \mathcal{L}$, $f_n \nearrow f$. Potom ze vztahů $Af_n \le \underset{\sim}{A}f \le \tilde{A}f$ a z lemmatu 9.18 plyne, že

$$\tilde{A}f = \lim Af_n \le \underset{\sim}{A}f \le \tilde{A}f .$$

9.23 Definice.

Pro funkci $f \in \mathcal{L}^*$ definujme Af předpisem

$$Af \overset{\text{def}}{=} \underset{\sim}{A}f = \tilde{A}f .$$

9.24 Poznámky.

(a) Z 9.20 a 9.14 odvoďte, že $Af > -\infty$ pro $f \in \mathscr{L}^R$ a $AF < +\infty$ pro $F \in \mathscr{L}^K$. Odtud plyne, že

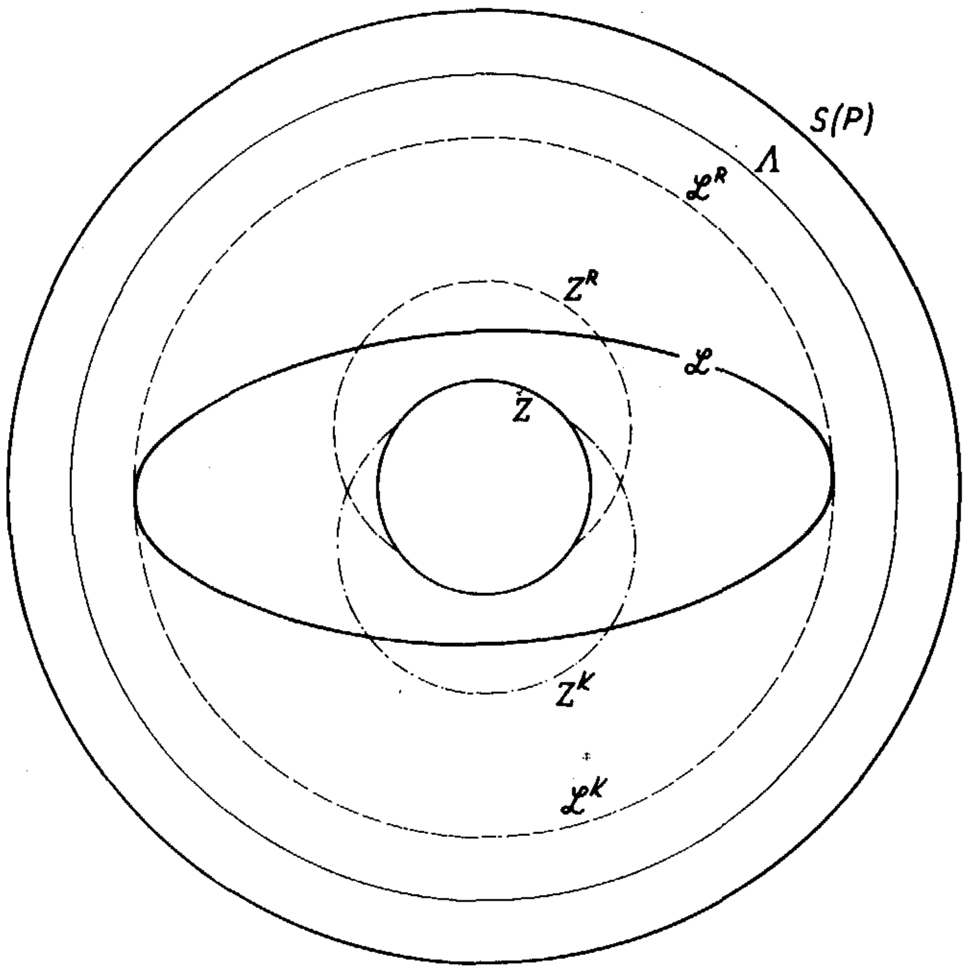
$$\mathscr{L} = \mathscr{L}^R \cap \mathscr{L}^K$$

(srovnejte s 9.5.a).

(b) $\mathscr{L}^*$ je nejširší systém funkcí, pro něž se definuje integrál Af. Funkce ležící mimo systém $\mathscr{L}^*$ mají pouze horní a dolní integrál, číslo Af jsme pro ně nedefinovali.

(c) Věta 9.22 tvrdila, že $\underset{\sim}{A}f = \tilde{A}f$ pro každou funkci $f \in \mathscr{L}^*$. Obrátit tuto větu nelze; může existovat funkce, pro níž $\underset{\sim}{A}f = \tilde{A}f$ a přesto $f \notin \mathscr{L}^*$ (Viz cvičení 9.A.c či 10.J.) Je zřejmé, že pro takovou funkci f je číslo $\underset{\sim}{A}f = \tilde{A}f$ nevlastní (jinak by funkce f ležela v systému $\mathscr{L}$) a že taková funkce f nepadne do systému Λ (viz větu 9.43.e).

(d) Schematicky si šíři jednotlivých systémů funkcí můžeme znázornit graficky následovně:



E. NULOVÉ MNOŽINY

9.25 Definice.

Připomeňme definici charakteristické funkce množiny. Pro každou množinu $M \subset P$ buď c_M

$$c_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in M \\ 0 & \text{pro } x \in P - M \end{cases}$$

tzv. charakteristická funkce množiny M. V 2.2 jsme dokázali následující vlastnosti charakteristických funkcí:

(a) $M \subset N \Longleftrightarrow c_M \leq c_N$,

(b) $c_{A \cup B} = \max (c_A, c_B)$, $c_{A \cap B} = \min (c_A, c_B)$,

(c) $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots,\ M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \Longrightarrow c_{M_n} \nearrow c_M$.

Řekneme, že množina $M \subset P$ je nulová, jestliže $\widetilde{A}c_M = 0$.

9.26 Věta (vlastnosti nulových množin).

(a) M nulová $\Longrightarrow c_M \in \mathcal{L}$

(b) M nulová, $N \subset M \longrightarrow N$ nulová (speciálně $\emptyset$ je nulová),

(c) M_n nulové $\Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ je nulová množina.

Důkaz.

(a) Tvrzení plyne ihned ze vztahu:

$$M \text{ nulová} \Longrightarrow 0 \leq \underset{\sim}{A}c_M \leq \widetilde{A}c_M = 0 .$$

(b) Buď M nulová, $N \subset M$. Potom $c_N \leq c_M$ a tedy

$$0 \leq \widetilde{A}c_N \leq \widetilde{A}c_M = 0 .$$

(c) Označme $F_k = \bigcup_{n=1}^{k} M_n$, potom

$$c_{F_k} = \max (c_{M_1}, \ldots, c_{M_k}) \in \mathcal{L} \quad \text{(podle 9.17.c)},$$

$$0 \leq c_{F_k} \leq c_{M_1} + \ldots + c_{M_k} \Longrightarrow 0 \leq Ac_{F_k} \leq Ac_{M_1} + \ldots + Ac_{M_k} = 0 ,$$

$$c_{F_k} \nearrow c_M \overset{9.18}{\Longrightarrow} Ac_{F_k} \nearrow \widetilde{A}c_M \Longrightarrow \widetilde{A}c_M = 0 .$$

9.27 Příklad.

Volme základní prostor $(C_1, (R) \overline{\int_{E_1}})$. Potom - obdobně jako v 9.8.a - lehko dokážeme, že každá jednobodová množina v E_1 je nulová. Podle předešlé věty je pak i každá spočetná množina v E_1 nulová. Speciálně množina racionálních čísel je nulová. Není ovšem pravda, že by každá nulová množina musela být spočetná. Existují množiny (kupr. Cantorovo diskontinuum - viz [$\mathcal{T}$], př. 5.7) nespočetné a nulové.

9.28 Definice.

Buď $V(x)$ výrok, týkající se prvků x množiny P. Řekneme, že $V(x)$ platí skoro všude (v P), jestliže množina

$$\{x \in P;\ V(x) \text{ neplatí}\}$$

je nulová.

Příklady:

(a) Buďte f_n, f funkce definované v P. Výrok "$\lim f_n = f$ skoro všude" tedy znamená přesně toto:

"existuje nulová množina M tak, že

$$\lim f_n(x) = f(x)$$

pro všechna $x \in P - M$."

(b) Výrok "funkce je definovaná skoro všude" znamená, že definiční obor funkce f se liší od množiny P pouze o nulovou množinu, tj. "existuje nulová množina M tak, že definiční obor funkce f je množina $P - M$".

(c) Buďte f, g funkce definované v P. Výrok

" $f = g$ skoro všude "

znamená, že

$$\{x \in P;\ f(x) \neq g(x)\}$$

je nulová.

Slova "skoro všude" budeme v dalším zkracovat symbolem "sk.vš." Místo výroku "$f = g$ skoro všude" budeme říkat, že funkce f a g jsou ekvivalentní a budeme zapisovat $f \sim g$.

Lehko se sami přesvědčíte, že vztah $\sim$ právě definovaný je skutečně vztahem ekvivalence, tj. že platí

1) $f \sim f$ pro každou $f \in S(P)$,

2) $f \sim g \Longrightarrow g \sim f$,

3) $f \sim g,\ g \sim h \Longrightarrow f \sim h$.

Tím se množina $S(P)$ všech funkcí rozpadá do tříd podle ekvivalence $\sim$. Dvě funkce patří do jedné třídy, právě když jsou ekvivalentní. Následující věta udává, že dvě funkce z jedné třídy mají stejné horní a dolní integrály.

9.29 Věta.

$f \sim g \Longrightarrow \tilde{A}f = \tilde{A}g$, $\underset{\sim}{A}f = \underset{\sim}{A}g$.

Důkaz. Nechť $\tilde{A}f < +\infty$. Množina $M = \{x \in P;\ f(x) \neq g(x)\}$ je nulová. Položme $f_n = n.c_M$, $f_\infty = (+\infty).c_M$. Potom

$$f_n \in \mathcal{L} \quad , \quad f_n \nearrow f_\infty \ ,$$

tedy podle 9.18 $Af_n \nearrow \tilde{A}f_\infty$. Ale $Af_n = n.Ac_M = 0$, tudíž $\tilde{A}f_\infty = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Existuje funkce $h_1 \in Z^R$, $h_1 \geq f$ splňující vztah

$$Ah_1 < \tilde{A}f + \varepsilon \ .$$

Dále existuje funkce $h_2 \in Z^R$, $h_2 \geq f_\infty$, pro níž

$$0 \leq Ah_2 < \varepsilon \ .$$

Zřejmě existuje funkce $h_1 + h_2 \in Z^R$ a $g \leq h_1 + h_2$ (neboť pro $x \in M$ je $h_2(x) = +\infty$ a pro $x \in P - M$ platí

$$g(x) = f(x) \leq h_1(x) \leq h_1(x) + h_2(x) \ ).$$

Tedy

$$\tilde{A}g \leq Ah_1 + Ah_2 < \tilde{A}f + 2\varepsilon \ ,$$

odkud dostáváme $\tilde{A}g \leq \tilde{A}f$. Ze symetrie lehko dokážeme obrácenou nerovnost $\tilde{A}f \leq \tilde{A}g$.

9.30 Důsledky.

(a) $f \in \mathcal{L}$, $g \sim f \Longrightarrow g \in \mathcal{L}$,

(b) $f \in \Lambda$, $g \sim f \Longrightarrow g \in \Lambda$.

Důkaz:

(a) Plyne ihned z 9.29.

(b) Existují $f_n \in \mathcal{L}$, $f_n \to f$. Definujeme-li funkce g_n

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{pro } x \in \{ x \in P;\ f(x) = g(x) \} , \\ g(x) & \text{pro } x \in \{ x \in P;\ f(x) \neq g(x) \} , \end{cases}$$

je zřejmě $g_n \sim f_n$, $g_n \to g$. Ale podle první části je $g_n \in \mathcal{L}$, tudíž $g \in \Lambda$.

9.31 Věta. Platí následující implikace:

(a) $f \in \mathcal{L} \Longrightarrow f$ je konečná skoro všude,

(b) $f \in \mathcal{L}^R \Longrightarrow f > -\infty$ skoro všude,

(c) $f \in \mathcal{L}^K \Longrightarrow f < +\infty$ skoro všude.

Důkaz.

(a) Buď $f \in \mathcal{L}$. Označme

$$M = \{ x \in P \ ;\ f(x) = +\infty \text{ anebo } f(x) = -\infty \} .$$

Podle 9.17.a je $\Phi = f - f \in \mathcal{L}$, ať její hodnotu v bodech množiny M definujeme jakkoliv, a $A\Phi = Af - Af$. Definujeme-li tedy kupříkladu funkci Φ v bodech množiny M hodnotou 1, je

$$0 = A\,\Phi = Ac_M = 0 \,.$$

(b) Buď nyní $f \in \mathcal{L}^R$. Existuje posloupnost funkcí $f_n \in \mathcal{L}$, $f_n \nearrow f$. Potom

$$\left\{ x \in P;\ f(x) = -\infty \right\} \subset \left\{ x \in P;\ f_1(x) = -\infty \right\} .$$

Odtud podle (a) a 9.26.b plyne tvrzení.

9.32 Poznámka.

Podle předchozí věty dostáváme tvrzení, že každá funkce ze systému $\mathcal{L}$ (ze systému funkcí majících konečný integrál) je konečná skoro všude, tj. množina těch bodů, kde tato funkce nabývá hodnot $\pm\infty$, je nulová. Nepřekvapí nás proto nyní věta 9.17.a:

$$\text{"}f, g \in \mathcal{L} \Longrightarrow f+g \in \mathcal{L}\text{"}$$

ať dodefinujeme jakkoliv $f + g$ v bodech, kde je $f = +\infty$, $g = -\infty$ anebo $f = -\infty$, $g = +\infty$. Funkce f a g jsou totiž konečné skoro všude a jejich součet $f + g$ nemusí být tedy definován pouze na nulové množině a podle 9.29 víme, že vůbec nezáleží na tom, jak funkci f a g na této nulové množině dodefinujeme.

9.33 Úmluva.

Podle předešlého vidíme, že pro zařazení funkcí do jednotlivých systémů $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^R$, $\mathcal{L}^K$, $\mathcal{L}^*$, Λ nehrají žádnou roli nulové množiny. Přesněji - máme dvě funkce f, F, které se liší pouze na nulové množině a zjistíme-li, že funkce f patří do systému $\mathcal{L}$, patří tam i funkce F. Změníme-li hodnoty měřitelné funkce na nulové množině, dostáváme opět měřitelnou funkci.

Zdá se proto přirozené, že můžeme vyšetřovat i funkce, které nejsou definovány na celém prostoru P, ale pouze skoro všude v P, tj. všude v P až na nulovou množinu. Dodefinujeme-li takovou funkci (definovanou sk.vš.) libovolným způsobem, budou hodnoty horních a dolních integrálů všech takto definovaných funkcí stejné (podle věty 9.29). Můžeme proto učinit následující úmluvu (konvenci):

> "řekneme, že $f \in \mathcal{L}$ i v tom případě, kdy funkce f je definována pouze skoro všude v P a kdy tato funkce jakkoliv jedním způsobem definovaná na celé P leží v systému $\mathcal{L}$ (podle předešlého víme, že na způsobu definování nikterak nezáleží)."

Obdobná konvence se týká i systému Λ všech měřitelných funkcí.

9.34 Řadu tvrzení předešlých vět je nyní možno zesílit. Tak kupříkladu větu 9.17.d lze vyslovit takto:

$$\text{"}f, g \in \mathcal{L},\ f \leq g \text{ sk.vš.} \Longrightarrow Af \leq Ag\text{"}.$$

Prohlédněte si všechny předchozí věty a pokuste se je takto upravit.

Na závěr uvedeme ještě jednu důležitou větu.

9.35 Věta. Nechť $f \geq 0$, $\tilde{A}f = 0$. Potom $f \sim 0$.

Důkaz. Pro každé $n \in N$ označme $E_n = \left\{ x \in P;\ f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}$.

Potom $\left\{ x \in P;\ f(x) > 0 \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ a stačí tedy dokázat, že každá množina E_n je nulová (viz 9.26). Ale lze vztahu $0 \leq \frac{1}{n}\, c_{E_n} \leq f$ plyne, že

$$0 \leq \tilde{A}\left(\frac{1}{n}\, c_{E_n} \right) \leq \tilde{A}f = 0 ,$$

tedy $\tilde{A}\, c_{E_n} = 0$.

F. LIMITNÍ PŘECHOD ZA INTEGRAČNÍM ZNAMENÍM

V tomto odstavci se budeme zabývat otázkou, za jakých předpokladů o funkcích f_n je správná implikace

$$\text{"} f_n \to f \implies Af_n \to Af \text{"} .$$

9.36 Příklady (volte $(C_1, (R) \int_{E_1})$ jako základní systém).

Nalezněte příklad posloupnosti f_n tak, aby $f_n \to 0$, $f_n \in \mathcal{L}$ a aby

(A) $\lim Af_n \neq 0$ ($= Af$),

(B) $\lim Af_n$ neexistovala,

(C) $\lim Af_n \neq 0$ a navíc $f_n \searrow 0$.

Dále sestrojte posloupnost funkcí $f_n \in \mathcal{L}$ tak, aby $\lim f_n \notin \mathcal{L}^*$.

9.37 Věta (Levi).

(a) $f_n \in \mathcal{L}^R$, $f_n \nearrow f$ sk.vš. $\implies f \in \mathcal{L}^R$ a $Af_n \to Af$,

(b) $f_n \in \mathcal{L}^K$, $f_n \searrow f$ sk.vš. $\implies f \in \mathcal{L}^K$ a $Af_n \to Af$.

(Srovnejte s větou 9.9.f)

Důkaz. Předpokládejme $f_n \nearrow f$ všude na P .

(a) Že funkce f náleží do systému $\mathcal{L}^R$, dokážeme stejně jako v 9.9.f. Ze vztahu $f_n \leq f$ a z monotonie integrálu dostáváme, že $\lim Af_n \leq Af$. Stačí dokázat nerovnost $\lim Af_n \geq Af$, kteréžto je zřejmá v případě $\lim Af_n = +\infty$. Nechť tedy limita $\lim Af_n < +\infty$. Potom ovšem všechny funkce f_n leží v systému $\mathcal{L}$ a použitím lemmatu 9.18 obdržíme

$$\lim Af_n = \tilde{A}f = Af .$$

(b) Důkaz je obdobný.

27571 Z10

9.38 **Věta (Lebesgue).**

Nechť $f_n \in \mathcal{L}$, $f_n \to f$ sk.vš., nechť existuje funkce $g \in \mathcal{L}$ taková, že nerovnost

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{je splněna}$$

pro všechna n a sk.vš. x.
Potom

$$f \in \mathcal{L} \quad \text{a} \quad Af_n \to Af .$$

Důkaz. Předpokládejme, že všechny vztahy platí všude místo skoro všude.
Buď $h_n = \sup_{k \geq n} f_k$, $\quad g_n = \inf_{k \geq n} f_k$.

Potom $h_n \in \mathcal{L}^R$, $g_n \in \mathcal{L}^K$
(neboť platí implikace:

$$\varphi_n \in \mathcal{L} \Rightarrow \max(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{L} \Longrightarrow$$

$$\sup \varphi_n = \lim \max(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{L}^R).$$

Z nerovnosti

$$-g \leq g_n \leq f_n \leq h_n \leq g$$

plyne, že g_n, $h_n \in \mathcal{L}$.

Protože $h_n \searrow f$, ($h_n \searrow \limsup f_n = \lim f_n = f$),
jest $f \in \mathcal{L}^K$, obdobně $f \in \mathcal{L}^R$ ($g_n \nearrow f$),
tedy $f \in \mathcal{L}$.
Z nerovnosti

$$Ag_n \leq Af_n \leq Ah_n$$

a z Leviho věty 9.37 ($\lim Ag_n = Af = \lim Ah_n$) pak plyne, že $\lim Af_n = Af$.

9.39 **Věta (Leviho pro řady).**

Buďte $v_n \in \mathcal{L}^R$, $v_n \geq 0$ sk.vš., $v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sk.vš.

Potom

$$v \in \mathcal{L}^R \quad \text{a} \quad Av = \sum_{k=1}^{\infty} Av_n$$

$$\left(\text{tj. } A \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} Av_n \right).$$

Obdobně pro $v_n \leq 0$, $v_n \in \mathcal{L}^K$.

Důkaz. Plyne ihned z 9.37.

9.40 Věta (Lebesgueova pro řady).

Buďte $v_n \in \mathscr{L}$, nechť $v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sk.vš. a nechť existuje funkce $g \in \mathscr{L}$ tak, že nerovnost

$$\left| \sum_{n=1}^{k} v_n (x) \right| \leq g (x)$$ je splněna pro všechna k a pro skoro všechna x.

Potom $v \in \mathscr{L}$ a $Av = \sum_{n=1}^{\infty} Av_n$.

Důkaz. Plyne ihned z 9.38.

G. VLASTNOSTI SYSTÉMŮ $\mathscr{L}^*$ a Λ.

9.41 Lemma.

Buďte $f_n \in \mathscr{L}^*$, $g \in \mathscr{L}$; nechť $f_n \to f$, nechť $f_n \geq g$ pro všechna n.

Potom $f \in \mathscr{L}^R$,

Důkaz. Ze vztahu $-\infty < Ag = Af_n$ dostáváme, že

$$f_n \in \mathscr{L}^R .$$

Položme $\varphi = \sup\limits_n f_n$. Potom $\varphi \in \mathscr{L}^R$ (neboť maximum konečného počtu funkcí z $\mathscr{L}^R$ leží opět v systému $\mathscr{L}^R$ - viz obdobnou větu 9.9.c - a

$$\max (f_1, \ldots, f_n) \nearrow \sup f_n \quad \text{pro} \quad n \to \infty),$$

$$\varphi \geq g , \quad \varphi \geq f .$$

Existují funkce $\varphi_n \in \mathscr{L}$, $\varphi_n \nearrow \varphi$. Předpokládejme přímo, že $\varphi_n \geq g$ pro všechna n (jinak místo funkcí φ_n vezmeme funkce $\max(\varphi_n, g)$, které mají stejné vlastnosti). Položme

$$g_{m,n} = \min (\varphi_m, f_n) .$$

Z nerovnosti

$$g \leq g_{m,n} \leq \varphi_m$$

plyne, že $g_{m,n} \in \mathscr{L}$.

Zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} g_{m,n} = \min (\varphi_m, f)$, odkud podle Lebesgueovy věty dostáváme, že $\min(\varphi_m, f) \in \mathscr{L}$. Ale $\min (\varphi_m, f) \nearrow \min(\varphi, f) = f$, tedy $f \in \mathscr{L}^R$.

9.42 Věta (vlastnosti měřitelných funkcí).

(a) $f, g \in \Lambda$, nechť $f + g$ má smysl sk.vš. $\Longrightarrow$

$$f + g \in \Lambda ,$$

(b) $f \in \Lambda$, $\alpha \in E_1 \Longrightarrow \alpha f \in \Lambda$,

(c) $f,g \in \Lambda \Longrightarrow \max(f,g) \in \Lambda$, $\min(f,g) \in \Lambda$,

(d) $f \in \Lambda \Longrightarrow |f| \in \Lambda$,

(e) $f \in \Lambda$, $f \geq 0 \Longrightarrow f \in \mathscr{L}^R$,
obdobně pro $f \leq 0$,

(f) $f \in \Lambda \Longleftrightarrow f^+, f^- \in \mathscr{L}^R$,

(g) $f_n \in \Lambda$, $f_n \to f$ sk.vš. $\Longrightarrow f \in \Lambda$,

(h) $f \in \Lambda$, $g \in \mathscr{L}$, $|f| \leq g \Longrightarrow f \in \mathscr{L}$.
(speciálně $f \in \Lambda$, $|f| \in \mathscr{L} \Longrightarrow f \in \mathscr{L}$).

Důkaz.

(a) Existují $f_n \in \mathscr{L}$, $g_n \in \mathscr{L}$, $f_n \to f$, $g_n \to g$.
Předpokládejme, že f_n, g_n jsou konečné všude. Potom
$f_n + g_n \in \mathscr{L}$, $f_n + g_n \to f + g$ sk.vš. Tudíž $f + g \in \Lambda$ (proveďte celý důkaz podrobně a precizně).

(b), (c), (d) Proveďte sami.

(e) Existují $f_n \in \mathscr{L}$, $f_n \to f$. Můžeme předpokládat, že $f_n \geq 0$ (jinak vezmeme funkce f_n^+). Podle lemmatu 9.41 je pak $f \in \mathscr{L}^R$.

(f) Buď $f \in \Lambda$, potom $f^+, f^- \in \Lambda$ a podle předešlého je $f^+, f^- \in \mathscr{L}^R$.
Nechť naopak $f^+, f^- \in \mathscr{L}^R$, potom $f = f^+ - f^-$ a podle (a),(b) jest $f \in \Lambda$.

(g) Buďte $f_n \in \Lambda$, podle předešlého je $f_n^+ \in \mathscr{L}^R$ a $f_n^+ \to f^+$.
Z lemmatu 9.41 plyne $f^+ \in \mathscr{L}^R$. Obdobně dokážeme, že $f^- \in \mathscr{L}^R$ a podle části (f) je $f \in \Lambda$.

(h) Buď $f \in \Lambda$, potom
$f^+, f^- \in \mathscr{L}^R$ a ze vztahů $0 \leq f^+ \leq g$,
$0 \leq f^- \leq g$ plyne $f^+, f^- \in \mathscr{L}$, tj. $f \in \mathscr{L}$.

$\boxed{9.43}$ Vlastnosti $\mathscr{L}^*$

(a) $f,g \in \mathscr{L}^*$, nechť má smysl součet $Af + Ag \Longrightarrow$ skoro všude má smysl součet $f + g$, $f + g \in \mathscr{L}^*$ a $A(f + g) = Af + Ag$,

(b) $f \in \mathscr{L}^*$, $\alpha \in E_1 \Longrightarrow \alpha f \in \mathscr{L}^*$ a $A(\alpha f) = \alpha Af$,

(c) $f \in \mathscr{L}^* \Longleftrightarrow f^+, f^- \in \mathscr{L}^R$ a rozdíl $Af^+ - Af^-$ má smysl,

(d) $f \in \Lambda - \mathscr{L}^* \Longleftrightarrow f^+, f^- \in \mathscr{L}^R$, $Af^+ = Af^- = +\infty$,

(e) $f \in \Lambda - \mathscr{L}^* \Longrightarrow \tilde{A}f = +\infty$, $\underset{\sim}{A}f = -\infty$,

(f) $f \in \mathscr{L}^* \Longrightarrow |f| \in \mathscr{L}^*$ a $|Af| \leq A|f|$.

Důkaz.

(b) Proveďte sami.

(a) Nechť kupříkladu $f,g \in \mathscr{L}^R$. Potom podle věty 9.31 má součet $f + g$ smysl skoro všude. Existují funkce $f_n \in \mathscr{L}$, $g_n \in \mathscr{L}$, f_n, g_n konečné všude, $f_n \nearrow f$ sk.vš., $g_n \nearrow g$ sk.vš.

Potom $f_n + g_n \in \mathscr{L}$, $f_n + g_n \nearrow f + g$ sk.vš., tedy

$f + g \in \mathscr{L}^R$ a $A(f_n + g_n) = A f_n + Ag_n$, $Af_n + Ag_n \nearrow Af + Ag$,

odtud plyne, že $A(f + g) = Af + Ag$ (proveďte vše podrobně!).

(c) Buď $f \in \mathscr{L}^R$. Potom $f^+, f^- \in \mathscr{L}^R$ (kupříkladu podle 9.42.f).

Existují funkce $f_n \in \mathscr{L}$, $f_n \nearrow f$. Ze vztahu $f_1^- \geq f^- \geq 0$ pak plyne, že $f^- \in \mathscr{L}$ a tudíž rozdíl $Af^+ - Af^-$ má smysl. Nechť naopak $f^+, f^- \in \mathscr{L}^R$ a nechť má smysl rozdíl $Af^+ - Af^-$. Podle části (a) pak plyne, že

$$f^+ - f^- = f \in \mathscr{L}^* .$$

(d) Plyne snadno z předešlého.

(e) Buď $f \in \Lambda - \mathscr{L}^*$, podle předešlého je $Af^+ = +\infty$.

Nechť g je libovolná funkce ze Z^R, $g \geq f$.

Potom $g^+ \geq f^+$, tudíž $Ag^+ \geq Af^+ = +\infty$ a tedy i $Ag = +\infty$.

Z definice pak

$$\tilde{A}f = \inf_{\substack{g \geq f \\ g \in Z^R}} Ag = +\infty .$$

(f) Plyne okamžitě ze vztahů

$$|f| = f^+ + f^- , \quad f = f^+ - f^-$$

a z předchozích částí.

H. MĚŘITELNÉ MNOŽINY, MÍRA MNOŽIN

$\boxed{9.44}$ Definice.

Buď $M \subset P$. V případě, že existuje integrál Ac_M, tj. v případě $c_M \in \mathscr{L}^*$, řekneme, že množina M je měřitelná a číslo

$$\mu M \overset{\text{def}}{=\!=} Ac_M$$

nazveme mírou množiny M. Systém všech měřitelných množin označíme symbolem $\mathfrak{M}$. Podle 9.42.e pak můžeme říci, že

$$M \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow c_M \in \Lambda$$

tj. množina M je měřitelná, právě když její charakteristická funkce je měřitelná. Uvědomte si ovšem přitom podstatný rozdíl mezi měřitelností funkcí a měřitelností množin !!

Míru množiny můžeme uvažovat pouze pro měřitelné množiny. Je-li nyní množina $M \subset P$ libovolná a nepředpokládáme o ní, že $c_M \in \mathscr{L}^*$, můžeme jí stále ještě přiradit číslo $\tilde{A}c_M$ (neboť horní integrál je definován pro každou funkci); toto číslo pak nazveme vnější mírou množiny M a označíme $\tilde{\mu} M$.

Tedy - každá množina má vnější míru, míru mají pouze měřitelné množiny a na systému měřitelných množin splývá míra s vnější mírou.

9.45 Příklady.

(a) Vezmeme základní prostor (Z,A) z příkladu 9.2.b. Tam jsme uvažovali dvoubodovou množinu $P = \{a,b\}$,

$Z = \{ f \in S(P) \ ; \ f(a) = 0, \ f(b) \in E_1 \}$,

$Af = f(b)$ pro $f \in Z$.

Ukažte, že

$$f(a) > 0 \implies \tilde{A}f = +\infty , \quad \underset{\sim}{A}f = f(b) ,$$

$$f(a) < 0 \implies \tilde{A}f = f(b) , \quad \underset{\sim}{A}f = -\infty .$$

Odtud lehko vyplyne, že množiny $\emptyset$, $\{b\}$ jsou měřitelné a množiny $\{a\}$, P nejsou měřitelné. Podrobně vysvětlete !

(b) Vyjdeme-li ze základního prostoru $(C_1, \ (R) \int_{E_1})$, lehko ukážeme, že každý interval (otevřený, uzavřený či polouzavřený) je měřitelná množina.

9.46 Vlastnosti $\mathcal{M}$.

(a) A nulová $\implies A \in \mathcal{M}$,

(b) $A_n \in \mathcal{M} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$,

(c) $A,B \in \mathcal{M} \implies A-B \in \mathcal{M}$.

Důkaz. (a) Plyne okamžitě z 9.26.a.

(b) Označme $F_k = \bigcup_{n=1}^{k} A_n$, $E_k = \bigcap_{n=1}^{k} A_n$

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n , \quad N = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n .$$

Podle 9.25 je

$$c_{F_k} = \max (c_{A_1}, \dots, c_{A_k}) \in \mathcal{L}^R ,$$

$$c_{E_k} = \min (c_{A_1}, \dots, c_{A_k}) \in \mathcal{L}^R$$

$$\text{a} \quad c_{F_k} \to c_M , \quad c_{E_k} \to c_N ,$$

odtud a z 9.42.g vyplývá tvrzení.

(a) Plyne okamžite ze vztahu

$$c_{A-B} = c_A - c_{A \cap B} ,$$

a z předchozí části (a věty 9.25.b).

9.47 Vlastnosti míry.

(a) $A \in \mathfrak{M} \Longrightarrow \mu A \geq 0$,

(b) $\mu \emptyset = 0$,

(c) $A \subset B$, $A,B \in \mathfrak{M} \Longrightarrow \mu A \leq \mu B$,

(d) $A_n \subset \mathfrak{M}$ po dvou disjunktní $\Longrightarrow \mu\left(\bigcup_1^\infty A_n\right) = \sum_1^\infty \mu A_n$,

(e) $M_n \in \mathfrak{M}$, $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$, $M = \bigcup_{n=1}^\infty M_n \Longrightarrow \mu M = \lim \mu M_n$,

(f) $M_n \in \mathfrak{M}$, $M_1 \supset M_2 \supset \ldots$, $M = \bigcap_{n=1}^\infty M_n$, $\mu M_1 < +\infty \Longrightarrow \mu M = \lim \mu M_n$.

Důkaz.

(a),(b) jsou triviální.

(c) Buď $A \subset B$, $A,B \in \mathfrak{M}$. Potom $c_A \leq c_B \Longrightarrow \mu A = Ac_A \leq Ac_B = \mu B$.

(d) Označme $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, zřejmě $c_A = \sum_{n=1}^\infty c_{A_n}$,

odkud z Leviho věty vyplývá tvrzení.

(e) $c_{M_n} \nearrow c_M$ a opět použijeme Leviho větu.

(f) Použijeme vztahu $c_{M_n} \searrow c_M$ a Leviho větu.

9.48 Poznámky.

(a) Předpoklad $\mu M_1 < +\infty$ (či alespoň $\mu M_k < +\infty$ pro jisté k) je podstatný.

Protipříklad:

$M_n = (n, +\infty) \Longrightarrow \mu M_n = +\infty$, $\bigcap_{n=1}^\infty M_n = \emptyset$

(základní prostor $(C_1, (R)\int_{E_1})$ - viz též 9.45.b).

9.49 Vlastnosti vnější míry.

(a) $A \subset P \Longrightarrow \tilde{\mu} A \geq 0$,

(b) $\tilde{\mu} \emptyset = 0$,

(c) $A \subset B \Longrightarrow \tilde{\mu} A \leq \tilde{\mu} B$,

(d) $\tilde{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \tilde{\mu} A_n$, i když jsou množiny A_n po dvou disjunktní

(viz třeba 10.K).

Důkaz.

(a),(b),(c) plyne přímo z definice.

(D) Nebudeme zde dokazovat, plyne z vlastností horního integrálu, které jsme zde neodvozovali. Viz cvičení 9.G.a.

I. INTEGRÁL PŘES PODMNOŽINY

Prozatím máme definován integrál pouze přes celý prostor P, chtěli bychom definovat i integrál přes jeho podmnožiny. Máme kupříkladu definován

$\int_{E_1} f$, ale nevíme, co je to $\int_3^{10} f$ či $\int_R f$ (kde R jsou racionální čísla).

$\boxed{9.50}$ Lemma.

Buď $M \subset P$, $M \in \mathcal{M}$, $f \in S(P)$. Označme

$$\hat{f} = f \cdot c_M \text{, tj.}$$

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in M, \\ 0 & \text{pro } x \in P - M. \end{cases}$$

Potom platí implikace:

$$f \in \Omega \Longrightarrow \hat{f} \in \Omega,$$

kde Ω může znamenat kterýkoliv ze systémů $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^R$, $\mathcal{L}^K$, $\mathcal{L}^*$, Λ.

Důkaz. Provedeme pro případ $\Omega = \mathcal{L}$.

Buď tedy $f \in \mathcal{L}$, položíme-li

$$\varphi_n = \min\left[n.c_M, \max(f, -n.c_M)\right],$$

je

$$\varphi_n \in \Lambda, |\varphi_n| \leq f, \quad \varphi_n \longrightarrow \hat{f}$$

(vše odůvodněte), tedy podle Lebesgueovy věty je $\hat{f} \in \mathcal{L}$. Tvrzení pro ostatní systémy dokažte sami pomocí limitních přechodů.

$\boxed{9.51}$ Poznámky.

(a) Předpoklad $M \in \mathcal{M}$ je v lemmatu 9.50 podstatný. Viz cvičení 9.A.b, kde volte $M = \langle 0, \frac{1}{2})$, $f(x) = x$.

(b) Funkce φ_n mají názorný význam: mimo množinu M je $\varphi_n = 0$; v bodech množiny M, kde $f(x) > n$ je $\varphi_n(x) = n$; v bodech, kde $f(x) < -n$ je $\varphi_n(x) = -n$; v ostatních bodech je $\varphi_n = f$ (nakreslete si!).

$\boxed{9.52}$ Definice.

Buď $M \subset P$, $M \in \mathcal{M}$. Nechť funkce f je definována v M. Položme

$$\bar{f}: \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in M, \\ 0 & \text{pro } x \in P - M. \end{cases}$$

Nechť Ω znamená kterýkoliv ze systémů $\mathcal{L}, \mathcal{L}^R, \mathcal{L}^K, \mathcal{L}^*, \Lambda$.
Definujeme systém funkcí Ω_M vztahem

$$f \in \Omega_M \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \bar{f} \in \Omega .$$

Je-li $f \in \mathcal{L}^*_M$ (tj. je-li $\bar{f} \in \mathcal{L}^*$), definujeme

$$A_M f \overset{\text{def.}}{=} A \bar{f} .$$

9.53 Poznámky.

(a) Je podstatný rozdíl mezi definicí funkce $\hat{f}$ z lemmatu 9.50 a definicí funkce $\bar{f}$ v 9.52 :

v lemmatu 9.50 jsme předpokládali, že funkce f je definována v celém prostoru P (a funkce $\hat{f}$ vznikla tak, že jsme mimo množinu M změnili hodnoty funkce f); zatímco v definici 9.52 jsme předpokládali, že funkce f je definována pouze na množině M (a mimo množinu M jsme funkci f dodefinovali, čímž vznikla funkce $\bar{f}$).

(b) Všechny věty, které jsme až dosud formulovali pro systémy $\mathcal{L}, \mathcal{L}^R, \mathcal{L}^K, \mathcal{L}^*, \Lambda$, můžeme přeformulovat i pro systémy $\mathcal{L}_M, \mathcal{L}_M^R, \mathcal{L}_M^K, \mathcal{L}_M^*, \Lambda_M$.

Kupříkladu platí tato věta:

"$f_n \in \mathcal{L}_M^R,\ f_n \nearrow f$ na $M \Longrightarrow f \in \mathcal{L}_M^R,\ A_M f_n \longrightarrow A_M f$ ".

Jak dokážeme tuto větu?

Definujeme funkce $\bar{f}_n$, $\bar{f}$ vztahy:

$$\bar{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{pro } x \in M , \\ 0 & \text{pro } x \in P - M , \end{cases}$$

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in M , \\ 0 & \text{pro } x \in P - M . \end{cases}$$

Potom $\bar{f}_n \in \mathcal{L}^R$, $\bar{f}_n \nearrow \bar{f}$. Tedy podle věty 9.37 $\bar{f} \in \mathcal{L}^R$ a $A\bar{f}_n \longrightarrow A\bar{f}$, což není nic jiného než tvrzení naší věty.
Pokuste se sami formulovat a dokazovat některé další věty.

9.54 Věta.

Nechť $f \in \Omega_M$, $N \subset M$, $N \in \mathfrak{M}$. Potom $f \in \Omega_N$, kde Ω může znamenat kterýkoliv ze systémů $\mathcal{L}, \mathcal{L}^R, \mathcal{L}^K, \mathcal{L}^*, \Lambda$.

Důkaz. Buď $f \in \Omega_M$, nechť

$$f_1 : f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in N, \\ 0 & \text{pro } x \in P - N. \end{cases}$$

Chceme dokázat, že $f_1 \in \Omega$.

Označme ještě

$$\bar{f} : \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in M, \\ 0 & \text{pro } x \in P - M. \end{cases}$$

Podle 9.52 je $\bar{f} \in \Omega$ a podle 9.50 pak $f.c_N \in \Omega$. Ze vztahu $f_1 = \bar{f} \, . \, c_N$ plyne tvrzení.

$\boxed{9.55}$ **Věta.**

Buď $M \subset P$,nulová, f definována na M

Potom $f \in \mathcal{L}_M$ a $A_M f = 0$.

(Tedy integrál libovolné funkce přes nulovou množinu je nula.)

Důkaz. Označíme-li

$$\bar{f} : x \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in M, \\ 0 & \text{pro } x \in P - M, \end{cases}$$

je $\bar{f} \sim 0$ (viz definici 9.28.c), tedy

$$\bar{f} \in \mathcal{L} \qquad \text{a} \quad A\bar{f} = 0 .$$

$\boxed{9.56}$ **Věta.**

(A) Buďte $M_n \in \mathfrak{M}$ $(n=1,\dots,k)$ po dvou disjunktní, $M = \bigcup_{n=1}^{k} M_n$.

Potom

$$A_M f = \sum_{n=1}^{k} A_{M_n} f ,$$

má-li alespoň jedna strana této rovnosti smysl (tj. buďto je $f \in \mathcal{L}^*_M$, anebo $f \in \mathcal{L}^*_{M_n}$ pro každé n a součet má smysl).

(B) Buďte $M_n \in \mathfrak{M}$ po dvou disjunktní , $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Potom

$$A_M f = \sum_{n=1}^{\infty} A_{M_n} f ,$$

má-li levá strana smysl.

(C) Buďte $M_n \in \mathfrak{M}$, $M_1 \subset M_2 \subset \dots$, $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ a $f \in \mathcal{L}^*_M$.

Potom

$$A_M f = \lim_{n\to\infty} A_{M_n} f .$$

(D) Buďte $M_n \in \mathfrak{M}$, $M_1 \supset M_2 \supset \dots$, $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ a $f \in \mathscr{L}_{M_1}$.
Potom

$$A_M f = \lim_{n\to\infty} A_{M_n} f .$$

(Porovnejte navzájem předpoklady jednotlivých tvrzení!)

Důkaz.

(A) Položme $\varphi_n(x) = f(x)$ pro $x \in M_n$, $\varphi_n(x) = 0$ pro $x \in P-M_n$,

$$\varphi(x) = f(x) \quad \text{pro } x \in M, \quad \varphi(x) = 0 \quad \text{jinde.}$$

Potom

$$\varphi_n \in \mathscr{L}^*, \quad \varphi = \sum_{n=1}^{k} \varphi_n \quad \text{a součet} \quad \sum_{n=1}^{k} A\varphi_n \quad \text{má smysl.}$$

Stačí použít větu 9.43.a.

(B) Podržme označení z (A). Nechť zprvu je $f \in \mathscr{L}^*_M$, $f \geq 0$. Potom

$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \in \mathscr{L}^R$, $\varphi_n \in \mathscr{L}^R$, a použijme Leviho větu pro integraci řady funkcí.

Je-li nyní $f \in \mathscr{L}^*_M$ libovolná, je podle právě dokázaného

$$A_M f^+ = \sum_{n=1}^{\infty} A_{M_n} f^+, \quad A_M f^- = \sum_{n=1}^{\infty} A_{M_n} f^-,$$

přičemž rozdíl levých stran má smysl. Odtud plyne ze známých vlastností řad (které věty ?) tvrzení.

(C) Zřejmě $M = \bigcup_{n=2}^{\infty} (M_n - M_{n-1}) \cup M_1$. Podle (B) a (A) potom

$$A_M f = \sum_{n=2}^{\infty} (A_{M_n} f - A_{M_{n-1}} f) + A_{M_1} f = \lim_{p\to\infty} A_{M_p} f$$

(rozmyslete !)

(D) Položte $N_n = M_1 - M_n$ a použijte (C) a (A).

J.* PŘÍPAD $P \in \mathfrak{M}$.

Jak jsme již řekli, ne vždy musí být celý prostor P měřitelná množina (viz kupř. cvičení 9.A). Nutno říci, že toto je jistý "nedostatek" celé teorie. V tomto odstavci ukážeme některé věty, které platí právě za uvedeného dodatečného předpokladu $P \in \mathfrak{M}$. Poznamenejme, že tento odstavec je poněkud obtížnější ke studiu; věty zde uvedené nejsou již tak příliš "důležité" a budou nám sloužit převážně v dalších kapitolách, až budeme srovnávat teorii Daniellova rozšíření integrálu s vybudováním integrálu na základě teorie míry a budou právě základem mnoha definic v těchto kapitolách. Není tedy nutné tuto kapitolu studovat detailně, můžete si uvedené věty přečíst kupř. i bez důkazů. Naopak, čtenáře, který by se o uvedenou problematiku zajímal, mohu odkázat na $[\mathcal{F}]$, odstavce 8.22 - 8.42.

V dalším tedy předpokládejme, že $P \in \mathcal{M}$ (což je ekvivalentní předpokladu, že konstantní funkce $1 \in \Lambda$!).

9.57 Věta (charakteristika měřitelných funkcí).

Funkce $f \in \Lambda$, právě když $\{x \in P;\ f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$ pro každé $\alpha \in E_1$.

Důkaz. 1. Buď $f \in \Lambda$, $\alpha \in E_1$. Označme $B = \{x \in P;\ f(x) > \alpha\}$ a definujme funkce f_n, g_n předpisem

$$f_n = n\left[\, f - \inf\,(f, \alpha)\right], \quad g_n = \inf(1, f_n)\ .$$

Potom $f_n, g_n \in \Lambda$ a jak lehko zjistíme, $g_n \to c_B$. Tedy $c_B \in \Lambda$, tj. $B \in \mathcal{M}$ (kde jsme použili předpoklad $P \in \mathcal{M}$?).

2. Předpokládejme, že je splněna podmínka pro funkci f; chceme ukázat, že $f \in \Lambda$. Stejně jako v 16.13 se ukáže, že existuje posloupnost "jednoduchých" funkcí s_n tak, že $s_n \to f$. Ale každá funkce s_n má tvar

$$s_n = \sum_{i=1}^{k} d_i\, c_{F_i}\ ,$$

kde $d_i \in E_1$ a $F_i \in \mathcal{M}$. Tudíž $s_n \in \Lambda$ pro každé n , odkud již plyne $f \in \Lambda$.

9.58 Důsledek.

Buďte $f, g \in \Lambda$, potom $f.g \in \Lambda$

(tato věta neplatí bez předpokladu $P \in \mathcal{M}$!, viz cvičení 9.A.b)

Důkaz. Lze provést stejně jako důkaz věty 16.8.E pomocí předešlého 9.57.

9.59 Věta (tzv. regularita vnější míry).

Buď $Q \subset P$. Potom existuje množina $E \in \mathcal{M}$, $E \supset Q$ tak, že $\tilde{\mu} Q = \mu E$.

Důkaz. Je-li $\tilde{\mu} Q = +\infty$, stačí položit $E = P$. Nechť tedy $\tilde{\mu} Q < +\infty$. Podle cvičení 9.F nalezněme funkci f tak, aby

$$f \in \mathcal{L}\ , \quad f \geq c_Q\ , \quad Af = \tilde{A} c_Q = \tilde{\mu} Q\ .$$

Položme $E = \{x \in P\ ;\ f(x) \geq 1\}$. Zřejmě $E \supset Q$, $E \in \mathcal{M}$ (plyne z 9.57 a z faktu, že $\mathcal{M}$ je σ-algebra, viz též 16.4) a ze vztahu $c_Q \leq c_E \leq f$ plyne

$$\tilde{\mu} Q \leq \mu E \leq Af = \tilde{\mu} Q\ .$$

9.60 **Věta.** Prostor P má σ-konečnou míru, tj. existují množiny $H_n \in \mathfrak{M}$ tak, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = P$ a $\mu H_n < +\infty$ pro každé n.

Důkaz. Nechť $\mu P = +\infty$ (jinak je tvrzení zřejmé). Zřejmě $c_P \in \mathcal{L}^R$, existují tedy $f_n \in \mathcal{L}$, $f_n \nearrow c_P$. Stačí položit $H_n = \left\{ x \in P;\ f_n(x) > \frac{1}{2} \right\}$. Podle 9.57 je $H_n \in \mathfrak{M}$; zřejmě $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = P$ (proč?) a $\mu H_n < +\infty$ (k poslednímu použijte třeba Čebyševovu nerovnost ze cvičení 9.I, podle níž $\mu H_n \leq 2\, A\, f_n$; ostatně konečnost μH_n je vidět ihned).

9.61 **Věta** (charakteristika měřitelných množin).

Buď $Y \subset P$. Potom $Y \in \mathfrak{M}$, právě když je splněna následující podmínka:

(*) : pro každou množinu $T \subset P$ platí

$$\tilde{\mu} T = \tilde{\mu}(T \cap Y) + \tilde{\mu}(T - Y)$$

(viz též 13.22 a komentář v poznámce).

Důkaz.

1. Buď $Y \in \mathfrak{M}$ a zvolme $T \subset P$. Podle 9.59 nalezněme množinu $E \in \mathfrak{M}$ tak, aby $E \supset T$, $\mu E = \tilde{\mu} T$. Potom

$$\tilde{\mu}(T \cap Y) + \tilde{\mu}(T - Y) \leq \mu(E \cap Y) + \mu(E - Y) = \mu E = \tilde{\mu} T$$

(kterých vět používáme?).
Obrácená nerovnost však platí vždy (viz 9.49.d).

2. Buď $Y \subset P$ a předpokládejme, že podmínka (*) platí. Pro lepší přehlednost důkazu předpokládejme nejdříve, že $\tilde{\mu} Y < +\infty$. Podle 9.59 nalezněme $E \in \mathfrak{M}$ tak, aby $E \supset Y$, $\mu E = \tilde{\mu} Y$. Použitím (*)(pro $T = E$) dostáváme, že $\tilde{\mu} E = \tilde{\mu}(E \cap Y) + \tilde{\mu}(E - Y) = \tilde{\mu} Y + \tilde{\mu}(E - Y)$. Tudíž $\tilde{\mu}(E - Y) = 0$ a podle 9.46.a je $E - Y \in \mathfrak{M}$. Tím jsme ukázali, že

$$Y = E - (E - Y) \in \mathfrak{M} \quad \text{(viz 9.46.c).}$$

Je-li nyní $\tilde{\mu} Y = +\infty$, nalezněme podle 9.60 množiny $H_n \in \mathfrak{M}$ tak, aby $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = P$ a $\mu H_n < +\infty$. Nyní kopírujme důkaz předešlého pro případ $\tilde{\mu} Y < +\infty$. Nalezněme tedy množiny $E_n \in \mathfrak{M}$ tak, aby $E_n \supset Y \cap H_n$ a $\mu E_n = \tilde{\mu}(Y \cap H_n)$ a položme $G_n = H_n \cap E_n$. Zřejmě

$$G_n \in \mathfrak{M}, \quad \mu G_n < +\infty, \quad G_n \cap Y = H_n \cap Y,$$

tedy $\mu G_n \geq \mu(G_n \cap Y) = \mu(H_n \cap Y) = \mu E_n \geq \mu G_n$, čímž všude platí rovnost. Použitím (*) opět dostaneme, že množina $G_n - Y$ je nulová pro každé n

$$(\mu G_n = \tilde{\mu}(G_n \cap Y) + \tilde{\mu}(G_n - Y) \quad \text{pro } T = G_n),$$

tedy měřitelná. Tím jsme ukázali, že $Y \cap H_n = G_n - (G_n - Y) \in \mathfrak{M}$ pro každé n. Nyní si stačí uvědomit, že $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Y \cap H_n)$.

K. CVIČENÍ A PROBLÉMY

Většinu příkladů k této kapitole naleznete ve skriptech $[\mathcal{T}]$, nemá proto smysl, abych je zde opisoval. Uvedu zde proto pouze nejnutnější příklady.

$\boxed{9.A}$ Základní prostory.

(a) Položme $P = \langle 0,1)$, $Z = \{ f;\ f(x) = kx \text{ pro } x \in \langle 0,1),\ k \in E_1 \}$. Pro každou $f \in Z$ položme $Af = 0$. Ukažte, že

(1) (Z,A) tvoří základní prostor,

(2) $f \in Z^* \Longrightarrow f(0) = 0$,

(3) $f \in \mathcal{L} \Longleftrightarrow f(0) = 0$ (čemu je rovno Af ?),

(4) $\mathcal{L} = \Lambda$,

(5) $A \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow A \subset (0,1)$ (takže kupř. $P \notin \mathfrak{M}$),

(6) $0 \in A \Longrightarrow \tilde{\mu} A = +\infty$,

(7) $f \sim g \Longleftrightarrow f(0) = g(0)$.

(b) Volte P,Z jako v (a). Pro $f \in Z$ tvaru $f(x) = kx$ položme $Af = k$. Opět ukažte, že

(1) (Z,A) tvoří základní prostor,

(2) $\mathcal{L} = Z$,

(3) $f, g \in \Lambda \not\Longrightarrow f \cdot g \in \Lambda$,

(4) $\mathfrak{M} = \{ \emptyset \}$.

(c) Volte (Z,A) jako v 9.2.b, tj.

$P = \{ a,b \}$, $Z = \{ f;\ f(a) = 0,\ f(b) \in E_1 \}$, $Af = f(b)$ pro $f \in Z$-.
Ukažte, že

(1) (Z,A) tvoří základní prostor,

(2) $f \in Z^* \Longrightarrow f(a) = 0$,

(3) $\mathcal{L} = Z$,

(4) $f \in \Lambda \Longrightarrow f(a) = 0$,

(5) je-li $\varphi(a) = 1$, $\varphi(b) = +\infty$, je $\tilde{A}\varphi = \underset{\sim}{A}\varphi = +\infty$ a $\varphi \notin \Lambda$,

(6) $\mathfrak{M} = \{ \emptyset, \{ b \} \}$.

Další příklady naleznete v $[\mathcal{T}]$, 2.5 - 2.23.

9.B Maximalita systému $\mathcal{L}$.

Ukážeme, že systém $\mathcal{L}$ je v jistém smyslu maximální. Integrál A se již nepodaří rozšířit na širší systém funkcí obsažený v Λ tak, aby "nový integrál" byl stále ještě absolutně konvergentní. Lze vyslovit totiž tuto - značně obecnou - větu.

"Nechť $\mathcal{T}$ je systém funkcí na P a nechť $\mathcal{L} \subset \mathcal{T} \subset \Lambda$.
Předpokládejme, že každé funkci $f \in \mathcal{T}$ umíme přiřadit jisté reálné číslo $\mathcal{T} f$ tak, že platí

(i) $f \in \mathcal{L} \Longrightarrow Af = \mathcal{T} f$,

(ii) $f,g \in \mathcal{T}$, $f \leq g \Longrightarrow \mathcal{T} f \leq \mathcal{T} g$.

Potom platí

(I) $f \in \mathcal{T}$, $f \geq 0 \Longrightarrow f \in \mathcal{L}$,

(II) $f \in \mathcal{T} - \mathcal{L} \Longrightarrow |f| \notin \mathcal{T}$ a $A|f| = +\infty$.

Rozmyslete a dokažte !

Návod. (I) Buď $f \in \mathcal{T}$, $f \geq 0$. Potom $f \in \mathcal{L}^R$, existují tedy $f_n \in \mathcal{L} \subset \mathcal{T}$, $f_n \nearrow f$.
Dále

$$Af_n = \mathcal{T} f_n \leq \mathcal{T} f \text{ , tudíž } Af = \lim Af_n \leq \mathcal{T} f < +\infty .$$

Závěr: $f \in \mathcal{L}$.

(II) Nechť $|f| \in \mathcal{T}$, potom podle (I) je $|f| \in \mathcal{L}$, a tudíž i $f \in \mathcal{L}$ (podle čeho ?) .

9.C Hustota Z v $\mathcal{L}$.

Buď $f \in \mathcal{L}$, $\varepsilon > 0$, Potom existuje $\varphi \in Z$ tak, že $A|f - \varphi| < \varepsilon$.
Dokažte !

Návod. Nalezněte nejdříve $g \in Z^R$, $g \geq f$ tak, aby $Af \leq Ag < Af + \frac{\varepsilon}{2}$.
K funkci g dále nalezněte $\varphi \in Z$, $\varphi \leq g$ tak, aby $Ag - \frac{\varepsilon}{2} < A\varphi \leq Ag$.
Potom

$$A|f - \varphi| \leq A|f - g| + A|g - \varphi| = A(g - f) + A(g - \varphi) < \varepsilon .$$

Poznámka. Uvažujeme-li množinu $\hat{\mathcal{L}}$, jejíž elementy jsou třídy ekvivalentních funkcí z $\mathcal{L}$ a zavedeme-li do $\hat{\mathcal{L}}$ metriku předpisem

$$\rho(F,G) = A|f - g| \text{ , kde } f \in F \text{ , } g \in G$$

($\rho(F,G)$ nezávisí na volbě funkcí f,g a je to skutečně metrika), cvičení 9.C říká, že množina $\hat{Z}$ (tříd ekvivalentních funkcí ze Z) je hustá v $\hat{\mathcal{L}}$. Lze též dokázat, že metrický prostor ($\hat{\mathcal{L}}$, ρ) je <u>úplný</u>, jinými slovy - ($\hat{\mathcal{L}}$, ρ) je úplný obal (zúplnění) prostoru ($\hat{Z}$, ρ). Tohoto faktu využívá mnoho autorů ke konstrukci systému $\mathcal{L}$ ze základního prostoru (Z,A). V této souvislosti též upozorňuji na poznámku ve cvičení 1.N.

9.D Ještě charakteristika systému Λ.

Dokažte, že

$f \in \Lambda$, právě když existuje posloupnost funkcí $\varphi_n \in Z$ s vlastností

$$\varphi_n \to f \quad \text{sk.všude.}$$

Návod. Pro důkaz jedné implikace použijte 9.42.g. Buď naopak $f \in \Lambda$. Nalezněte posloupnost funkcí f_n, φ_n tak, aby

$$f_n \in \mathscr{L}\,,\ f_n \to f\,,\ \varphi_n \in Z\,,\ A\,|f_n - \varphi_n| < \frac{1}{2^n}\ .$$

Z Leviho věty odvoďte, že $A\left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - \varphi_n|\right) < +\infty$, tudíž podle 9.31 řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - \varphi_n(x)|$ konverguje pro sk. všechna x. Speciálně $f_n - \varphi_n \to 0$ sk.vš.

9.E $(\mathscr{L}, A)$ jako základní prostor.

Buď (Z,A) základní prostor, zkonstruujme příslušný systém $\mathscr{L}$ a integrál A na něm. Označme $\dot{\mathscr{L}} = \{ f \in \mathscr{L}\ ;\ f \text{ konečná všude} \}$. Dokažte, že $(\dot{\mathscr{L}}, A)$ tvoří základní prostor!

Můžeme nyní celý proces Daniellova rozšíření opakovat (vycházíme přitom ze základního prostoru $(\dot{\mathscr{L}}, A)$). Získáme tím "příslušný systém $\mathscr{L}$" – označme jej $\mathscr{L}(\dot{\mathscr{L}})$. Jaký bude vztah systémů $\mathscr{L}$ a $\mathscr{L}(\dot{\mathscr{L}})$? Schematicky si situaci můžeme znázornit takto:

$$\boxed{Z, A} \longrightarrow \boxed{\mathscr{L}, A} \longrightarrow \boxed{\dot{\mathscr{L}}, A} \longrightarrow \boxed{\mathscr{L}(\dot{\mathscr{L}}), A} \longrightarrow ??\ .$$

Je zřejmé, že $\mathscr{L} \subset \mathscr{L}(\dot{\mathscr{L}})$ (proč?), a že $\mathscr{L}(\dot{\mathscr{L}}) \subset \Lambda$ (toto plyne z 9.D, ale jak?). Můžeme tedy aplikovat 9.B a dostaneme, že $\mathscr{L}(\dot{\mathscr{L}}) \subset \mathscr{L}$ (neboť

$$f \in \mathscr{L}(\dot{\mathscr{L}}) \Longrightarrow f^+, f^- \in \mathscr{L}(\dot{\mathscr{L}}) \overset{9.B}{\Longrightarrow} f^+, f^- \in \mathscr{L} \Rightarrow f \in \mathscr{L}\ ),$$

tudíž $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\dot{\mathscr{L}})$.

Závěr. Vyjdeme-li z dvojice $(\mathscr{L}, A)$ jakožto ze "základního prostoru", nedá nám teorie Daniellova rozšíření již nic nového. Ostatně toto tvrzení je zřejmé i z poznámky v 9.C. Objasněte!

Cvičení. Dokažte též přímo (bez užití 9.B a 9.D), že $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\dot{\mathscr{L}})$. (použijte kupříkladu 9.16 !)

9.F Cvičení. Buď f libovolná funkce na P taková, že $\tilde{A}f$ je konečný. Potom existuje $F \in \mathscr{L}$, $F \geq f$ s vlastností $\tilde{A}f = AF$.
Dokažte!

Návod. Zvolte posloupnost funkcí $f_n \in Z^R$, $f_n \geq f$ tak, aby

$$Af_n < \tilde{A}f + \frac{1}{2^n} \quad \text{a} \quad f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \dots .$$

Stačí položit $F = \lim f_n$.

9.G Horní integrál.

V celé kapitole jsme věnovali hornímu integrálu menší pozornost. Proto do tohoto odstavce shrneme jeho základní vlastnosti.

(a) Dokazujte následující tvrzení:

1. $f \leq g \Longrightarrow \tilde{A}f \leq \tilde{A}g$,
2. $\alpha \geq 0 \Longrightarrow \tilde{A}(\alpha f) = \alpha \tilde{A}f$,
3. $f \geq 0$, $g \geq 0 \Longrightarrow \tilde{A}(f+g) \leq \tilde{A}f + \tilde{A}g$,
4. $f_n \nearrow f$, $\tilde{A}f_1 > -\infty \Longrightarrow \tilde{A}f_n \nearrow \tilde{A}f$,
5. $f_n \geq 0 \Longrightarrow \tilde{A}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A} f_n$.

Návod.

3. Je-li $h_1, h_2 \in Z^R$, $h_1 \geq f$, $h_2 \geq g$, je $h_1 + h_2 \in Z^R$ a $h_1 + h_2 \geq f + g$. Čili

$\tilde{A}(f+g) \leq A(h_1 + h_2) = Ah_1 + Ah_2$, odkud již plyne tvrzení.

4. Stačí zřejmě dokázat, že $\lim \tilde{A}f_n \geq \tilde{A}f$. Tato nerovnost je zřejmá pro $\lim \tilde{A}f_n = +\infty$. Buď $\lim \tilde{A}f_n < +\infty$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme posloupnost $g_n \in Z^R$, $g_n \geq f_n$ tak, aby $Ag_n < \tilde{A}f_n + \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Chceme použít 9.9.f; k tomu potřebujeme, aby posloupnost $\{g_n\}$ byla neklesající. Položme tedy $G_n = \max(g_1, \dots, g_n)$. Zřejmě

$$G_n \in Z^R, \quad G_n \geq g_n \geq f_n$$

a stačí ukázat, že $AG_n < \tilde{A}f_n + \varepsilon$, neboť potom

$$\lim \tilde{A}f_n + \varepsilon \geq \lim AG_n = A(\lim G_n) \geq \tilde{A}f .$$

5. Použijte (4) a (3). Dokažte též přímo s použitím implikace:

$$g_n \in Z^R,\ g_n \geq 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} g_n \in Z^R \quad \text{a} \quad A\left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} Ag_n .$$

(b) Platí (2) i pro $\alpha < 0$? Platí (3) anebo (5) i pro libovolné funkce?

(c) Ukážeme, že ve (3) nemusí nastat rovnost. Vezměte základní prostor (Z, A) z příkladu 9.A.b a volte

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = \frac{1}{3} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

(představte si názorně na obrázku!). Viz též 10.K.

27571 Z11

(d) Dokažte následující tvrzení:

6. $f \geq 0$, $\tilde{A}f = 0 \Longrightarrow f \sim 0$,

7. $\tilde{A}f < +\infty \Longrightarrow f < +\infty$ skoro všude.

Návod. 6. Použijte důkaz v 9.35.

7. Existuje $g \in Z^R$, $g \geq f$ s konečným integrálem Ag . Nyní aplikujte 9.31 na funkci g . Též můžete dokázat přímo - nechť $f \geq 0$, označte $B = \{ x \in P;\ f(x) = +\infty \}$ a zvolte $\varepsilon > 0$. Potom ze vztahu $c_B \leq \varepsilon f$ plyne $\tilde{A}c_B \leq \tilde{A}(\varepsilon f) = \varepsilon \tilde{A}f$, tedy $\tilde{A}c_B = 0$.

(e) Dokažte tzv. Fatouovo lemma.

Nechť $\tilde{A}(\inf f_n) > -\infty$. Potom

$$\tilde{A}(\liminf f_n) \leq \liminf \tilde{A} f_n .$$

Návod. Použijte (4).

9.H Vnější míra.

Pomocí 9.G dokažte vlastnosti vnější míry z věty 9.49.

9.I Čebyševovo lemma.

Buď $f \geq 0$, $\alpha > 0$. Označíme-li $M = \{ x \in P;\ f(x) > \alpha \}$, platí nerovnost $\tilde{A}f \geq \alpha \tilde{\mu} M$. Dokažte!

Návod. Uvědomte si, že $f \geq \alpha \cdot c_M$.

9.J Zobecněné řady.

(I) Buď M neprázdná spočetná množina. Označme symbolem Z systém všech konečných funkcí na M , které jsou různé od nuly vždy jen na konečné podmnožině M . Pro $f \in Z$ tudíž existují $m_1, \dots, m_k \in M$ tak, že $f(m) = 0$ pro všechna $m \in M$, $m \neq m_i$ $(i = 1,\dots,k)$ a můžeme proto položit

$$Af = f(m_1) + \dots + f(m_k)$$

(formálně $Af = \sum_{m \in M} f(m)$).

Dokažte, že

(a) (Z,A) tvoří základní prostor,

(b) každá funkce na M je měřitelná,

(c) $f \in \mathscr{L}$, právě když $\sum_{k=1}^{\infty} |f(m_k)| < +\infty$ $(M = \{ m_k \})$,

(d) pro $f \geq 0$ je $Af = \sup \left\{ \sum_{m \in K} f(m) ;\ K \subset M ,\ K \text{ konečná} \right\}$.

(II) Buď opět M spočetná neprázdná množina, f funkce na M.

(i) Je-li $f \geq 0$ na M, definujeme

$$\sum_{m \in M} f(m) = \sup \left\{ \sum_{m \in K} f(m) \ ; \ K \subset M \ , \ K \text{ konečná} \right\} .$$

(ii) Je-li f libovolná, položíme

$$\sum_{m \in M} f(m) = \sum_{m \in M} f^{+}(m) - \sum_{m \in M} f^{-}(m) \ ,$$

má-li rozdíl vpravo smysl.

(III) Nechť f je funkce na M. Potom

$f \in \mathcal{L}^{*}$, právě když $\sum_{m \in M} f(m)$ má smysl.

V tomto případě pak $Af = \sum_{m \in M} f(m)$. Dokažte !

(IV) Z vlastností integrálu a z (III) dostáváme nyní automaticky vlastnosti "zobecněných řad". Dokažte např., že

(a) nechť $N \subset M$, $f = 0$ na $M-N$, potom $\sum_{m \in M} f(m) = \sum_{m \in N} f(m)$, má-li jedna strana smysl,

(b) nechť $N_i \subset M$ jsou po dvou disjunktní, $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i = M$, nechť existuje $\sum_{m \in M} f(m)$; potom

$$\sum_{m \in M} f(m) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{m \in M_i} f(m) \right)$$

(aplikujte tuto větu třeba na tzv. "dvojné řady"!).

(V) Nechť M je nyní nespočetná, f funkce na M. Definujte $\sum_{m \in M} f(m)$ podle (II). Potom platí:

je-li $f(m) > 0$ pro nespočetně mnoho $m \in M$, je

$$\sum_{m \in M} f(m) = + \infty \ .$$

Dokažte !

10. Lebesgueův integrál a míra v E_1

Obsah:

V této kapitole předpokládejme, že vyjdeme ze základního prostoru $Z = C_1$, $A = (R)\int_{E_1}$ (viz 8.2, 8.4, 9.2.a). Kromě vět, které jsme odvodili pro abstraktní teorii, uvedeme řadu vět platných v tomto konkrétním příkladě. Systém všech měřitelných množin odvozených ze (Z,A) značme nyní $\mathcal{M}_1$, míru symbolem μ_1, vnější míru pak $\tilde{\mu}_1$.

A. POLOSPOJITÉ FUNKCE

10.1 Definice.

Buď (P, ρ) metrický prostor (můžete uvažovat pouze případ $P = E_1$). Řekneme, že funkce $f : P \to E_1 \cup \{+\infty\}$ je polospojitá zdola, jestliže množina $\{x \in P ; f(x) > a\}$ je otevřená pro každé $a \in E_1$. Obdobně definujme funkce polospojité shora.

10.2 Příklady.

(A) Nechť $P = E_1$, ρ eukleidovská metrika. Zkoumejte polospojitost následujících funkcí:

$$f(0) = 1, \quad f(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x \in E_1 - \{0\},$$

Dirichletova a Riemannova funkce.

(B) Buď $G \subset P$, potom

c_G je polospojitá zdola, právě když G je otevřená.

Dokažte !

(C) Funkce f je spojitá na P, právě když je polospojitá zdola i shora. Dokažte !

10.3 Věta.

Nechť f_n jsou spojité na P, $f_n \nearrow f$ na P.
Potom funkce f je polospojitá zdola.

Poznámka. Jak uvidíme z důkazu, stačí předpokládat, že funkce f_n jsou polospojité zdola.

Důkaz. Buď $a \in E_1$. Potom

$$\left\{ x \in P ;\ f(x) > a \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in P ;\ f_n(x) > a \right\},$$

odkud již lehko plyne tvrzení.

10.4 Poznámka.

Platí - v jistém smyslu - i obrácené tvrzení.

Je-li f polospojitá zdola, potom můžeme nalézt posloupnost spojitých funkcí f_n tak, aby $f_n \nearrow f$. O tomto, jakož i o některých dalších problémech, se lze dočíst kupříkladu v [Re-Pr], referát 3.

B. SPECIÁLNÍ VLASTNOSTI (C_1, (R) $\int_{E_1}$)

Znovu připomeňme, že $Z = C_1$, $A\,f = (R)\int_{E_1} f$.

10.5 Věta (charakteristika systému Z^R).

Je-li $f \in Z^R$, potom

(i) f je polospojitá zdola.

(ii) $f \geq 0$ vně jistého uzavřeného intervalu.

Důkaz. Buď $f \in Z^R$; můžeme nalézt posloupnost spojitých funkcí $\{f_n\}$ s kompaktními nosiči tak, aby $f_n \nearrow f$. Podle 10.3 je funkce f polospojitá zdola v E_1. Funkce f_1 má kompaktní nosič; můžeme tedy nalézt interval $\langle A,B \rangle$ tak, aby $f_1 = 0$ na $E_1 - \langle A,B \rangle$. Potom ovšem

$$f(x) \geq f_1(x) = 0$$

pro všechna $x \in E_1 - \langle A,B \rangle$.

10.6 Poznámka.

Lze dokázat, že podmínky (i) a (ii) plně charakterizují systém funkcí Z^R. Vyhovuje-li totiž funkce f podmínkám (i) a (ii), leží již nutně v systému Z^R. Pokuste se provést důkaz tohoto tvrzení za předpokladu, že již máte dokázanou větu z odstavce 10.4. Viz též [Č - M], odst. 2.4.

10.7 Věta.

Otevřené a uzavřené množiny v E_1 jsou měřitelné.

Důkaz. Buď $G \subset E_1$ otevřená množina. Můžeme nalézt spočetnou množinu po dvou disjunktních intervalů $\{(a_n,b_n)\}$ tak, aby $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k,b_k)$. Libovolný otevřený interval v E_1 je měřitelná množina (viz 9.45.b), podle 9.46.b je tedy $G \in \mathcal{M}_1$. Podle téže věty 9.46.c je pak každá uzavřená množina – jako doplněk otevřené množiny – měřitelná.

Jiný důkaz. Podle 10.2.B je charakteristická funkce c_G otevřené množiny G polospojitá zdola v E_1 a podle 10.6 (máme-li tuto větu dokázánu) je $c_G \in Z^R$.

10.8 Poznámka.

Podle 9.46 jsou tedy všechny množiny, které můžeme dostat spočetným sjednocením či průnikem otevřených a uzavřených množin, měřitelné. Speciálně jsou měřitelné všechny množiny typu F_σ a G_δ, dále jsou měřitelné (ze stejných důvodů) všechny množiny typu $F_{\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma}$ atd. Ježto systém všech měřitelných množin tvoří σ-algebru (viz 9.46 a 13.1) a ježto každá otevřená množina je měřitelná, je též každá borelovská množina měřitelná (viz 13.7, 13.8.c).

10.9 Věta.

Každá spojitá funkce v E_1 je měřitelná.

Důkaz. Nechť f je spojitá funkce v E_1. Definujme posloupnost funkcí f_n vztahem

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in \langle -n,n \rangle, \\ 0 & \text{pro } x \in E_1 - (-n-1,\, n+1), \\ \text{lineárně v intervalech} & \langle -n-1, -n \rangle,\ \langle n, n+1 \rangle . \end{cases}$$

Zřejmě $f_n \in Z$ a $f_n \to f$.

Jiný důkaz. Buď f spojitá v E_1. Potom množina $\{x;\ f(x) > c\}$ je otevřená a podle 10.7 tudíž měřitelná. Nyní stačí použít obecnou větu 9.57.

10.10 Poznámka.

Podle 9.42.g jsou měřitelné všechny limity posloupností funkcí spojitých, tedy každá funkce Baireovy 1.třídy je měřitelná. Obdobně, měřitelné jsou všechny funkce Baireovy 2.třídy, 3.třídy atd. Dokonce každá baireovská funkce je měřitelná.

10.11 Věta.

Všechny jednobodové (dokonce všechny spočetné) množiny v E_1 jsou nulové.

Důkaz. Viz 9.27.

C. VZTAH R, N a L INTEGRÁLU

10.12 Definice.

Podle naší obecné teorie máme definován prozatím integrál přes podmnožiny – $\int_M f$ (píšeme místo A symbol $\int$ či (L) $\int$); chceme nyní definovat i (L) $\int_a^b$, či krátce $\int_a^b f$.

Je-li I jednorozměrný uzavřený interval, I = $\langle a,b \rangle$, píšeme místo $\int_I$ obyčejně $\int_a^b$. Je-li J některý z intervalů $\langle a,b)$, $(a,b\rangle$, (a,b), platí $\int_a^b f = \int_J f$, jakmile alespoň jedna strana rovnosti má smysl (množina I - J je totiž nulová, odůvodněte podrobně!). Rovněž tak píšeme $\mathcal{L}(a,b)$ místo $\mathcal{L}_J$, ať je interval J libovolného druhu.

Obdobně definujeme symboly $\int_a^{+\infty}$, $\int_{-\infty}^a$, $\int_{-\infty}^{+\infty}$ – proveďte sami! Je-li $-\infty \leq b \leq a \leq +\infty$ a existuje-li $\int_b^a f$ (tj. je-li $f \in \mathcal{L}^*(b,a)$) , položme $\int_a^b f \overset{\text{def.}}{=} -\int_b^a f$. Dále položme $\int_a^a f = 0$ pro libovolnou funkci f a libovolné $a \in E_1$.

10.13 **Věta** (vztah Riemannova a Lebesgueova integrálu).

Nechť existuje (R) $\int_a^b f$, potom $f \in \mathcal{L}(a,b)$ a (R) $\int_a^b f = (L) \int_a^b f$

(tj. $R(\langle a,b \rangle) \subset \mathcal{L}(a,b)$ a integrály na $R(\langle a,b \rangle)$ splývají).

Důkaz. Buď $D \equiv \left\{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \right\}$ dělení $\langle a,b \rangle$, dodefinujme funkci f mimo interval $\langle a,b \rangle$ nulou. Označme

$$g_D = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) \cdot c_{(x_{i-1},\, x_i)} ,$$

$$G_D = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x) \cdot c_{(x_{i-1},\, x_i)} .$$

Zřejmě každý sčítanec je v $\mathcal{L}^*$ $\left(c_{(x_{i-1},x_i)} \in Z^R \subset \mathcal{L}^R\right)$ a součty mají smysl, tudíž g_D, $G_D \in \mathcal{L}^*$ a

$$\int_{E_1} g_D = s(f,D) , \qquad \int_{E_1} G_D = S(f,D) , \qquad (*)$$

speciálně g_D , $G_D \in \mathcal{L}$.

Zvolme nyní posloupnost dělení $\{D_n\}$ tak, aby D_{k+1} bylo zjemněním D_k a aby $\nu(D_k) \to 0$. Potom podle 1.23

$$\lim_{k\to\infty} S(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} s(f, D_k) = (R)\int_a^b f . \qquad (**)$$

Označme $f_k = g_{D_k}$, $F_k = G_{D_k}$. Zřejmě $f_k \nearrow h$, $F_k \searrow H$, $f_k \leq f \leq F_k$ sk.vš.

Podle Leviho věty 9.37 tudíž $h \in \mathcal{L}^R$, $H \in \mathcal{L}^K$

$$\int_{E_1} f_k \to \int_{E_1} h , \qquad \int_{E_1} F_k \to \int_{E_1} H . \qquad (***)$$

Ze vztahů $h \leq f \leq H$ sk.vš. plyne $h, H \in \mathcal{L}$.
Z (*), (**) a (***) konečné dostáváme

$$\int_{E_1} (H - h) = (R)\int_a^b f - (R)\int_a^b f = 0 ,$$

tedy ($H \geq h$ sk.vš.) $H = h$ sk.vš. Tudíž $f = h$ (= H) sk.vš., $f \in \mathcal{L}$ a

$$\int_{E_1} f = (L)\int_a^b f = (R)\int_a^b f .$$

10.14 Lemma.

Buď $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f \in \mathcal{L}^*(a,b)$. Potom

$$(L)\int_a^b f = \lim_{x\to b_-} (L)\int_a^x f = \lim_{x\to a_+} (L)\int_x^b f .$$

Důkaz. Integrál $\int_a^x f$ existuje (podle 9.54) pro každé $x \in (a,b)$.

Označíme-li $\Phi(x) = \int_a^x f$ pro $x \in (a,b)$, potom

$$\Phi(b) = \lim_{x\to b} \Phi(x) , \text{ právě když } \Phi(b) = \lim_{n\to\infty} \Phi(b_n)$$

pro každou posloupnost $\{b_n\}$, $b_n \nearrow b$.
(Heineho věta, rozvažte!). Zvolíme-li ale posloupnost $\{b_n\}$, $b_n \nearrow b$ a aplikujeme-li větu 9.56.C na množiny $M_n = (a, b_n)$, dostaneme tvrzení.

10.15 Věta.

Buď $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, nechť funkce f je spojitá v (a,b), nechť $f \in \mathcal{L}^*(a,b)$. Označme F primitivní funkci k funkci f na (a,b) (proč existuje?). Potom existují $\lim_{x\to b_-} F(x)$, $\lim_{x\to a_+} F(x)$ (byť nevlastní!) a

$$(L)\int_a^b f = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) .$$

Důkaz. Zvolme $c \in (a,b)$, buď $x \in (c,b)$. Potom podle 1.27.b, 10.13

$$(L)\int_c^x f = (R)\int_c^x f = F(x) - F(c) .$$

Podle předešlého je však

$$(L)\int_c^b f = \lim_{x\to b} (L)\int_c^x f = \lim_{x\to b} F(x) - F(c) .$$

Obdobně vyjádříme $(L)\int_a^c f$, odkud již lehko dostaneme tvrzení.

10.16 Věta (vztah N a L integrálu).

Buď $f \in \mathcal{L}^*(a,b)$, buď f spojitá v (a,b) a nechť existuje $(N)\int_a^b f$.
Potom

$$(L)\int_a^b f = (N)\int_a^b f .$$

(Tedy $f \in \mathcal{L}^*(a,b) \cap N((a,b)) \cap \mathcal{C}((a,b)) \Longrightarrow (L)\int_a^b f = (N)\int_a^b f$.)

Důkaz. Plyne ihned z předešlého.

10.17 Poznámky.

(A) Věty 10.15 a 10.16 nám dávají konkrétní návod pro výpočet Lebesgueových integrálů pomocí primitivní funkce. Nikdy však nezapomeňte ověřit předpoklad, že $(L)\int_a^b f$ existuje (tj. $f \in \mathcal{L}^*(a,b)$), nestačí pouze počítat Newtonův integrál. Typickým příkladem je funkce $\frac{\sin x}{x}$ na $(0, +\infty)$; pro ni

$$(L)\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \text{ neexistuje}, \quad (N)\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

(viz 3.21, 10.I). Viz též 10.18.

(B) Věta 10.16 platí i bez předpokladu spojitosti funkce f , je tedy správná implikace

$$f \in \mathcal{L}^*(a,b) \cap N((a,b)) \Longrightarrow (L)\int_a^b f = (N)\int_a^b f .$$

K tomu viz cvičení 10.D.

10.18 Věta (struktura systému $N(a,b) - \mathcal{L}^*(a,b)$).

Nechť existuje $(N)\int_a^b f$ a neexistuje $(L)\int_a^b f$

(tj. nechť $f \in N((a,b)) - \mathcal{L}^*(a,b)$). Potom

(A) $f \in \Lambda(a,b)$,

(B) f mění na intervalu (a,b) své znaménko,

(C) $(L)\int_a^b |f| = +\infty$,

(D) $(N)\int_a^b |f|$ neexistuje

(tedy $(N)\int_a^b f$ je v tomto případě "neabsolutně konvergentní".)

Důkaz. (A) Funkce f je funkce Baireovy 1.třídy (viz 3.3), tudíž limita posloupnosti spojitých funkcí, tedy měřitelná funkce na (a,b).

(B) Kdyby bylo $f \geq 0$ na (a,b) , bylo by podle 9.42.e $f \in \mathcal{L}^R(a,b)$.

(C) Podle 9.42 je $|f| \in \mathcal{L}^R(a,b)$. Kdyby $|f| \in \mathcal{L}(a,b)$, bylo by podle 9.42.h i $f \in \mathcal{L}(a,b)$.

(D) Nechť $f \in N(a,b)$. Potom podle 10.17.B by bylo $|f| \in \mathcal{L}(a,b)$, neboť $(N)\int_a^b |f| = (L)\int_a^b |f|$.

10.19 Poznámka.

Ve větě 10.18 stačilo předpokládat, že $f \in N((a,b)) - \mathcal{L}(a,b)$, dokažte ! Porovnejte též větu 10.18 s 9.B.

D. LEBESGUEOVA MÍRA A MĚŘITELNÉ MNOŽINY V E_1

10.20 Věta.

Pro každou množinu $A \subset E_1$ platí:

$$\tilde{\mu}_1 A = \inf \left\{ \mu_1 G \; ; \; G \supset A, \; G \text{ otevřená} \right\}.$$

Důkaz. Pro $\tilde{\mu}_1 A = +\infty$ je tvrzení zřejmé. Nechť tedy $\tilde{\mu}_1 A < +\infty$. Je-li $G \supset A$, G otevřená, je $\mu_1 G \geq \tilde{\mu}_1 A$. Buď $\varepsilon > 0$, zvolme ještě $\delta \in (0,1)$ prozatím libovolně. Můžeme nalézt funkci $g \in Z^R$, $g \geq c_A$ tak, aby $Ag < \tilde{A}c_A + \delta = \tilde{\mu}_1 A + \delta$.

Položíme-li

$$G = \left\{ x \in E_1 \; ; \; g(x) > 1 - \delta \right\}$$

je množina G otevřená (podle 10.5 a 10.1) a

$$\mu_1 G \leq \frac{1}{1-\delta} \, Ag < \frac{1}{1-\delta} \, (\tilde{\mu}_1 A + \delta)$$

(podle cvičení 9.I). Tvrzení věty bude dokázáno, podaří-li se nám najít $\delta \in (0,1)$ tak, aby

$$\frac{1}{1-\delta} \, (\tilde{\mu}_1 A + \delta) \leq \tilde{\mu}_1 A + \varepsilon .$$

K tomu ovšem (při zadaném $\varepsilon > 0$!) stačí volit

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon + \tilde{\mu}_1 A} .$$

10.21 Důsledek.

Pro každou množinu $A \subset E_1$ platí:

$$\tilde{\mu}_1 A = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \text{ ; kde } (a_n, b_n) \text{ probíhá všechny disjunktní posloupnosti intervalů pokrývajících množinu } A \text{ , tj. } \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \supset A \right\} .$$

Důkaz. Tvrzení plyne ihned z 10.20 a z poznatku, že každou otevřenou množinu v E_1 lze napsat jako sjednocení spočetně mnoha otevřených intervalů.

10.22 Poznámky.

(A) Porovnejte předchozí výsledek 10.21 s definicí Jordan-Peanova objemu. Zde velmi dobře vynikne rozdíl Lebesgueovy míry a Jordan-Peanova objemu (a tedy i Lebesgueova a Riemannova integrálu). Při definici Jordan-Peanova objemu jsme pokrývali množinu pouze konečným sjednocením intervalů, při tvorbě Lebesgueovy míry pak již spočetným systémem intervalů.

(B) Formuli v 10.21 lze vzít jako výchozí definici při vytváření Lebesgueovy míry v E_1 , nepotřebujeme přitom znát vůbec teorii integrálu (viz též 14.9).

10.23 Věta (charakteristika měřitelných množin v E_1).

Množina $A \subset E_1$ je lebesgueovsky měřitelná, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ můžeme nalézt otevřenou množinu G , $G \supset A$ tak, aby $\tilde{\mu}_1 (G - A) < \varepsilon$.

Důkaz. Nechť je splněna podmínka. Nalezněme otevřené množiny $G_n \supset A$ tak, aby $\tilde{\mu}_1(G_n - A) < \frac{1}{n}$ a položme $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Potom $G \in \mathfrak{M}_1$ (proč?), $G \supset A$ a $\tilde{\mu}_1(G - A) \leq \tilde{\mu}_1 (G_n - A)$ pro každé $n \in N$, tedy $\tilde{\mu}_1(G - A) = 0$. Podle 9.46.a je ale $G - A \in \mathfrak{M}_1$, tudíž i $A \in \mathfrak{M}_1$, neboť $A = G - (G - A)$.

Naopak, buď $A \in \mathfrak{M}_1$, nechť $\varepsilon > 0$. Předpokládejme zprvu, že $\mu_1 A < +\infty$. Podle 10.20 nalezněme otevřenou množinu $G \supset A$ tak, aby $\mu_1 G < \mu_1 A + \varepsilon$. Potom ze vztahu $(G - A) \cup A = G$ plyne, že $\mu_1 G = \mu_1 A + \mu_1(G - A)$, tedy $\mu_1(G - A) = \mu_1 G - \mu_1 A < \varepsilon$.
Je-li nyní $\mu_1 A = +\infty$, aplikujeme právě dokázané tvrzení na množiny $A_n = A \cap \langle -n, n\rangle$. Nalezněme otevřené množiny $G_n \supset A_n$ tak, aby

$\mu_1(G_n - A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Potom množina $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ je otevřená, $G \supset A$

a (ze vztahu $G - A = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n - A_n)$)

$$\mu_1(G - A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(G_n - A_n) < \varepsilon .$$

10.24 Věta.

Buď $A \subset E_1$. Následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) $A \in \mathfrak{M}_1$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists G$, G otevřená, $G \supset A$, $\tilde{\mu}_1(G - A) < \varepsilon$,

(iii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists F$, F uzavřená, $F \subset A$, $\tilde{\mu}_1(A - F) < \varepsilon$,

(iv) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists F, G$, F uzavřená, G otevřená, $F \subset A \subset G$, $\mu_1(G - F) < \varepsilon$,

(v) $\exists G, N$, G typu G_δ, N nulová tak, že $A = G - N$,

(vi) $\exists F, M$, F typu F_σ, M nulová tak, že $A = F \cup M$.

Důkaz. Tvrzení (i)$\Longleftrightarrow$(ii) jsme právě dokázali. V jeho důkazu je také obsažen důkaz implikace (i) $\Longrightarrow$(v) (proveďte podrobně!). Implikaci (v) $\Longrightarrow$(i) jistě sami snadno dokážete, zbývající tvrzení jsou "duální", pokuste se je též sami dokázat !

10.25 Poznámka.

Bez jakékoliv hlubší teorie můžeme pomocí 10.21 definovat vnější Lebesgueovu míru v E_1. Pomocí kterékoliv ekvivalence z 10.24 lze pak definovat systém měřitelných množin v E_1. Jako cvičení použijte pro definici $\mathfrak{M}_1$ kupříkladu (ii) a ukažte, že systém $\mathfrak{M}_1$ tvoří σ-algebru, obsahující všechny otevřené (a tedy i borelovské) množiny a že vnější míra $\tilde{\mu}_1$ je na $\mathfrak{M}_1$ míra.

E. CVIČENÍ A PROBLÉMY

Velmi mnoho cvičení k této kapitole lze nalézt v [$\mathcal{F}$], § 3,4,6. Nebudu je zde, samozřejmě, uvádět.

10.A **Cvičení.** Ukažte, že v E_1 existuje lebesgueovsky neměřitelná množina.

Návod. Viz důkaz 14.17.

10.B **Cvičení.**

(a) Nechť funkce f má v (a,b) vlastní derivaci. Potom je f měřitelná, dokažte! Je předpoklad konečnosti derivace podstatný?

(b) Nechť funkce f má v intervalu (a,b) primitivní funkci. Plyne již z tohoto předpokladu, že f je měřitelná v (a,b) ?

10.C **Cvičení.** Nechť $f = g$ skoro všude v (a,b) a nechť funkce f,g jsou v (a,b) spojité. Potom $f = g$ v (a,b). Ukažte !

10.D* **Cvičení.** Nechť existují integrály $(N)\int_a^b f$, $(L)\int_a^b f$. Dokažte, že se potom rovnají (porovnejte s 10.16)!

Návod. Buď F primitivní funkce k f v (a,b). Zvolte $\varepsilon > 0$. Podle 9.16 a 10.5 nalezněte funkce φ, ψ tak, aby

(i) $\varphi \le f \le \psi$ na (a,b),

(ii) ψ (resp. φ) byla polospojitá zdola (resp. shora) v (a,b),

(iii) $(L)\int_a^b \psi - \varepsilon < (L)\int_a^b f < (L)\int_a^b \varphi + \varepsilon$.

Nechť $\Psi(x) = (L)\int_a^x \psi$, $\Phi(x) = (L)\int_a^x \varphi$ pro $x \in (a,b)$. Lehko zjistíte, že v intervalu (a,b) platí

$$D_+ \Psi \ge \psi \ge f = F' , \quad D^+ \Phi \le \varphi \le f = F'$$

(toto jsou tzv. derivovaná čísla či Diniho derivace – viz kupř. [D.II] anebo [Re-Pr] , referát 9 a praktikum 12), tedy

$$D_+(\Psi - F) \ge 0 , \quad D^+(\Phi - F) \le 0 \quad v \ (a,b).$$

Odtud plyne (viz tutéž literaturu jako výše), že funkce $\Psi - F$ je neklesající a $\Phi - F$ nerostoucí v (a,b) , tj.

$$\Psi(b-) - F(b-) \ge \Psi(a+) - F(a+) , \quad \Phi(b-) - F(b-) \le \Phi(a+) - F(a+) .$$

Konečně tedy

$$(L)\int_a^b \varphi = \Phi(b-) - \Phi(a+) \le F(b-) - F(a+) =$$

$$= (N)\int_a^b f \le \Psi(b-) - \Psi(a+) = (L)\int_a^b \psi ,$$

čili

$$\left|(N)\int_a^b f - (L)\int_a^b f\right| < \varepsilon .$$

10.E Cvičení.

Nechť funkce f je spojitá v intervalu $I \subset E_1$. Potom pro každou borelovskou množinu $B \subset E_1$ je množina $f^{-1}(B)$ měřitelná. Dokažte !

Návod. Je-li B otevřená, je $f^{-1}(B)$ též otevřená a tedy podle 10.7 měřitelná. Označte $\mathcal{L} = \{ B \subset E_1;\ f^{-1}(B)$ je měřitelná $\}$ a ukažte, že $\mathcal{L}$ je σ-algebra (viz též důkaz věty 16.5).

Poznámka. Stačilo předpokládat, že funkce f je pouze měřitelná. Uměli byste i potom tvrzení dokázat?

10.F* Cvičení.

(a) Připomeňte si konstrukci Cantorova diskontinua C v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ (viz třeba $[\mathcal{T}]$, př. 5.7). Jeho základní vlastnosti - C je množina uzavřená, řídká, nespočetná a nulová.

(b) Rovněž tak se podívejte na konstrukci Cantorovy funkce φ ($[\mathcal{T}]$, př.8.71). Základní vlastnosti funkce φ - je definována v $\langle 0,1 \rangle$, je spojitá a neklesající v $\langle 0,1 \rangle$, $\varphi(\langle 0,1 \rangle) = \langle 0,1 \rangle$, $\varphi' = 0$ v $\langle 0,1 \rangle - C$.

(c) Přijměte za pravdivé tvrzení, že každá měřitelná množina v E_1 kladné míry obsahuje neměřitelnou množinu (viz 14.18.E, 14.20).

(d) Ukažte, že funkce $f : x \mapsto \frac{1}{2}(x + \varphi(x))$, $x \in \langle 0,1 \rangle$, je spojitá a rostoucí v $\langle 0,1 \rangle$, $f(\langle 0,1 \rangle) = \langle 0,1 \rangle$.

(e) Označte $F = f^{-1}$. Potom funkce F je spojitá a rostoucí v $\langle 0,1 \rangle$, $F(\langle 0,1 \rangle) = \langle 0,1 \rangle$. Ukažte dále, že množina $F^{-1}(C)$ je měřitelná a má kladnou míru.

Návod. Ukažte, že množina $\varphi(\langle 0,1 \rangle - C) = \{ \varphi(x);\ x \in \langle 0,1 \rangle - C \}$ je spočetná.

(f) Ukažte, že existuje měřitelná množina $M \subset \langle 0,1 \rangle$ taková, že $F^{-1}(M)$ není měřitelná.

Návod. Použijte (c) a (e). Volte $N \subset F^{-1}(C)$ neměřitelnou a položte $M = F(N)$. Zřejmě $M \subset C$, $F^{-1}(M) = N$.

(g) Množina M z (f) je měřitelná, ale není borelovská.

Návod. Je-li funkce F spojitá (stačí předpokládat, že F je pouze měřitelná), $B \subset E_1$ borelovská, není těžké dokázat (viz 10.E), že množina $F^{-1}(B)$ je měřitelná.

(h) Ukažte, že funkce $c_M * F$ není měřitelná.

10.G* Problém. Obdobně, jako jsme definovali R či S-integrál použitím zobecněných limit, pokusme se o to i v případě L-integrálu.

(a) L-dělením intervalu $\langle 0,1 \rangle$ rozumíme každou konečnou soustavu po dvou disjunktních měřitelných množin, jejichž sjednocení je $\langle 0,1 \rangle$.

(b) Pro L-dělení $D = \{ A_i \}_{i=1}^{n}$ intervalu $\langle 0,1 \rangle$ položme

$$|D| = \max (\lambda_1(A_1), \dots, \lambda_1(A_n)).$$

Jsou-li D_1, D_2 dvě L-dělení, definujeme

$$D_1 \preceq D_2 \iff |D_2| \le |D_1| .$$

Ukažte, že tímto uspořádáním je množina všech L-dělení usměrněná.

(c) Uvažujme nyní množinu $\mathcal{M}$ všech dvojic (D, ξ), kde $D = \{A_i\}_{i=1}^{n}$ je L-dělení $\langle 0,1\rangle$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ je vektor s vlastností $\xi_i \in A_i$ $(i \in 1,\dots,n)$. Do $\mathcal{M}$ zaveďme usměrnění předpisem

$$(D_1, \xi_1) \preceq (D_2, \xi_2) \iff |D_2| \le |D_1| .$$

(d) Buď f funkce na $\langle 0,1\rangle$. Pro $(D, \xi) \in \mathcal{M}$ položme

$$\omega(f,D,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \lambda_1(A_i) ,$$

a definujme

$$(PS) \int_0^1 f = \lim \omega(f,D,\xi)$$

(jedná se o zobecněnou limitu vzhledem k uspořádání z (c)).

(e) Studujte vlastnosti "PS-integrálu".

(f) Ukažte, že

"$(PS) \int_0^1 f = \alpha$, právě když

$M = \{ x \in \langle 0,1\rangle \ ; \ f(x) \ne \alpha \}$ je spočetná a $\lim f(x_n) = \alpha$, jestliže $M = \{x_n\}$."

Návod. Předpokládejte $\alpha = 0$. Uvědomte si, že

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \lambda_1 A_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\, \lambda_1 A_i$$

a že $|f(x)| > \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ pouze pro konečně mnoho x .

$\boxed{\text{10.H}}$ Cvičení. Promyslete, jaký je vzájemný vztah mezi množinami v E_1 následujícího typu:

spočetné – nulové – řídké – husté – 1. kategorie.

Zda např. každá spočetná je nulová, každá nulová je spočetná, každá nulová je řídká, každá řídká je nulová atd.

$\boxed{10.I}$ **Cvičení.** Ukažte, že $(L)\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}$ neexistuje !

Návod. Pomocí vztahu $x \in (k\pi, (k+1)\pi) \Longrightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{(k+1)\pi}$

ukažte, že

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^+ \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} = +\infty .$$

Obdobně $\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^- = +\infty$.

$\boxed{10.J}$ **Cvičení.** Označme symbolem N neměřitelnou množinu v E_1 (viz 14.17), nechť funkce f je identicky rovna 5 na E_1. Potom funkce $f + c_N$ není měřitelná a horní a dolní Lebesgueův integrál přes E_1 z této funkce splývají. Dokažte !

$\boxed{10.K}$ **Cvičení.** Buď $A \subset \langle 0,1\rangle$ neměřitelná množina, $B = \langle 0,1\rangle - A$. Potom

$$(R)\overline{\int_0^1}(c_A + c_B) < (R)\overline{\int_0^1} c_A + (R)\overline{\int_0^1} c_B ,$$

dokažte !

11. Lebesgueův integrál v E_n

Obsah: A. Definice a základní vlastnosti.

B. Fubiniova věta.

C. Další věty pro vícerozměrný integrál.

D. Cvičení a problémy.

A. DEFINICE A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

Obdobně jako v předešlé kapitole, kde jsme vybudovali teorii Lebesgueova integrálu v E_1, lze postupovat i v případě vícerozměrného eukleidovského prostoru E_n. Vyjdeme přitom z vícerozměrného Riemannova integrálu, sestrojeného v kapitole 7. Doporučoval bych čtenáři, aby nestudoval tuto kapitolu bez znalostí právě uvedené kapitoly 7.

11.1 Základní prostor.

Označme symbolem C_n systém všech spojitých funkcí v E_n s kompaktním nosičem (viz též 8.2). Tedy $f \in C_n$, právě když f je spojitá v E_n a existuje kompaktní interval $I_f \subset E_n$ tak, že $f = 0$ v $E_n - I_f$. Pro každou funkci $f \in C_n$ definujeme její Riemannův integrál přes E_n takto: víme, že existuje kompaktní interval I_f s vlastností $f(E_n - I_f) = \{0\}$, položme tedy

$$(R)\int_{E_n} f \overset{\text{def.}}{=\!=} (R)\int_{I_f} f .$$

Není obtížné dokázat, že definice $(R)\int_{E_n} f$ nezávisí na volbě intervalu I_f (vně kterého je $f = 0$), a že tento integrál (pro $f \in C_n$!) vždy existuje. Je tudíž vše v pořádku.

Opět jako v 8.3 a 8.6 zjistíme (provádějte), že dvojice $(C_n, (R)\int_{E_n})$ tvoří základní prostor. Můžeme nyní na tento speciální případ aplikovat teorii Daniellova rozšíření; obdržíme systém $\mathcal{L}_n$ všech lebesgueovsky integrovatelných funkcí v E_n, systémy Λ_n a $\mathcal{M}_n$ všech lebesgueovsky měřitelných funkcí a množin, získáme Lebesgueův integrál $(L)\int_M$ a Lebesgueovu míru μ_n. Kromě vět, které platí zcela obecně pro celou teorii Daniellova integrálu, budou platit (obdobně jako v případě

27571 Z12

E_1) ještě další věty, vyplývající ze specifické volby našeho základního systému. Shrňme je do jednoho odstavce.

11.2 Věty.

(A) Každá otevřená a uzavřená množina v E_n je měřitelná (tj. $\mathcal{O}_n \subset \mathfrak{M}_n$).

(B) Každá spojitá funkce v E_n je měřitelná.

(C) Jednobodové množiny v E_n jsou nulové.

(D) Existuje-li Riemannův integrál $(R)\int_I f$ (I je kompaktní interval), je $f \in \mathcal{L}_I$ a $(L)\int_I f = (R)\int_I f$.

(E) Pro každou množinu $A \subset E_n$ platí

$$\tilde{\mu}_n A = \inf \left\{ \mu_n G \; ; \; G \supset A \, , \; G \text{ otevřená} \right\} ,$$

tedy i

$$\tilde{\mu}_n A = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol} I_k \; ; \; \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset A \, , \; I_k \text{ otevřené intervaly} \right\} .$$

(F) Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(I) $A \in \mathfrak{M}_n$,

(II) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists G$, G otevřená, $G \supset A$, $\tilde{\mu}_n(G-A) < \varepsilon$,

(III) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists F$, F uzavřená, $F \subset A$, $\tilde{\mu}_n(A-F) < \varepsilon$,

(IV) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists F, G$, F uzavřená, G otevřená, $F \subset A \subset G$, $\mu_n(G - F) < \varepsilon$,

(V) $A = G - N$, kde G je typu G_δ a N nulová,

(VI) $A = F \cup M$, kde F je typu F_σ a M nulová .

Důkaz. Proveďte sami všechny důkazy. Použijte analogické důkazy obdobných vět z kapitoly 10. Přečtěte si též vždy příslušné poznámky.

- - - - - - -

Povšimněte si, že mezi uvedenými větami chybějí tvrzení, která by připomínala vztah Newtonova a Lebesgueova jednorozměrného integrálu, a která by tudíž tvořila základ výpočtu vícerozměrných integrálů. Ostatně přečtěte si poznámku před odstavcem 7.4. Proto v dalším vyslovíme tzv. Fubiniovu větu, podle které lze vícerozměrné Lebesgueovy integrály převádět na integrály jednorozměrné.

B. FUBINIOVA VĚTA

11.3 Lemma. Nechť funkce f je definována v E_{r+s}. Pro $x \in E_r$ položme

$$F(x) = \widetilde{\int_{E_s}} f(x,y)\, dy \quad \left(= \widetilde{\int_{E_s}} f(x\,,\cdot\,)\right),$$ viz označení v 7.4). Potom platí nerovnost

$$\widetilde{\int_{E_{r+s}}} f \geq \widetilde{\int_{E_r}} F .$$

(Horní integrály chápeme - pochopitelně - jako Lebesgueovy.)

Důkaz.

(a) Tvrzení platí pro $f \in C_{r+s}$, jak lehce zjistíme podle věty 7.5.

(b) Je-li $f \in C^R_{r+s}$, potom existují $f_n \in C_{r+s}$, $f_n \nearrow f$, a tudíž

$$\int_{E_{r+s}} f_n \nearrow \int_{E_{r+s}} f .$$ Na druhé straně však pro funkce

F_n, $F_n(x) = \displaystyle\int_{E_s} f_n(x,\cdot\,)$ $(x \in E_r)$ platí $F_n \nearrow F$ (zdůvodněte!), tedy

i $\displaystyle\int_{E_r} F_n \nearrow \int_{E_r} F$ (neboť $F_n \in C_r$ - je to zřejmé?). Protože však

$$\int_{E_r} F_n = \int_{E_{r+s}} f_n$$ (jak plyne z (a)), a i

$$\int_{E_r} F = \int_{E_{r+s}} f .$$

(c) Je-li konečně f libovolná a $g \in C^R_{r+s}$, $g \geq f$,

$G(x) = \displaystyle\int_{E_s} g(x,y)\, dy$ $(x \in E_r)$, jest $G \geq F$ v E_r (proč?) a tedy

$$\int_{E_{r+s}} g = \int_{E_r} G \geq \widetilde{\int_{E_r}} F .$$

Odtud plyne, že

$$\widetilde{\int_{E_{r+s}}} f = \inf \left\{ \int_{E_{r+s}} g;\ g \geq f\ ,\ g \in C^R_{r+s} \right\} \geq \widetilde{\int_{E_r}} F$$

11.4 **Lemma** (**Fubiniova věta pro** E_{r+s})

Buď $f \in \mathscr{L}^*_{r+s}$. Potom pro skoro všechna $x \in E_r$ existuje integrál

$\int_{E_s} f(x,y)\,dy$; označíme-li jej pro tato x symbolem $F(x)$, jest $F \in \mathscr{L}^*_r$ a platí

$$\int_{E_{r+s}} f = \int_{E_r} F$$

jinak přepsáno

$$\int_{E_{r+s}} f = \int_{E_r} \left(\int_{E_s} f(x,y)\,dy \right) dx$$

(význam symbolů $\mathscr{L}^*_{r+s}$, $\mathscr{L}^*_r$ je, doufám, jasný).

Důkaz. Označme pro $x \in E_r$

$$\widetilde{F}(x) = \widetilde{\int_{E_s}} f(x, \cdot\,) \;,\; \underset{\sim}{F}(x) = \underset{\sim}{\int_{E_s}} f(x, \cdot) \,.$$

Potóm (nezapomeňte, že $\widetilde{F} \geq \underset{\sim}{F}$) s pomocí 11.3 platí nerovnosti

$$\int_{E_{r+s}} f \;\geq\; \widetilde{\int_{E_r}} \widetilde{F} \;\geq \left\langle \begin{array}{c} \geq \displaystyle\int_{E_r} \underset{\sim}{F} \geq \\[2ex] \geq \displaystyle\underset{\sim}{\int_{E_r}} \widetilde{F} \geq \end{array} \right\rangle \geq\; \underset{\sim}{\int_{E_r}} \underset{\sim}{F} \;\geq\; \int_{E_{r+s}} f \,.$$

Nechť zprvu $f \in \mathscr{L}_{r+s}$. Potom všude nastanou rovnosti (vše je konečné!), odkud vyjde, že $\widetilde{F}$, $\underset{\sim}{F} \in \mathscr{L}_r$. Funkce $\widetilde{F}$, $\underset{\sim}{F}$ jsou tudíž konečné skoro všude v E_r a

$$\int_{E_r} (\widetilde{F} - \underset{\sim}{F}) = \int_{E_r} \widetilde{F} - \int_{E_r} \underset{\sim}{F} = 0 \,.$$

Konečně dostáváme (viz 9.35!), že $\widetilde{F} = \underset{\sim}{F}$ skoro všude v E_r , čímž je tvrzení (pro případ $f \in \mathscr{L}_{r+s}$) dokázáno.

Je-li nyní $f \in \mathscr{L}^R_{r+s}$, nalezněte posloupnost funkcí $f_n \in \mathscr{L}_{r+s}$, $f_n \nearrow f$, a aplikujte na ni právě dokázané. S pomocí Leviho věty obdržíte tvrzení (uvědomte si též, že sjednocení spočetně mnoha nulových množin je nulová množina).

$\boxed{11.5}$ Cvičení. Pro množinu $M \subset E_{r+s}$ a $x \in E_r$ položme

$$M^{x,*} = \left\{ y \in E_s;\ \left[x,y \right] \in M \right\}$$

(nakreslete si obrázek! $M^{x,*}$ znamená vlastně "řez" množiny M).

Je-li funkce f definovaná v M, nechť $f^{x,*} = f(x, \cdot)$ značí funkci, která je definovaná na množině $M^{x,*}$ předpisem

$$f^{x,*}(y) = f(x,y) .$$

Představte si názorně a obdobně definujte $M^{*,y}$ a $f^{*,y}$ $(=f(\cdot,y))$.

11.6 Fubiniova věta pro Lebesgueův integrál.

Buď $M \in \mathfrak{M}_{r+s}$, nechť $f \in \mathscr{L}^*_M$. Označme symbolem M' průmět množiny M do prostoru E_r, tj. $M' = \left\{ x \in E_r;\ \text{existuje } y \in E_s \text{ tak, že } [x,y] \in M \right\}$. Potom integrál $\int_{M^{x,*}} f(x,y)\, dy$ (označme jej $F(x)$) existuje pro skoro všechna $x \in M'$, $F \in \mathscr{L}^*_{M'}$ a platí

$$\int_M f = \int_{M'} F ,$$

(porovnejte s 11.4 a opět přepište!, též zaměňte pořadí x a y !).

Důkaz. Definujte funkci $\hat{f}$ předpisem

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{pro } [x,y] \in M , \\ 0 & \text{jinde v } E_{r+s} \end{cases}$$

a aplikujte na ní lemma 11.4.

11.7 Poznámka. Doporučoval byl čtenáři, aby si přečetl odstavce 5.13 a 5.14 z $[\mathscr{T}]$ (které zde nechci opisovat) a aby si pro lepší pochopení spočítal některé z dalších příkladů v $[\mathscr{T}]$. Připomeňme pouze, že Fubiniovu větu lze použít, jsou-li splněny kupř. některé z následujících předpokladů:

(I) množina M je otevřená či uzavřená v E_{r+s} a f je spojitá funkce, neměnící na M své znaménko,

(II) množina M je otevřená či uzavřená a omezená v E_{r+s} a funkce f je spojitá a omezená na M .

Pomocí Fubiniovy věty lze též počítat míry měřitelných množin.

C. DALŠÍ VĚTY PRO VÍCEROZMĚRNÝ INTEGRÁL

11.8 Věta (míra "grafu" funkce).

Buď f spojitá v E_r. Označíme-li graf $f = \left\{ [x,y] \in E_{r+1};\ y = f(x) \right\}$, je graf $f \in \mathfrak{M}_{r+1}$ a μ_{r+1} (graf f) $= 0$. Tedy, graf spojité funkce je nulová množina.

Důkaz. Funkce $\phi(x,y) = y - f(x)$ je spojitá funkce v E_{r+1} (odůvodněte!) a graf $f = \phi^{-1}\left(\{0\}\right)$ je uzavřená množina jakožto "vzor nuly". Tudíž graf $f \in \mathcal{M}_{r+1}$ a $\mu_{r+1}(\text{graf } f) = \int_{E_r} 0 = 0$ podle Fubiniovy věty.

Poznámka. Stačilo by předpokládat, že funkce f je měřitelná na měřitelné množině $M \subset E_r$. Potom opět graf f je nulová množina (v E_{r+1} !!). Jediný obtížnější krok v důkazu by byl ověřit, že graf $f \in \mathcal{M}_{r+1}$. Potom bychom opět použili Fubiniovu větu. K tomu viz [J II], věta 75 či [$\mathcal{F}$], odstavec 5.103.

11.9 Věta (geometrický význam integrálu).

Buď f spojitá a nezáporná funkce definovaná v otevřené množině $G \subset E_r$. Označíme-li

$$M_f = \left\{ [x,y] \in G \times E_1 \; ; \; 0 < y < f(x) \right\}, \text{ je } M_f \in \mathcal{M}_{r+1} \text{ a}$$

$$\mu_{r+1}(M_f) = \int_G f .$$

Důkaz. Množina M_f je otevřená v E_{r+1}, jak lehko zjistíme; tedy měřitelná. Pro $x \in G$ je $M_f^{x,*} = (0, f(x))$, použitím Fubiniovy věty okamžitě vychází, že

$$\mu_{r+1}(M_f) = \int_G f.$$

11.10 Poznámka. Opět stačilo předpokládat, že funkce f je měřitelná a nezáporná v měřitelné množině G.

- - - - - - - - -

Nakonec tohoto odstavce uvedeme ještě větu o substituci. Zopakujte si proto větu 3.12, abyste mohli srovnat případ jednorozměrného a vícerozměrného integrálu a též porovnat rozdíl Lebesgueova a Newtonova integrálu. Nejdříve však ještě uveďme některé známé věty z přednášky.

11.11 Opakování.

(A) Nechť $f : M \subset E_r \to E_r$ je zobrazení z E_r do E_r. Pišme

$f = [f_1, \dots, f_r]$, kde $f(x) = [f_1(x_1, \dots, x_r), \dots, f_r(x_1, \dots, x_r)]$

pro každé $x \in M$, $x = [x_1, \dots, x_r]$.

(B) Řekneme, že zobrazení f je regulární v M, jestliže

(i) množina M je otevřená v E_r,

(ii) funkce $f_1, \dots, f_r$ mají spojité parciální derivace v M,

(iii) Jacobiův determinant

$$J_f(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x), \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_r}(x) \\ \\ \frac{\partial f_r(x)}{\partial x_1}, \dots, & \frac{\partial f_r}{\partial x_r}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

pro všechna $x \in M$.

(C) Buď f regulární v množině $M \subset E_r$. Potom
(i) f je lokálně prosté, tj. ke každému $x \in M$ existuje okolí $U(x)$ bodu x tak, že f je na $U(x)$ prosté,
(ii) je-li $A \subset M$ otevřená, je množina $f(A)$ otevřená.

(D) Je-li f regulární a prosté v množině $M \subset E_r$ (takovým zobrazením též říkáme difeomorfní), potom
(i) je zobrazení f^{-1} regulární (a prosté) v množině $f(M)$,
(ii) $J_f(x) \cdot J_{f^{-1}}(y) = 1$ pro každé $x \in M$, $y = f(x)$,
(iii) zobrazení f je homeomorfní.

11.12 Věta o substituci pro Lebesgueův integrál.

Buď φ regulární a prosté zobrazení v množině $M \subset E_r$, nechť $Q = \varphi(M)$.
Potom

$$\int_Q f = \int_M f * \varphi \cdot \left| J_\varphi \right| ,$$

existuje-li integrál na kterékoliv straně této rovnosti.
(Formálně stačí položit $x = \varphi(t)$, $dx = \left| J_\varphi \ (t) \right| dt$ a

$$\int_Q f(x)\, dx = \int_M f(\varphi(t)) \cdot \left| J_\varphi \ (t) \right| dt .$$

Důkaz. Nebudeme zde provádět, lze jej nalézt kupř. v [Č-M] , 6.1 - 6.3.

11.13 Poznámka. Bylo by dobré, kdybyste si nyní spočítali některé konkrétní příklady, třeba podle kap. 5 v [$\mathcal{J}$] .

D. CVIČENÍ A PROBLÉMY

$\boxed{11.A}$ Cvičení k této kapitole naleznete v odstavci 5 z $[\mathcal{T}]$. Podívejte se na ně!

$\boxed{11.B}$ Luzinova věta (charakteristika měřitelných funkcí).

(a) Dokažte Jegorovovu větu v 17.D, kde za X zvolíte měřitelnou množinu $M \subset E_n$, za $\mathcal{S}$ systém všech jejích měřitelných podmnožin a za μ Lebesgueovu míru v E_n .

(b) Luzinova věta. Buď $M \in \mathcal{M}_n$. Nechť f je měřitelná, sk.všude konečná funkce na M . Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $N \subset M$, $N \in \mathcal{M}_n$ tak, že $\mu_n N < \varepsilon$ a funkce f je spojitá na $M-N$ (vzhledem k $M-N$!).

Návod důkazu.

Nechť zprvu $\mu_n M < +\infty$. Nalezněte $f_k \in C_n$ tak, aby $f_k \to 0$ na $E_n - M$, $f_k \to f$ sk.všude v M (viz cvičení 9.D). Nyní stačí aplikovat Jegorovovu větu. Není-li $\mu_n M < +\infty$, vyjádřete množinu M jako sjednocení množin konečné míry. Detaily naleznete v $[\mathcal{T}]$, dodatek D.II.5. Tam je též (dodatek D.II.7) naznačen důkaz Luzinovy věty bez užití Jegorovovy věty.

12. Lebesgue - Stieltjesův integrál

Obsah: A. Definice a základní vlastnosti.

B. Cvičení a problémy.

A. DEFINICE A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

Zopakujte si definici a základní vlastnosti Riemann-Stieltjesova integrálu z kapitoly 6., odst. A.

12.1 Základní prostor. Buď φ neklesající funkce v E_1. Pro každou funkci $f \in C_1$ (= systém všech spojitých funkcí v E_1 s kompaktním nosičem, viz 8.2) můžeme nalézt interval $\langle a_f, b_f \rangle$, vně kterého je $f = 0$, a můžeme položit

$$(RS) \int_{E_1} f \, d\varphi \overset{\text{def.}}{=\!=} (RS) \int_{a_f}^{b_f} f \, d\varphi .$$

Sami lehko zjistíte, že definice integrálu $(RS) \int_{E_1} f \, d\varphi$ nezávisí na volbě intervalu $\langle a_f, b_f \rangle$ (vně kterého je $f = 0$), že integrál vpravo vždy existuje (viz 6.4) a že dvojice $(C_1, (RS)\int_{E_1})$ tvoří základní prostor (pro ověření (7_A) viz kupř. cvičení 8.A). Můžeme tudíž aplikovat Daniellovu metodu rozšíření, obdržíme systémy $\mathcal{L}_\varphi$, $\mathcal{L}^*_\varphi$, Λ_φ, $\mathcal{M}_\varphi$ (mluvme též krátce o φ-měřitelných funkcích či množinách), Lebesgue-Stieltjesův integrál $(LS) \int_M f \, d\varphi$ a Lebesgue-Stieltjesovu míru μ_φ.

A opět jako v kapitole 10, kromě obecných vět platných pro každé Daniellovo rozšíření, bude platit řada speciálních vět pro tento případ. Uveďme některé z nich, některé ponechme do cvičení.

12.2 Věty (předpokládáme, že φ je neklesající funkce v E_1)

(A) Otevřené a uzavřené množiny jsou φ-měřitelné. Tedy i všechny borelovské množiny jsou φ-měřitelné.

(B) Každá spojitá funkce v E_1 je φ-měřitelná.

(C) Je-li $I \subset E_1$ interval o koncových bodech $a < b$, potom

$$\mu_\varphi I = \begin{cases} \varphi(b+) - \varphi(a-) & \text{pro } I = \langle a,b \rangle , \\ \varphi(b+) - \varphi(a+) & \text{pro } I = (a,b \rangle , \\ \varphi(b-) - \varphi(a-) & \text{pro } I = \langle a,b) , \\ \varphi(b-) - \varphi(a+) & \text{pro } I = (a,b) . \end{cases}$$

(D) Je-li $x \in E_1$, potom

$$\mu_\varphi\{x\} = \varphi(x+) - \varphi(x-),$$

speciálně

"množina $\{x\}$ je φ-nulová, právě když funkce φ je spojitá v bodě x".

(E) Je-li f spojitá v $\langle a,b\rangle$ a je-li $\varphi(a) = \varphi(a-)$, $\varphi(b) = \varphi(b+)$, potom

$$(LS) \int_{\langle a,b\rangle} f \, d\varphi = (RS) \int_a^b f \, d\varphi .$$

(Viz též cvičení!)

<u>Důkaz.</u> Důkazy těchto tvrzení jsou analogické příslušným důkazům z kapitoly 10. Naznačíme je proto jen velmi stručně.

(A) Lehko zjistíme, že každý otevřený interval je φ-měřitelná množina (není totiž obtížné sestrojit posloupnost funkcí z C_1, která konverguje k charakteristické funkci tohoto intervalu). Odtud již plyne tvrzení.

(B) Proveďte podle 10.9.

(C) Buď $I = \langle a,b\rangle$. Pro $n \in N$ nechť F_n znamená spojitou funkci v E_1, která se anuluje mimo $\langle a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\rangle$, je rovna 1 na $\langle a,b\rangle$ a je lineární v $\langle a - \frac{1}{n}, a\rangle$, $\langle b, b + \frac{1}{n}\rangle$. Zřejmě $F_n \in C_1$, $F_n \searrow c_{\langle a,b\rangle}$. Tudíž

$$\mu_\varphi\langle a,b\rangle = \lim (RS) \int_{E_1} F_n \, d\varphi = \lim (RS) \int_{a-\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} F_n \, d\varphi .$$

Odtud plyne tvrzení. Obdobně postupujte i v ostatních případech.

(D) Proveďte sami.

(E) Opět definujte posloupnost funkcí f_n tak, aby

$$f_n = f \text{ na } \langle a,b\rangle, \quad f_n = 0 \text{ na } E_1 - \langle a - \tfrac{1}{n}, b + \tfrac{1}{n}\rangle,$$

$$f_n \text{ lineární v } \langle a - \tfrac{1}{n}, a\rangle, \quad \langle b, b + \tfrac{1}{n}\rangle .$$

12.3 **Poznámka.** Povšimněte si, že jednobodové množiny nemusejí být φ-nulové, mohou mít tedy obecně LS-integrály

$$\int_{(a,b)} f \, d\varphi, \quad \int_{\langle a,b)} f \, d\varphi, \quad \int_{(a,b\rangle} f \, d\varphi, \quad \int_{\langle a,b\rangle} f \, d\varphi$$

různou hodnotu a není zřejmé, jak nyní definovat $(LS) \int_a^b f \, d\varphi$ (jedině v případě <u>spojité</u> funkce můžeme použít analogické definice jako v 10.12). Mnozí autoři definují (z různých důvodů)

$$(LS)\int_a^b f\,d\varphi \overset{\text{def.}}{=} (LS)\int_{(a,b)} f\,d\varphi + f(a)(\varphi(a+) - \varphi(a)) +$$

$$+ f(b)(\varphi(b) - \varphi(b-)) ,$$

my však tuto definici nebudeme potřebovat.

B. CVIČENÍ A PROBLÉMY

12.A Cvičení. Nechť $\varphi(x) = 0$ pro $x \leq 0$, $\varphi = 1$ na $(0,1)$, $\varphi = 2$ na $\langle 1,+\infty)$. Vyšetřete, jak vypadají systémy $\mathcal{L}_\varphi$, Λ_φ, $\mathcal{M}_\varphi$ a spočtěte následující LS-integrály:

$$\int_{(0,1)} f\,d\varphi , \quad \int_{\langle 0,1)} f\,d\varphi , \quad \int_{(0,1\rangle} f\,d\varphi , \quad \int_{\langle 0,1\rangle} f\,d\varphi ,$$

$$\int_{\langle 1,2\rangle} f\,d\varphi , \quad \int_{\langle 0,2\rangle} f\,d\varphi .$$

12.B Vlastnosti LS-míry. Nechť opět φ je neklesající funkce v E_1.

(A) Ukažte, že

$$\tilde{\mu}_\varphi(A) = \inf \left\{ \mu_\varphi G ;\ G \supset A ,\ G \text{ otevřená} \right\}$$

pro každou množinu $A \subset E_1$.

Návod. Kopírujte důkaz 10.20.

(B) Ukažte, že pro každou množinu $A \subset E_1$ platí

$$\tilde{\mu}_\varphi(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(b_n-) - \varphi(a_n+)) ;\ \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n,b_n) \supset A \right\} .$$

Tímto způsobem lze právě definovat vnější φ-míru libovolné množiny, aniž k tomu potřebujeme znát teorii integrálu.

(C) Pokuste se vyslovit a dokázat věty analogické větám 10.23 a 10.24.

12.C Problém. V odstavci 10.13 jsme ukázali, že $R(\langle a,b\rangle) \subset \mathcal{L}(\langle a,b\rangle)$ a že Lebesgueův a Riemannův integrál na $R(\langle a,b\rangle)$ splývají. Ve 12.2.E jsme dokázali podobnou větu i pro LS-integrál, ale pouze pro spojité funkce. Bylo by zajímavé vyšetřovat, zda lze vyslovit i větu obecnější (pokuste se přenést důkaz věty 10.13, nezapomeňte však přitom kupř. na poznámku 6.10!).

12.D Cvičení. Buďte φ_1, φ_2 neklesající funkce v E_1, nechť $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Dokažte, že

(A) $\mathcal{L}_\varphi = \mathcal{L}_{\varphi_1} \cap \mathcal{L}_{\varphi_2}$,

(B) $\mathcal{L}^*_\varphi \subset \mathcal{L}^*_{\varphi_1} \cap \mathcal{L}^*_{\varphi_2}$ a

$$(LS)\int_{E_1} f\, d\varphi = (LS)\int_{E_1} f\, d\varphi_1 + (LS)\int_{E_1} f\, d\varphi_2$$

pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^*_\varphi$,

(C) je-li $f \in \mathcal{L}^*_{\varphi_1} \cap \mathcal{L}^*_{\varphi_2}$ a má-li smysl součet

$$\int_{E_1} f\, d\varphi_1 + \int_{E_1} f\, d\varphi_2 ,$$

je $f \in \mathcal{L}^*_\varphi$,

(D) $\Lambda_\varphi = \Lambda_{\varphi_1} \cap \Lambda_{\varphi_2}$, $\mathfrak{M}_\varphi = \mathfrak{M}_{\varphi_1} \cap \mathfrak{M}_{\varphi_2}$.

Návod. Nejdříve ukažte, že pro $f \in \mathcal{Z}$ a $f \in \mathcal{Z}^*$ platí

$$\int f\, d\varphi = \int f\, d\varphi_1 + \int f\, d\varphi_2 .$$

Dále dokažte, že

$$\widetilde{\int} f\, d\varphi = \widetilde{\int} f\, d\varphi_1 + \widetilde{\int} f\, d\varphi_2 .$$

$\boxed{12.E}$ **Neměřitelné množiny.**

Každá neklesající funkce φ v E_1 určuje jistou třídu $\mathfrak{M}_\varphi$ všech φ-měřitelných množin. V případě $\varphi(x) = x$ lze dokázat (viz 14.17), že $\mathfrak{M}_\varphi \neq \exp E_1$, tj. existuje lebesgueovsky neměřitelná množina. Zajímá nás, jak je tomu nyní obecně.

(A) Je-li φ funkce konstantní, je zřejmě $\mathfrak{M}_\varphi = \exp E_1$.

(B) Vezměte za φ omezenou, neklesající funkci skoků (viz [D II]),

$$\varphi(x) = \sum_{y<x} (\varphi(y+) - \varphi(y-)),$$

kde $\varphi(y+) - \varphi(y-) \geq 0$ a pouze s výjimkou spočetné množiny $\{x_n\}$ je $\varphi(y+) - \varphi(y-) = 0$. Předpokládejte, že $\sum_x (\varphi(x+) - \varphi(x-)) < +\infty$.

Potom každá podmnožina A v E_1 je φ-měřitelná a

$$\mu_\varphi(A) = \sum_{\{n;\, x_n \in A\}} (\varphi(x_n+) - \varphi(x_n-)) .$$

Dokažte!

(C) Pokuste se dokázat, že pro spojitou a rostoucí funkci φ existují v E_1 φ-neměřitelné množiny.

(D) Lze dokonce dokázat, že existuje množina v E_1 , která je φ-neměřitelná pro každou spojitou, neklesající a nekonstantní funkci φ .

V. TEORIE MÍRY

13. Abstraktní teorie míry

Obsah:

Již na střední škole se setkáváme – většinou v geometrii – s počítáním délek jistých množin na přímce, s počítáním ploch rovinných obrazců či s počítáním objemů geometrických těles v E_3. Kupříkladu intervalu $(a,b) \subset E_1$ přiřazujeme jeho délku $b - a$, obsahem obdélníka v rovině nazýváme součin délek jeho stran, pro objem koule v E_3 o poloměru r je znám vzoreček $\frac{4}{3}\pi r^3$. Nebudeme prozatím zkoumat, jak jsme k těmto číslům došli, konstatujeme pouze fakt, že určitým podmnožinám E_1, E_2 či E_3 umíme přiřadit reálné číslo, nazývané délkou, plochou či objemem této množiny. V této kapitole se budeme snažit systematicky studovat taková přiřazení – v dané množině X vybereme jistou třídu $\mathcal{M}$ jejích podmnožin – můžeme jim říkat <u>měřitelné</u> množiny – a každé množině ze systému $\mathcal{M}$ přiřadíme jisté reálné nezáporné číslo, nazývané pak <u>mírou</u> této množiny. Budeme se přitom vždy snažit, aby jak systém měřitelných množin, tak i míra, měly "rozumné" vlastnosti; kupříkladu chceme, aby míra množiny A byla větší nebo rovna míře množiny B, je-li $A \supset B$ $(A,B \in \mathcal{M})$. Dále se budeme vždy snažit, aby systém všech měřitelných množin byl co nejširší, aby co nejvíce množin "mělo míru". Kupříkladu není vůbec jasné, co bude mírou množiny všech racionálních čísel v intervalu $(2,7)$ či jaká bude míra množiny všech iracionálních čísel v intervalu $(0,1)$. Rovněž není zřejmé, jak počítat míru složitějších rovinných množin.

V dalších odstavcích vybudujeme zcela abstraktní teorii míry – určíme jistý systém $\mathcal{M}$ podmnožin množiny X a každé množině $A \in \mathcal{M}$ přiřadíme nezáporné číslo (či $+\infty$) μA, nazývané mírou množiny A. Za dvě podstatné vlastnosti míry μ a systému $\mathcal{M}$ můžeme považovat následující:

(A) : $A, B \in \mathcal{M}$, $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{M}$ a

$$\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B$$

(tzv. konečná aditivita míry μ),

(B) : $A_n \in \mathfrak{M}$ je posloupnost po dvou disjunktních množin

$$\Longrightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M} \quad \text{a}$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$$

(tzv. σ-aditivita míry).

S vlastností (A) jsme se setkali například u Jordan-Peanova objemu (viz kap.2), s vlastností (B) pak u Lebesgueovy míry budované na základě teorie integrálu v kapitole 9.

Připojme na tomto místě ještě poznámky:

V kapitole IV o Daniellově integrálu jsme vybudovali též abstraktní teorii míry, vyšli jsme ovšem z původního pojmu integrálu. Čtenář, který prostudoval kapitolu IV, se bude zajisté i v této kapitole lépe orientovat, řada poznámek, příkladů či tvrzení z této kapitoly bude navazovat na kapitolu IV. Abych nepletl čtenáře, který nestudoval kapitolu IV (a také to není nutné pro studium abstraktní míry), budu označovat všechna tvrzení, poznámky a příklady vázané na kapitolu IV vlnovkou $\{$ po straně textu.

A. MNOŽINOVÉ SYSTÉMY

13.1 Definice.

Buď $\mathcal{S}$ neprázdný systém podmnožin množiny X. Potom $\mathcal{S}$ se nazývá

1. okruh, jestliže: $A, B \in \mathcal{S} \Longrightarrow A \cup B\,,\ A - B \in \mathcal{S}$
   (potom zřejmě i $\emptyset \in \mathcal{S}$, $A \cap B \in \mathcal{S}$),
2. algebra, jestliže: $\mathcal{S}$ je okruh a $X \in \mathcal{S}$,
3. σ-okruh, jestliže: $A, B \in \mathcal{S} \Longrightarrow A - B \in \mathcal{S}$,

$$A_n \in \mathcal{S} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$$

   (potom opět vždy $\emptyset \in \mathcal{S}$ a $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$, kdykoliv $A_n \in \mathcal{S}$),
4. σ-algebra, jestliže: $\mathcal{S}$ je σ-okruh a $X \in \mathcal{S}$.

13.2 Příklady.

(a) Je-li $X = E_n$, $\mathcal{S} \equiv$ systém všech omezených množin v E_n, potom $\mathcal{S}$ je okruh, není algebra ani σ-okruh (dokazujte!).
Jak tomu bude v obecném metrickém prostoru ?

(b) Je-li $X = E_n$, $\mathcal{S} \equiv$ systém všech otevřených podmnožin E_n, netvoří $\mathcal{S}$ ani okruh.

(c) Je-li $X = E_1$, $\mathcal{S} \equiv$ systém všech spočetných podmnožin E_1, potom $\mathcal{S}$ je σ-okruh a $\mathcal{S}$ není algebra.

(d) Je-li X libovolná množina a $\mathcal{S} \equiv \exp X$ systém všech jejích podmnožin, je $\mathcal{S}$ σ-algebra.

(e) Položíme-li $X = P$ a zvolíme-li za systém $\mathcal{S}$ systém všech měřitelných množin $\mathfrak{M}$ na P získaných z teorie integrálu (viz definice 9.44), tvoří $\mathcal{S}$ σ-okruh, ale nemusí být $\mathcal{S}$ σ-algebra (viz třeba 9.45.a).

$\boxed{13.3}$ **Věta.**

Průnik libovolného systému okruhů (algeber, σ-okruhů, σ-algeber) podmnožin množiny X je opět okruh (algebra, σ-okruh, σ-algebra).

Důkaz. Nechť $\{\mathcal{S}_\alpha\}$ je systém okruhů podmnožin množiny X, nechť $\mathcal{S} = \bigcap_\alpha \mathcal{S}_\alpha$.
Chceme ukázat, že i $\mathcal{S}$ je okruh.
Zvolme $A, B \in \mathcal{S}$. Potom $A, B \in \mathcal{S}_\alpha$ pro každé α, tudíž (každý systém $\mathcal{S}_\alpha$ je okruh !) $A - B \in \mathcal{S}_\alpha$, $A \cup B \in \mathcal{S}_\alpha$ pro každé α, tedy i

$A - B \in \mathcal{S} = \bigcap \mathcal{S}_\alpha$, $A \cup B \in \mathcal{S}$.

Obdobně se dokáže, že průnik algeber (σ-okruhů, σ-algeber) je algebra (σ-okruh, σ-algebra).

$\boxed{13.4}$ **Věta.**

Buď $\mathcal{U}$ libovolný systém podmnožin množiny X. Potom existuje právě jeden okruh $\mathcal{S}$ (algebra, σ-okruh, σ-algebra) tak, že platí:

1) $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$

2) $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}^*$, $\mathcal{S}^*$ okruh (algebra, σ-okruh, σ-algebra) $\Longrightarrow \mathcal{S} \subset \mathcal{S}^*$.

Důkaz. Vezměme všechny okruhy $\mathcal{S}_\alpha$, které obsahují systém $\mathcal{U}$ (alespoň jeden takový okruh existuje, totiž $\exp X$ = systém všech podmnožin X) a položme

$\mathcal{S} = \bigcap_\alpha \mathcal{S}_\alpha$. Lehko se ukáže, že $\mathcal{S}$ má požadované vlastnosti. (Obdobně pro algebry, σ-okruhy, či σ-algebry).

$\boxed{13.5}$ **Definice.**

Buď $\mathcal{U}$ opět libovolný systém podmnožin množiny X. Podle předchozí věty existuje nejmenší okruh $\mathcal{S}$ (algebra, σ-okruh, σ-algebra) obsahující systém $\mathcal{U}$. Okruh $\mathcal{S}$ (algebru, σ-okruh, σ-algebru) nazvěme <u>okruhem generovaným systémem $\mathcal{U}$</u> a označme symbolem

$\sigma(\mathcal{U})$ ... σ-okruh generovaný $\mathcal{U}$,

$\sigma_A(\mathcal{U})$ ... σ-algebru generovanou systémem $\mathcal{U}$.

13.6 Příklady.

(a) Buď $\mathcal{U} \subset \exp X$, potom

$$\mathcal{U} \text{ je } \sigma\text{-okruh} \Longleftrightarrow \sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{U},$$

dokažte! Vyslovte obdobná tvrzení pro okruhy, algebry či σ-algebry.

(b) Nechť $\mathcal{B}$ je systém všech omezených podmnožin E_1. Potom $\mathcal{B}$ tvoří okruh (viz 13.2.a) a $\sigma(\mathcal{B}) = \exp E_1$. Dokažme poslední trvzení - zvolíme tedy $A \subset E_1$ a chceme dokázat, že $A \in \sigma(\mathcal{B})$.

Zřejmě $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap \langle -n,+n \rangle)$, ale $A \cap \langle -n,+n \rangle \in \mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{B})$ a vzhledem k tomu, že $\sigma(\mathcal{B})$ je σ-okruh, plyne odtud tvrzení $A \in \sigma(\mathcal{B})$.

(c) Nechť $\mathcal{S}$ je systém všech spočetných podmnožin E_1. Potom $\mathcal{S}$ je σ-okruh (viz 13.2.c) a $M \in \sigma_A(\mathcal{S}) \Longleftrightarrow M$ je spočetná anebo $E_1 - M$ je spočetná. Dokažte! Je v tom případě $\sigma_A(\mathcal{S}) = \exp E_1$?

(d) Obecně - buď $\mathcal{Y}$ σ-okruh podmnožin množiny X. Potom

$$\sigma_A(\mathcal{Y}) = \left\{ M \subset X ;\ M \in \mathcal{Y} \text{ anebo } X - M \in \mathcal{Y} \right\}.$$

Dokažte! (Označme $\mathcal{B} = \left\{ M \subset X ;\ M \in \mathcal{Y} \text{ anebo } X - M \in \mathcal{Y} \right\}$. Stačí ukázat, že $\mathcal{Y} \subset \mathcal{B}$ a $\mathcal{B}$ tvoří σ-algebru. Podrobně vysvětlete!)

13.7 Definice.

Definujeme systém <u>borelovských množin v E_n</u> jako σ-okruh generovaný systémem všech otevřených podmnožin E_n. Systém všech borelovských množin v E_n budeme značit symbolem $\mathcal{B}_n$.

13.8 Poznámky.

(a) Označíme-li symboly $\mathcal{O}_n$, $\mathcal{U}_n$, $\mathcal{K}_n$ systémy všech otevřených, uzavřených či kompaktních podmnožin E_n, je

$$\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{O}_n) = \sigma(\mathcal{U}_n) = \sigma(\mathcal{K}_n) = \sigma_A(\mathcal{O}_n) = \sigma_A(\mathcal{U}_n) = \sigma_A(\mathcal{K}_n)$$

vysvětlete !

(b) Zřejmě každá otevřená a uzavřená množina v E_n je borelovská, každá množina typu F_σ či G_δ je též borelovská, rovněž tak množiny typu $F_{\sigma\delta}$, $F_{\sigma\delta\sigma}$, ..., $G_{\delta\sigma}$, $G_{\delta\sigma\delta}$, ..., jsou borelovské. Systém borelovských množin v E_n je tedy nejmenším systémem množin, který obsahuje všechny uzavřené a otevřené množiny a je uzavřený na tvoření spočetných průniků a sjednocení.

(c) Každá borelovská množina v E_n je lebesgueovsky měřitelná, tj. $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$ (kde $\mathcal{M}_n$ je systém všech lebesgueovsky měřitelných množin v E_n, vybudovaný kupříkladu z teorie integrálu v kap. 11 či přímo v kapitole 14).

Toto tvrzení plyne ihned z faktů, že každá otevřená podmnožina E_n je leb. měřitelná (viz věty 11.2.A, 14.8) a že systém $\mathcal{M}_n$ tvoří σ-okruh.

Není však $\mathcal{B}_n = \mathfrak{M}_n$; existují leb. měřitelné množiny, které nejsou borelovské (viz cvičení 10.F.g či 13.14). Odtud též vidíme, jak "široký" je systém všech leb. měřitelných množin v E_n .

B. ABSTRAKTNÍ MÍRA

V dalším předpokládáme, že je pevně zadána neprázdná množina X .

13.9 Definice.

Buď $\mathcal{S}$ systém podmnožin množiny X (tj. $\mathcal{S} \subset \exp X$).

Množinovou funkcí na $\mathcal{S}$ rozumíme každé zobrazení množiny $\mathcal{S}$ do E_1^* . Tak kupříkladu.

(a) Je-li (X, ρ) metrický prostor, $\mathcal{S}$ systém všech podmnožin X , je zobrazení

$$A \longrightarrow \operatorname{diam} A \, , \quad A \in \mathcal{S}$$

(kde $\operatorname{diam} A = \sup\limits_{x,y \in A} \rho(x,y)$ je tzv. průměr množiny A)

množinová funkce,

(b) je-li X libovolná množina, je zobrazení

$$A \longrightarrow \operatorname{moh} A$$

množinová funkce na exp X

(kde moh A značí počet prvků množiny A , je-li A konečná a $\operatorname{moh} A = +\infty$, je-li A nekonečná),

(c) je-li $X = \langle a,b \rangle$, $\mathcal{S}$ systém všech jordan-peanovsky měřitelných množin v $\langle a,b \rangle$ (viz 2.3), ν Jordanova míra, je zobrazení

$$A \longrightarrow \nu A \, , \quad A \in \mathcal{S}$$

množinová funkce na $\mathcal{S}$.

13.10 Definice míry.

Mírou μ rozumíme takovou množinovou funkci, která splňuje následující axiomy:

(M_1) : definičním oborem μ je nějaký σ - okruh $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X ,

(M_2) : $A \in \mathcal{S} \Longrightarrow \mu A \geq 0$.

(M_3) : $\mu \emptyset = 0$,

(M_4) : $A_n \in \mathcal{S}$ po dvou disjunktní $\Longrightarrow \mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu A_n$.

27571 Z13

13.11 Poznámky.

(a) Vždy tedy předpokládáme, že míra je definována na nějakém σ-okruhu !

(b) Míra je vždy nezáporná množinová funkce; mírami, které mohou nabývat i záporných hodnot, se budeme zabývat až ve II.díle; to jsou pak tzv. znaménkové míry.

(c) Axiom (M_4) vyjadřuje tzv. σ-aditivitu míry. "Mírám", které místo axiomů (M_1), (M_4) splňují pouze následující axiomy
(M_1^*): definičním oborem μ je nějaký okruh $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X .
(M_4^*) : $A,B \in \mathcal{S}$, $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mu(A \cup B) = \mu A + \mu B$

budeme též někdy říkat (byť trochu nedůsledně) konečně-aditivní míry.
Zřejmě každá míra (σ -aditivní) je i konečně-aditivní (vysvětlete!), ale nikoliv naopak (viz 13.12.e,f).

(d) Funkci, která splňuje axiomy (M_1^*),(M_2) - (M_4) říkejme též (σ-aditivní) míra na okruhu.

13.12 Příklady.

(a) Nechť množinová funkce μ je odvozena z teorie Daniellova integrálu (viz 9.44), tj. $X = P$, $\mathcal{S} = \mathfrak{M}$, $\mu \equiv$ míra z integrálu. Potom μ je míra (viz větu 9.47).

(b) Nechť $X = E_1$, $\mathcal{S} = \exp E_1$,

$$\mu : E \begin{cases} 0 & \text{jestliže } 5 \notin E , \\ 1 & \text{jestliže } 5 \in E , \end{cases}$$

potom μ je míra.

(d) Nechť $X = E_n$, $\mathcal{S} = \mathcal{B}_n$ (viz 13.7), nechť μ je restrikce Lebesgueovy míry na B_n, potom μ je míra.
Vysvětlete! Tohoto důležitého příkladu využijeme ještě v 13.14.

(e) Nechť $X = N$ (množina přirozených čísel), $\mathcal{S} = \exp N$. Nechť $u_n \geq 0$ je posloupnost nezáporných reálných čísel. Pro $E \subset N$ položme

$$\mu_1 E = \sum_{n \in E} u_n ,$$

$$\mu_2 E = \begin{cases} \sum_{n \in E} u_n , & \text{je-li } E \text{ konečná množina,} \\ +\infty , & \text{je-li } E \text{ nekonečná množina.} \end{cases}$$

Potom μ_1 je míra (dokažte!). V případě, že $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < +\infty$, je μ_2 příkladem množinové funkce, která je konečně-aditivní míra definovaná na σ -okruhu, ale není míra (vysvětlete!).

(f) Pro $X = \langle a,b \rangle$, $\mathcal{S} \equiv \mathcal{T}$ (viz 2.8), $\nu \equiv$ Jordanova míra, je ν příkladem σ -aditivní míry na okruhu.

13.13 Vlastnosti míry.

Buď μ míra na $\mathcal{S}$. Potom

(a) $A,B \in \mathcal{S}$, $A \subset B \Longrightarrow \mu A \leq \mu B$,

(b) $A_n \in \mathcal{S}$ $(n = 1,2,\dots) \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$,

(množiny A_n nemusí být po dvou disjunktní !),

(c) $M_n \in \mathcal{S}$, $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots$, $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \Longrightarrow \mu M = \lim \mu M_n$,

(d) $M_n \in \mathcal{S}$, $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \dots$, $\mu M_1 < +\infty$,

$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \Longrightarrow \mu M = \lim \mu M_n$

(porovnejte s větou 9.47).

Důkaz. a) Můžeme psát $B = A \cup (B - A)$, odtud plyne (axiomy (M_2), (M_4))

$\mu B = \mu A + \mu(B-A) \geq \mu A$.

b) Pišme $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 - A_1$, ..., $B_n = A_n - (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$,

potom množiny $B_n \in \mathcal{S}$ jsou po dvou disjunktní, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $B_n \subset A_n$ a tudíž

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu B_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$$

(provádějte podrobně!)

Důkazy vět c) a d) jsou obdobné důkazům vět z 9.47, proveďte sami!

13.14 Poznámka.

Ukážeme na následujícím příkladě, že nemusí být vždy splněna implikace

$$A \in \mathcal{S}, \quad \mu A = 0, \quad B \subset A \Longrightarrow B \in \mathcal{S}.$$

Vezměme příklad 13.12.d, položme tedy

$X = E_1$, $\mathcal{S} = \mathcal{B}_1$ (borelovské množiny v E_1),

μ = Lebesgueova míra na $\mathcal{B}_1$.

Lze dokázat, že mohutnost množiny $\mathcal{B}_1$ je rovna $2^{\aleph_0}$ (mohutnost systému borelovských množin v E_1 je tedy rovna mohutnosti množiny všech reálných čísel). Vezmeme-li za množinu A Cantorovo diskontinuum v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ (viz kupříkladu [T], 5.7), je známo, že $\mu A = 0$ (viz tamtéž) a že mohutnost množiny A je opět $2^{\aleph_0}$. Z teorie množin je dále známo, že systém všech podmnožin dané množiny M má vždy mohutnost větší než je mohutnost množiny M (platí dokonce, že moh exp $M = 2^{\text{moh } M}$). Odtud okamžitě plyne, že existují podmnožiny Cantorova diskontinua, které nejsou borelovské; podrobně objasněte!

Tím jsme ukázali existenci takových množin B, které neleží v systému $\mathcal{S} = {}_1$. Jiný důkaz nalezenete ve cvičení 10.F.g.

Poslední příklad nás vede k následující definici.

$\boxed{13.15}$ Definice úplné míry.

Míra μ definovaná na σ-okruhu $\mathcal{S}$ se nazývá <u>úplná</u>, splňuje-li následující axiom

(M_5) : $A \in \mathcal{S}$, $\mu A = 0$, $B \subset A \implies B \in \mathcal{S}$.

V 13.45 uvidíme, že při vyšetřování měr se můžeme omezit pouze na úplné míry.

Poznamenejme ještě, že míra odvozená v teorii Daniellova integrálu je vždy úplná (viz 9.26.b).

C. VNĚJŠÍ MÍRA

Chtěli bychom nyní mít definovánu míru na co největším systému množin, nejraději na systému všech podmnožin dané množiny X. Je otázka, zda tomuto požadavku lze vždy netriviálně vyhovět, v dalším se pokusíme tento problém řešit. Nejdříve zadefinujeme tzv. vnější míru.

$\boxed{13.16}$ Definice vnější míry.

<u>Vnější míra μ^*</u> je množinová funkce, splňující následující axiomy

(VM_1) : definičním oborem funkce μ^* je $\exp X$ ($\equiv$ systém všech podmnožin množiny X),

(VM_2) : $A \subset X \implies \mu^* A \geq 0$,

(VM_3) : $\mu^* \emptyset = 0$,

(VM_4) : $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies \mu^* A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n$.

$\boxed{13.17}$ Poznámky.

(a) Z axiomů (VM_3), (VM_4) ihned plynou následující vlastnosti

(i) $A \subset B \implies \mu^* A \leq \mu^* B$,

(ii) $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n$ pro libovolnou posloupnost množin A_n.

Z axiomu (VM_3) a (i) okamžitě plyne axiom (VM_2), je tedy axiom (VM_2) důsledkem axiomů (VM_4) a (VM_3) a zařadili jsme ho do definice vnější míry pouze z důvodů symetrie s definicí 13.10 míry množin.

(b) Ukažte, že z vlastností (i) a (ii) již plyne axiom (VM_4).

(c) Ukažte, že neplatí implikace (ii) $\implies (VM_4)$.

(d) Porovnejte definici míry a vnější míry !

13.18 Příklady.

(A) Každá míra definovaná na σ-okruhu všech podmnožin množiny X je vnější míra, dokažte !

(B) Buď X nespočetná množina,

$$\mu^*: \quad \mu^* A = \begin{cases} 0, & \text{je-li } A \subset X \text{ spočetná,} \\ 1, & \text{je-li } A \subset X \text{ nespočetná.} \end{cases}$$

Ukažte, že μ^* je vnější míra. Je μ^* míra ?

(C) Buď X libovolná množina, definujme funkci μ^* vztahem

$$\mu^*: A \mapsto \begin{cases} 0 & \text{pro } A = \emptyset, \\ 2 & \text{pro } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Ukažte, že μ^* je vnější míra. Kdy bude μ^* dokonce míra ?

(D) Vyjdeme-li z teorie Daniellova integrálu, je funkce $\tilde{\mu}$ ($\tilde{\mu} M = \tilde{A}\, c_M$, viz 9.44) vnější míra. Dokažte !

(E) Podáme nyní velice důležitou konstrukci Lebesgueovy míry v E_n. Tímto příkladem byla vlastně naše definice vnější míry motivována. (Podrobněji se tímto speciálním příkladem budeme zabývat však až v kapitole 14.)

Pro každou množinu $A \subset E_n$ položte

$$\lambda^* A = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol} I_k \, ; \, I_k \text{ jsou otevřené intervaly, } \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset A \right\}$$

a ukažte, že λ^* je vnější míra.

Návod. Obtížnější je pouze ověření (VM_4). Nechť tedy $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Předpokládejte, že $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^* A_i < +\infty$, zvolte $\varepsilon > 0$ a nalezněte intervaly I_i^k tak, aby

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} I_i^k \supset A_i \, , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol} I_i^k < \lambda^* A_i + \frac{\varepsilon}{2^i} \, .$$

Potom ovšem $\bigcup_{i,k=1}^{\infty} I_i^k \supset A$ a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^* A_i > \lambda^* A - \varepsilon \, .$$

Porovnejte též s důkazem věty 13.29.

13.19 Formulace problému.

Nechť je zadána vnější míra μ^* na systému všech podmnožin množiny X. Hledáme nyní takový systém množin $\mathcal{M} \subset \exp X$, aby funkce μ^* na $\mathcal{M}$ měla všechny vlastnosti míry (speciálně, aby systém $\mathcal{M}$ byl σ-okruhem!) a pochopitelně, aby systém $\mathcal{M}$ byl co možná největší.

Jinak řečeno, vnější míra nemusí být na exp X ani konečně-aditivní (viz kupříkladu 13.18.b, 13.18.c), naší snahou je nalézt co nejširší σ-okruh množin $\mathcal{M}$, na kterém by funkce μ^* již byla dokonce σ-aditivní.

Řešení tohoto problému je obsaženo v následujících větách 13.24, 13.25. V dalším předpokládejme, že je dána pevně vnější míra μ^* na exp X !

13.20 Definice.

Množina $A \subset X$ se nazývá μ^*-nulová, jestliže $\mu^* A = 0$. Symbolem $\mathcal{N}(\mu^*)$ značme systém všech μ^*-nulových podmnožin X.

13.21 Věta (vlastnosti $\mathcal{N}(\mu^*)$).

Systém $\mathcal{N}(\mu^*)$ μ^*-nulových množin má následující vlastnosti:

a) $\emptyset \in \mathcal{N}(\mu^*)$,

b) $A \in \mathcal{N}(\mu^*), B \subset A \Longrightarrow B \in \mathcal{N}(\mu^*)$,

c) $A_n \in \mathcal{N}(\mu^*)\ (n = 1,2,\dots) \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{N}(\mu^*)$.

Systém $\mathcal{N}(\mu^*)$ tvoří tzv. σ-ideál množin.

(Říkáme, že systém $\mathcal{W}$ podmnožin množiny X je ideál, jestliže platí

a) $A \in \mathcal{W}$, $B \subset A \Longrightarrow B \in \mathcal{W}$,

b) $A, B \in \mathcal{W} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{W}$.

Říkáme, že systém $\mathcal{W}$ je σ-ideál, jestliže navíc splňuje požadavek

c) $A_n \in \mathcal{W} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{W}$.

Duálním pojmem k ideálu je filtr - to je takový systém množin, že s každou svojí množinou obsahuje i všechny její nadmnožiny, a že průnik dvou množin z filtru opět leží ve filtru.)

Důkaz. Tvrzení plynou ihned z axiomů vnější míry.

13.22 Definice μ^*-měřitelných množin.

Množina $M \subset X$ se nazývá μ^*-měřitelná, jestliže pro každou množinu $T \subset X$ platí

$$\mu^* T = \mu^*(T \cap M) + \mu^*(T - M) .$$

Symbolem $\mathcal{M}(\mu^*)$ značme systém všech μ^*-měřitelných množin.

(Definice μ^*-měřitelných množin pochází od německého matematika řeckého původu Constantina Caratheodoryho, proto též někdy mluvíme o měřitelných množinách ve smyslu Caratheodoryově.)

Poznámky.

(a) Definice μ^*-měřitelných množin se zdá být na první pohled zcela nejasná a zřejmě i dost nepřirozená. Uvědomme si proto její názorný smysl.

Množina M je μ^*-měřitelná, když má následující vlastnost:

ať vezmeme jakoukoliv množinu T ("testovací množinu"), potom množina M tuto množinu T "rozštípne" na dvě disjunktní části T_1, T_2 a vnější míra μ^* je "aditivní na $T_1 \cup T_2$", tj.

$$\mu^*(T_1 \cup T_2) = \mu^* T_1 + \mu^* T_2 .$$

V dalším se ukáže, že právě tato definice μ^*-měřitelných množin "je" v podstatě tou nejlepší definicí a je ideálním řešením našeho problému formulovaného v 13.19.

(b) Abychom si ještě hlouběji uvědomili smysl Caratheodoryho definice μ^*-měřitelných množin, uvedeme si následující charakteristiku systému $\mathcal{M}(\mu^*)$, kterou v dalším však nebudeme používat.

Množina M je μ^*-měřitelná právě tehdy, když pro libovolné množiny T_1, T_2, $T_1 \subset M$, $T_2 \subset X - M$ platí rovnost

$$(*) \quad \mu^*(T_1 \cup T_2) = \mu^* T_1 + \mu^* T_2 .$$

Jinými slovy, vnější míra je aditivní "na množinách oddělených množinou M". Důkaz našeho tvrzení je snadný.
Je-li totiž $M \in \mathcal{M}(\mu^*)$, $T_1 \subset M$, $T_2 \subset X - M$, stačí položit v definici μ^*-měřitelných množin $T = T_1 \cup T_2$ a okamžitě dostáváme rovnost $(*)$.
Naopak, platí-li rovnost $(*)$ pro každé dvě množiny $T_1 \subset M$, $T_2 \subset X - M$ a je-li $T \subset X$ libovolná množina, platí zřejmě

$$\mu^* T = \mu^*(T \cap M) + \mu^*(T - M) ,$$

neboť stačí položit $T_1 = T \cap M$, $T_2 = T - M$ a použít $(*)$.

13.23 Lemma.

Množina $M \subset X$ je μ^*-měřitelná, právě když je splněna nerovnost

$$\mu^* T \geq \mu^*(T \cap M) + \mu^*(T - M)$$

pro každou množinu $T \subset X$ konečné vnější míry, tj.

$$M \in \mathcal{M}(\mu^*) \Longleftrightarrow \mu^* T \geq \mu^*(T \cap M) + \mu^*(T - M) , \text{ kdykoliv } T \subset X , \ \mu^* T < +\infty .$$

(Této velice důležité charakteristiky budeme často používat při důkazech dalších tvrzení.)

Důkaz. Je-li $M \in \mathfrak{M}(\mu^*)$, je zřejmě podmínka splněna (platí dokonce rovnost pro všechny množiny $T \subset X$).

Nechť naopak je splněna podmínka; chceme ukázat, že $M \in \mathfrak{M}(\mu^*)$. Zvolme libovolnou (testovací) množinu $T \subset X$. Ze vztahu $T = (T \cap M) \cup (T - M)$ plyne (axiomy VM_4, VM_3)

$$\mu^* T \leq \mu^*(T \cap M) + \mu^*(T - M) .$$

Potřebujeme ještě dokázat, že

$$\mu^* T \geq \mu^*(T \cap M) + \mu^*(T - M) .$$

Tato nerovnost je však zřejmá, je-li $\mu^* T = +\infty$. Je-li $\mu^* T < +\infty$, pak je poslední nerovnost splněna právě díky naší podmínce.

$\boxed{13.24}$ Věta (vlastnosti systému $\mathfrak{M}(\mu^*)$).

Systém $\mathfrak{M}(\mu^*)$ všech μ^*-měřitelných množin je σ-algebra a obsahuje systém $\mathfrak{N}(\mu^*)$ všech μ^*-nulových množin.

Důkaz. (I) Ukážeme nejdříve, že $\mathfrak{N}(\mu^*) \subset \mathfrak{M}(\mu^*)$. Buď $A \in \mathfrak{N}(\mu^*)$, tedy $\mu^* A = 0$ a zvolme (testovací) množinu $T \subset X$. Potom

$$\mu^*(T \cap A) + \mu^*(T - A) \leq 0 + \mu^* T = \mu^* T ,$$

odkud podle předchozího lemmatu 13.23 plyne, že $A \in \mathfrak{M}(\mu^*)$.

(II) Důkaz tvrzení, že $\mathfrak{M}(\mu^*)$ je σ-algebra, provedeme v několika krocích.

(α) $A \in \mathfrak{M}(\mu^*) \Longrightarrow X - A \in \mathfrak{M}(\mu^*)$.

Zvolme $T \subset X$, potom

$$\mu^*(T \cap (X - A)) + \mu^*(T - (X - A)) = \mu^*(T - A) + \mu^*(T \cap A) = \mu^* T ,$$

tedy $X - A \in \mathfrak{M}(\mu^*)$.

(β) $\emptyset, X \in \mathfrak{M}(\mu^*)$.

Plyne okamžitě z (I) a (α).

(γ) $A, B \in \mathfrak{M}(\mu^*) \Longrightarrow A \cup B \in \mathfrak{M}(\mu^*)$.

Zvolme opět $T \subset X$, potom

$\mu^* T = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T - A)$ (využíváme μ^*-měřitelnosti množiny A na testovací množinu T),

$\mu^*(T - A) = \mu^*((T - A) \cap B) + \mu^*((T - A) - B)$ (využíváme μ^*-měřitelnosti množiny B na testovací množinu $T - A$!).

Odtud dostáváme

$\mu^* T = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T - A) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*((T - A) \cap B) + \mu^*((T - A) - B) =$

(použijeme nyní následujících identit:

$(T - A) - B = T - (A \cup B)$.

$T \cap (A \cup B) = (T \cap A) \cup ((T - A) \cap B))$

$= \mu^*(T - (A \cup B)) + (\mu^*(T \cap A) + \mu^*((T - A) \cap B) \geq$

$\geq \mu^*(T - (A \cup B)) + \mu^*(T \cap (A \cup B))$,

čili znovu podle lemmatu 13.23 je $A \cup B \in \mathfrak{M}(\mu^*)$.

(δ) $E_n \in \mathfrak{M}(\mu^*)$ $(n = 1,2,\ldots)$ po dvou disjunktní , $S_n = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$,

$T \subset X \implies \mu^*(T \cap S_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(T \cap E_j)$.

Toto tvrzení dokážeme indukcí podle n. Pro $n = 1$ je tvrzení triviální, předpokládejme, že

$$\mu^*(T \cap S_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(T \cap E_j) .$$

Množina S_n je podle (γ) μ^*-měřitelná, tedy (vezmeme testovací množinu $T \cap S_{n+1}$)

$$\mu^*(T \cap S_{n+1}) = \mu^*((T \cap S_{n+1}) \cap S_n) + \mu^*((T \cap S_{n+1}) - S_n) =$$

$$= \mu^*(T \cap S_n) + \mu^*(T \cap E_{n+1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mu^*(T \cap E_j) + \mu^*(T \cap E_{n+1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \mu^*(T \cap E_j) .$$

(ε) $E_n \in \mathfrak{M}(\mu^*)$ $(n = 1,2 \ldots)$ po dvou disjunktní, $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$,

$T \subset X \implies \mu^*(T \cap S) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(T \cap E_j)$.

Zřejmě $T \cap S \supset T \cap S_n$ pro každé n . Odtud plyne, že

$$\mu^*(T \cap S) \geq \mu^*(T \cap S_n) \overset{\text{viz } (\delta)}{=\!=} \sum_{j=1}^{n} \mu^*(T \cap E_j)$$

pro každé n , čili

$$\mu^*(T \cap S) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(T \cap E_j).$$

Obrácená nerovnost platí vždy (viz axiom (VM_4)).

(ζ) $E_n \in \mathfrak{M}(\mu^*)$ $(n = 1,2,\dots)$ po dvou disjunktní $\Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{M}(\mu^*)$.

Zvolme množinu $T \subset X$. Nechť $S_n = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$, $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Zřejmě $S_n \in \mathfrak{M}(\mu^*)$ podle (γ) , tudíž

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap S_n) + \mu^*(T - S_n) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(T \cap E_j) + \mu^*(T - S) .$$

Odtud podle (ε) dostáváme

$$\mu^* T \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(T \cap E_j) + \mu^*(T - S) = \mu^*(T \cap S) + \mu^*(T - S),$$

což podle lemmatu 13.23 stačí k důkazu tvrzení, že $S \in \mathfrak{M}(\mu^*)$.

(η) $A, B \in \mathfrak{M}(\mu^*) \Longrightarrow A - B \in \mathfrak{M}(\mu^*)$.

Toto tvrzení plyne ihned ze vztahu

$$A - B = X - ((X - A) \cup B)$$

a z předchozích částí.

(ϑ) $E_n \in \mathfrak{M}(\mu^*)$ $(n = 1,2,\dots) \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{M}(\mu^*)$.

Položíme-li $F_n = E_n - (E_1 \cup \dots \cup E_{n-1})$, jsou množiny F_n po dvou disjunktní, μ^*-měřitelné (podle (γ) a (η)) a $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathfrak{M}(\mu^*)$ podle (ζ). Tedy i $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{M}(\mu^*)$, neboť $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

13.25 Věta (vlastnosti μ^* na systému $\mathfrak{M}(\mu^*)$).

Funkce μ^* je úplná míra na $\mathfrak{M}(\mu^*)$. (Přesněji bychom měli hovořit o funkci $\mu^* / \mathfrak{M}(\mu^*)$.)

Důkaz. V předešlé větě jsme ukázali, že systém $\mathfrak{M}(\mu^*)$ je σ-algebra. Lehko vidíme, že jsou splněny axiomy (M_1) – (M_3) z 13.10. Pro ověření platnosti (M_4) (σ-aditivity μ^*) použijte odstavec (ε) v důkazu předchozí věty 13.24, kde položíte $T = S$. Úplnost míry μ^* plyne z 13.21.b a 13.24.

13.26 Poznámka. Funkci μ^*, uvažované pouze na systému měřitelných množin $\mathfrak{M}(\mu^*)$, říkáme míra indukovaná vnější mírou μ^*.

Z 13.24 a 13.25 vidíme, že se nám vcelku úspěšně podařilo vyřešit problém formulovaný v 13.19. Nevíme zatím pouze, zda náš systém $\mathfrak{M}(\mu^*)$ μ^*-měřitelných množin je "nejširší" systém, na němž je funkce μ^* míra. V 13.39 ukážeme, že tomu tak skutečně je.

$\boxed{13.27}$ Příklady

(A) (viz 13.18.A). Je-li μ^* míra definovaná na systému všech podmnožin množiny X, je $\mathfrak{M}(\mu^*) = \exp X$, dokažte!

(B) (viz 13.18.B). Buď X nespočetná množina, $\mu^* A = 0$, je-li $A \subset X$ spočetná, $\mu^* A = 1$, je-li A nespočetná.
Ukážeme, že

$$\mathfrak{M}(\mu^*) = \left\{ A \subset X ; A \text{ je spočetná anebo } X - A \text{ je spočetná} \right\}.$$

Buď $A \subset X$ spočetná množina; chceme ukázat, že $A \in \mathfrak{M}(\mu^*)$.
Zvolme testovací množinu $T \subset X$. Potom lehko sami zjistíte (rozdělením případů T spočetná či T nespočetná), že

$$\mu^* T = \mu^*(T - A) + \mu^*(T \cap A) .$$

Obdobně se ukáže, že $A \in \mathfrak{M}(\mu^*)$, je-li $X - A$ spočetná množina (což nakonec plyne z faktu, že $\mathfrak{M}(\mu^*)$ je σ-algebra). Zbývá nyní dokázat, že systém $\mathfrak{M}(\mu^*)$ neobsahuje již žádné jiné množiny. Nechť tedy $A \subset X$ je nespočetná množina, pro níž i množina $X - A$ je nespočetná. Potom pro množinu $T = X$ není splněn vztah

$$\mu^* T = \mu^*(T - A) + \mu^*(T \cap A) \text{ , tedy } A \notin \mathfrak{M}(\mu^*).$$

(C) (viz 13.18.C). Je-li X libovolná množina a $\mu^* A = 2$ pro $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, je $\mathfrak{M}(\mu^*) = \left\{ \emptyset, X \right\}$. Dokažte!
Návod. Je-li $\emptyset \neq A \neq X$, zvolte testovací množinu $T = X$.

(D) (viz 13.18.D). Vyjdeme-li z teorie integrálu a je-li $X = P \in \mathfrak{M}$, $\mu^* = \tilde{\mu}$ (viz 9.44), je $\mathfrak{M}(\mu^*) = \mathfrak{M}$.
Důkaz tohoto tvrzení je obsažen v 9.57.
Není-li $P \in \mathfrak{M}$, platí pouze inkluse $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}(\mu^*)$, přičemž rovnost nemůže nastat (neboť vždy $P \in \mathfrak{M}(\mu^*)$). Viz též [$\mathcal{T}$], 8.30.

D. VYTVÁŘENÍ VNĚJŠÍ MÍRY

Pro libovolnou množinu $A \subset E_n$ jsme položili v 13.18.E

$$\lambda^*_n A = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{vol} I_n ,$$

kde infimum se bere přes všechna možná pokrytí množiny A spočetnými systémy otevřených intervalů $\left\{ I_n \right\}$. Funkci

$$\lambda^*_n : \exp E_n \longrightarrow \langle 0, +\infty \rangle$$

jsme nazvali Lebesgueovou vnější mírou v E_n. Ukážeme v dalším, jak lze konstruovat obecně vnější míry v X, známe-li již "míry" jistých podmnožin množiny X.

13.28 Definice.

V dalším buď X libovolná množina. Nechť $\mathcal{Y} \subset \exp X$ je systém jistých podmnožin množiny X a nechť

$$\lambda : \mathcal{Y} \to \langle 0, +\infty \rangle \text{ je množinová funkce na } \mathcal{Y} .$$

Předpokládejme, že

$$\emptyset \in \mathcal{Y} \quad \text{a} \quad \lambda \emptyset = 0 .$$

Dvojici $(\mathcal{Y}, \lambda)$ nazveme <u>pokrývacím systémem.</u>

Pro každou množinu $A \subset X$ položme

$$\lambda^* A = \inf_{\substack{G_n \in \mathcal{Y} \\ \cup G_n \supset A}} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda G_n$$

(Uvědomte si, že $\inf \emptyset = +\infty$.)

13.29 Věta.

Funkce λ^* je vnější míra (předpokládáme, že $(\mathcal{Y}, \lambda)$ je pokrývací systém na X).

Důkaz. Axiomy (VM_1) - (VM_3) z 13.16 jsou zřejmě splněny.

Ověřme (VM_4). Nechť tedy $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; chceme dokázat, že $\lambda^* A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^* A_n$. Můžeme ihned předpokládat, že $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^* A_n < +\infty$ (proč?). Zvolme $\varepsilon > 0$; ke každému $n \in N$ můžeme nalézt množiny $G_n^j \in \mathcal{Y}$ $(j = 1,2,\dots)$ tak, aby

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} G_n^j \supset A_n , \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda G_n^j < \lambda^* A_n + \frac{\varepsilon}{2^n} .$$

Potom platí (nezapomeňte, že $\bigcup_{n,j=1}^{\infty} G_n^j \supset A$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^* A_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda G_n^j - \frac{\varepsilon}{2^n} \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda G_n^j - \varepsilon \geq \lambda^* A - \varepsilon .$$

Ovšem $\varepsilon > 0$ jsme zvolili libovolně, odtud tedy plyne žádaná nerovnost.

13.30 **Příklady.**

(A) V E_n volíme $\mathcal{U} = \{ I \subset E_n ;\ I$ je otevřený interval $\} \cup \{\emptyset\}$, $\lambda I = \text{vol}\ I$ jako pokrývací systém pro vytvoření vnější Lebesgueovy míry λ^*_n.

(B) Buď X libovolná množina, $\mathcal{U} = \exp X$ a λ vnější míra na X. Potom $(\mathcal{U}, \lambda)$ je pokrývací systém a $\lambda^* = \lambda$. Dokažte!

(C) Buď X nespočetná množina, nechť $\mathcal{U}$ sestává z $\emptyset$ a všech jednobodových množin. Položme $\lambda G = 0$ pro každou $G \in \mathcal{U}$. Určete λ^* z pokrývacího systému $(\mathcal{U}, \lambda)$.

13.31 **Problémy.**

Předpokládejme, že $(\mathcal{U}, \lambda)$ je pokrývací systém na X, utvořme množinovou funkci λ^* podle 13.28. Z předešlého víme, že funkce λ^* je vnější míra, můžeme tudíž vytvořit systém $\mathcal{M}(\lambda^*)$ všech λ^*-měřitelných množin podle 13.22. Ptáme se nyní, zda

(i) $\lambda G = \lambda^* G$ pro každou $G \in \mathcal{U}$,

(ii) $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}(\lambda^*)$.

Odpovědi na (i) a (ii) jsou negativní, uveďme příklady.

(i) Buď $X = \langle 0,1 \rangle$, $\mathcal{U} = \exp X$, $\lambda G = (R) \overline{\int_0^1} c_G = \nu^*(G)$

(λ je tedy horní Jordan-Peanův objem, viz cvičení 2.A).

Potom pro množinu všech racionálních čísel v $\langle 0,1 \rangle$ platí

$\lambda R = 1$, $\lambda^* R = 0$

Čemu je v tomto příkladě rovno $\lambda^* A$ pro $A \subset \langle 0,1 \rangle$?

(ii) Použijte příklad 13.20.B.

Ukažte, že $\lambda G \geq \lambda^* G$ platí vždy pro každou množinu $G \in \mathcal{U}$. Hledáme nyní nutné či postačující podmínky pro platnost (i) a (ii); řešení je obsaženo v následující větě a ve cvičení 13.T.

13.32 **Věta.**

Nechť 1) $\mathcal{U} \subset \exp X$ je okruh,

2) $\lambda : \mathcal{U} \to \langle 0, +\infty \rangle$ je σ-aditivní míra na okruhu $\mathcal{U}$ (viz 13.11.d).

Vytvořme vnější míru λ^* z pokrývacího systému $(\mathcal{U}, \lambda)$.

Potom (i) $\lambda G = \lambda^* G$ pro každou množinu $G \in \mathcal{U}$,

(ii) $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}(\lambda^*)$.

(Tzv. Hopfova věta o rozšíření míry.)

Důkaz. (i) Vzhledem k nerovnosti $\lambda \geq \lambda^*$ stačí dokázat, že $\lambda G \leq \lambda^* G$ pro každou $G \in \mathcal{U}$. Buď tedy $G \in \mathcal{U}$ a předpokládejme $\lambda^* G < +\infty$.

Jsou-li $G_n \in \mathcal{U}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \supset G$, potom (použijeme 13.13.a a 13.13.b, tato tvrzení platí i pro míru na okruhu)

$$\lambda G = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \cap G)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda (G_n \cap G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda G_n ,$$

tudíž $\lambda G \leq \lambda^* G$.

(ii) Buď $G \in \mathcal{U}$. Zvolme testovací množinu $T \subset X$ (můžeme hned předpokládat, že $\lambda^* T < +\infty$) a $\varepsilon > 0$. Existují množiny $G_n \in \mathcal{U}$ tak, že

$$T \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda G_n \leq \lambda^* T + \varepsilon .$$

Potom

$$\lambda^* T + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda G_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda (G_n \cap G) + \lambda (G_n - G)\right] \geq$$

$$\geq \lambda^* (T \cap G) + \lambda^* (T - G)$$

(poznamenejme, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \cap G) \supset T \cap G$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n - G) \supset T - G$).

Odtud již plyne $G \in \mathcal{M}(\lambda^*)$.

13.33 Poznámka.

Pečlivě si rozmyslete, co vlastně Hopfova věta říká. Máme-li zadánu míru μ na okruhu $\mathcal{U}$, můžeme vždy nalézt σ-okruh $\mathcal{S}$, který obsahuje okruh $\mathcal{U}$ a míru $\hat{\mu}$ na $\mathcal{S}$ tak, že $\hat{\mu} = \mu$ na $\mathcal{U}$. Jinými slovy, míru μ lze vždy rozšířit z okruhu na σ-okruh.

E. REGULÁRNÍ VNĚJŠÍ MÍRA

13.34 Problém.

Uvědomte si, co jsme v předcházejících odstavcích vytvořili. Ukázali jsme na dvě podstatné konstrukce:

(1) Konstrukce míry, máme-li zadánu vnější míru (Carathéodoryho postup),

(2) Konstrukce vnější míry, máme-li zadánu "míru" (pomocí pokrývacího systému).

Obě uvedené konstrukce můžeme kombinovat. Vyjdeme-li z "míry", můžeme zkonstruovat vnější míru a s její pomocí opět míru podle Caratheodoryho. Za jistých předpokladů (kupř. Hopfova věta) je nová míra rozšířením původní míry.

V dalším se budeme zabývat následující otázkou. Máme zadánu vnější míru μ^* na X. Utvořte systém $\mathfrak{M}(\mu^*)$ všech μ^*-měřitelných množin. Zřejmě dvojice $(\mathfrak{M}(\mu^*), \mu^*)$ tvoří pokrývací systém. Pomocí něho vytvořme vnější míru $\tilde{\mu}$, tj. položme

$$\tilde{\mu} A = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n , \quad A_n \in \mathfrak{M}(\mu^*) , \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset A$$

pro $A \subset X$. Jaký je nyní vztah vnějších měr $\tilde{\mu}$ a μ^* ?

Zřejmě vždy $\mu^* \leq \tilde{\mu}$ (neboť ze vztahu $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ plyne

$$\mu^* A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n , \quad \text{tedy i} \quad \mu^* A \leq \tilde{\mu} A \text{).}$$

13.35 Příklad.

Buď $X = \{a,b\}$ dvoubodová množina. Definujme $\mu^* \emptyset = 0$, $\mu^*\{a\} = \mu^*\{b\} = 3$, $\mu^* X = 5$. Ukažte, že μ^* je vnější míra a že $\mathfrak{M}(\mu^*) = \{\emptyset, X\}$. Definujeme-li vnější míru pomocí pokrývacího systému $(\mathfrak{M}(\mu^*), \mu^*)$, je

$$\tilde{\mu} \emptyset = 0 , \ \tilde{\mu}\{a\} = \tilde{\mu}\{b\} = \tilde{\mu} X = 5 .$$

Vidíme, že ne vždy musí nastat rovnost $\mu^* = \tilde{\mu}$.

13.36 Definice.

Nechť μ^* je vnější míra na X. Zkonstruujme vnější míru $\tilde{\mu}$ podle 13.34. Řekneme, že <u>vnější míra</u> μ^* je <u>regulární</u>, jestliže $\mu^* = \tilde{\mu}$.

13.37 Věta.

Následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) μ^* je regulární vnější míra,

(ii) $\mu^* A = \inf \{ \mu^* E ; \ E \in \mathfrak{M}(\mu^*) \}$ pro každou množinu $A \subset X$,

(iii) ke každé množině $A \subset X$ existuje $E \in \mathfrak{M}(\mu^*)$, $E \supset A$ tak, že $\mu^* E = \mu^* A$.

Důkaz. (i)$\Rightarrow$(ii) : Buď $A \subset X$, potom

$$\mu^* A = \tilde{\mu} A = \inf_{\substack{G_n \in \mathfrak{M}(\mu^*) \\ \cup G_n \supset A}} \sum \mu^* G_n \geq \inf_{\substack{G_n \in \mathfrak{M}(\mu^*) \\ \cup G_n \supset A}} \mu^* \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \Big) =$$

$$= \inf_{\substack{E \in \mathfrak{M}(\mu^*) \\ E \supset A}} \mu^* E ,$$

ale $\mu^* A \leq \mu^* E$ pro libovolnou množinu $E \supset A$ (důkladně rozmyslete!).

(ii)$\Longrightarrow$(iii): Je-li $\mu^* A = +\infty$, lze volit $E = X$. Nechť tedy $\mu^* A < +\infty$. Nalezněme množiny $E_n \in \mathfrak{M}(\mu^*)$, $E_n \supset A$, tak, aby $\mu^* E_n < \mu^* A + \frac{1}{n}$. Posloupnost E_n lze dokonce volit tak, aby $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$ (proč?). Položíme-li

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \text{ , je } E \in \mathfrak{M}(\mu^*) \text{ , } E \supset A \text{ a } \mu^* E = \lim \mu^* E_n \text{ .}$$

Odtud již snadno plyne tvrzení.

13.38 Příklady.

(A) Vnější míra z příkladu 13.35 není regulární.

(B) Ukážeme (14.10.a), že Lebesgueova vnější míra je regulární.

(C) Nechť pokrývací systém $(\mathcal{Y}, \lambda)$ vyhovuje předpokladům Hopfovy věty 13.32.

Potom vnější míra λ^* vytvořená pomocí $(\mathcal{Y}, \lambda)$ je regulární. Dokažte!

Návod. Buď $A \subset X$, potom

$$\lambda^* A = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \lambda G_n \text{ , kde } G_n \in \mathcal{Y} \text{ , } \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \supset A \quad \text{a}$$

$$\tilde{\lambda} A = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^* H_n \quad \text{kde } H_n \in \mathfrak{M}(\lambda^*) \text{, } \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \supset A \text{ .}$$

Ze vztahu $\mathcal{Y} \subset \mathfrak{M}(\lambda^*)$ a z rovnosti $\lambda = \lambda^*$ na $\mathcal{Y}$ plyne, že

$$\tilde{\lambda} A \le \inf_{\substack{H_n \in \mathcal{Y} \\ \cup H_n \supset A}} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^* H_n = \inf_{\substack{H_n \in \mathcal{Y} \\ \cup H_n \supset A}} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda H_n = \lambda^* A \text{ .}$$

(D) Vnější míra $\tilde{\mu}$, vytvořená v Daniellově teorii integrálu, je regulární (v případě $P \in \mathfrak{M}$).

Návod. Viz 9.59.

13.39 Věta (maximalita $\mathfrak{M}(\mu^*)$).

Nechť jsou splněny následující předpoklady:

1) μ^* je regulární vnější míra na množině X,

2) $\mathcal{P}$ je okruh takový, že $\mathfrak{M}(\mu^*) \subset \mathcal{P}$,

3) ν je konečně aditivní míra na $\mathcal{P}$ (viz 13.11.c) taková, že $\mu^* = \nu$ na $\mathcal{P}$.

Potom $\mathcal{P} = \mathfrak{M}(\mu^*)$.

27571 P14

Důkaz. Zvolme $E \in \mathcal{G}$, chceme ukázat, že $E \in \mathfrak{M}(\mu^*)$.
Buď tedy $T \subset X$ (testovací) množina. Podle 13.37 nalezněme množinu $T_1 \in \mathfrak{M}(\mu^*)$, $T_1 \supset T$ tak, aby $\mu^* T_1 = \mu^* T$.
Potom $T_1 \cap E \in \mathcal{G}$, $T_1 - E \in \mathcal{G}$ a

$$\mu^* T = \mu^* T_1 = \nu T_1 = \nu(T_1 \cap E) + \nu(T_1 - E) =$$

$$= \mu^*(T_1 \cap E) + \mu^*(T_1 - E) \geq \mu^*(T \cap E) + \mu^*(T - E),$$

podle 13.23 je tedy $E \in \mathfrak{M}(\mu^*)$.

13.40 Důsledky.

Uvědomte si dobře smysl předešlé věty ! Tato věta odpovídá na problém formulovaný v 13.19 a 13.26 o maximalitě systému všech μ^*-měřitelných množin pro regulární vnější míru μ^*. Je vidět, že systém $\mathfrak{M}(\mu^*)$ je nejširším systémem množin, na němž funkce μ^* má vlastnosti míry. Jinými slovy, je-li okruh $\mathcal{G} \supset \mathfrak{M}(\mu^*)$, $\mathcal{G} \neq \mathfrak{M}(\mu^*)$, nelze na systému $\mathcal{G}$ definovat míru ν tak, aby $\nu = \mu^*$ na $\mathcal{G}$; vždy bude existovat množina $E \in \mathcal{G} - \mathfrak{M}(\mu^*)$, pro níž $\nu E \neq \mu^* E$! V tomto smyslu je tedy systém množin $\mathfrak{M}(\mu^*)$ maximální.

F. ROZŠÍŘENÍ A ZÚPLNĚNÍ MÍRY

Zopakujte si ještě jednou Hopfovu větu. Ukázali jsme, že míru z okruhu lze vždy rozšířit na σ-okruh. Myšlenka konstrukce rozšíření byla vcelku jednoduchá - pomocí míry na okruhu jsme vytvořili vnější míru a z této Caratheodoryho metodou pak systém všech měřitelných množin. V tomto odstavci ukážeme ještě jednu konstrukci rozšíření, důležitou samu o sobě. Kromě toho se budeme zabývat jednoznačností rozšíření míry.

13.41 Definice. Míra μ na okruhu $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U} \subset \exp X$) se nazývá konečná, jestliže $\mu A < +\infty$ pro každé $A \in \mathcal{U}$. Míru μ nazveme σ-konečnou, jestliže existují množiny $A_n \in \mathcal{U}$ s vlastnostmi: $\mu A_n < +\infty$,
$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$.

13.42 Poznámky.

(A) Je-li σ-konečná míra definována na σ-okruhu $\mathcal{G}$, je $X \in \mathcal{G}$ (čili $\mathcal{G}$ je již σ-algebra).

(B) Mnozí autoři definují σ-konečnost míry trochu jinak. O tom viz cvičení 13.W.

13.43 Věta. Nechť μ je σ-konečná míra na okruhu $\mathcal{U}$. Potom existuje právě jedna míra $\hat{\mu}$ na σ-okruhu $\sigma(\mathcal{U})$ (viz 13.5) tak, že $\mu = \hat{\mu}$ na $\mathcal{U}$. Míra $\hat{\mu}$ je σ-konečná.

27571 Z14

Důkaz. Poznamenejme především, že každé rozšíření $\hat{\mu}$ σ-konečné míry μ z $\mathcal{R}$ na $\sigma(\mathcal{R})$ je σ-konečné (a tedy vždy $X \in \sigma(\mathcal{R})$!).

Jsou-li totiž $A_n \in \mathcal{R}$ s vlastností $\mu A_n < +\infty$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$, je i též $\hat{\mu} A_n < +\infty$, $A_n \in \sigma(\mathcal{R})$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$.

I. <u>Existence.</u> Utvořme vnější míru μ^* pomocí pokrývacího systému $(\mathcal{R}, \mu)$. Podle Hopfovy věty je $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}(\mu^*)$. Jelikož systém $\mathcal{M}(\mu^*)$ je σ-algebra, je nutně $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}(\mu^*)$. Stačí nyní položit $\hat{\mu} A = \mu^* A$ pro $A \in \sigma(\mathcal{R})$. Funkce $\hat{\mu}$ má požadované vlastnosti.

II. <u>Jednoznačnost.</u> Nechť ν je konečná míra na $\sigma(\mathcal{R})$, $\nu = \mu$ na $\mathcal{R}$.

Zvolme $E \in \sigma(\mathcal{R})$. Jsou-li $E_n \in \mathcal{R}$, $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, je

$$\nu E \le \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \nu E_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n, \text{ tedy } \nu E \le \mu^* E .$$

Tudíž i $\nu(X-E) \le \mu^*(X-E)$. Ze vztahu

$$\mu X = \mu^* E + \mu^*(X-E) = \nu E + \nu(X-E) = \nu X$$

a konečnosti ν plyne $\nu E = \mu^* E$.

Je tedy míra ν na $\sigma(\mathcal{R})$ jednoznačně určena.

Buďte nyní μ_1, μ_2 σ-konečné, $A \in \mathcal{R}$, $\mu_1 A < +\infty$. Aplikujeme-li předchozí výsledek na systém $\{E \cap A;\ E \in \mathcal{R}\}$, obdržíme rovnost $\mu_1(E \cap A) = \mu_2(E \cap A)$ pro každou množinu $E \in \sigma(\mathcal{R})$. Buď konečně $A \in \sigma(\mathcal{R})$ libovolná. Najdeme posloupnost množin $A_n \in \mathcal{R}$ tak, aby $\mu_1 A_n < +\infty$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset A$. Můžeme předpokládat, že množiny A_n jsou po dvou disjunktní (proč?). Potom

$$\mu_1 A = \mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n \cap A) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n \cap A) = \mu_2 A .$$

Celý důkaz proveďte detailně !

13.44 <u>Poznámky.</u>

(A) Není-li míra μ σ-konečná na $\mathcal{R}$, nemusí být rozšíření jednoznačné.

<u>Příklad.</u> Nechť X je množina racionálních čísel intervalu $\langle 0,1 \rangle$ a $\mathcal{R}$ je okruh všech konečných sjednocení intervalů typu $\langle a,b) \subset X$ (ukažte, že $\mathcal{R}$ je okruh!). Potom $\sigma(\mathcal{R}) = \exp X$. Položme

$$\mu_1 E = \begin{cases} \text{počet prvků } E \text{ , je-li } E \text{ konečná,} \\ +\infty \text{ , je-li } E \text{ nekonečná,} \end{cases}$$

pro každou $E \subset X$, $\mu_2 = 2\mu_1$.

Dokažte, že μ_1 , μ_2 jsou (dokonce σ-konečné!) míry na $\sigma(\mathcal{R})$, $\mu_1 = \mu_2$ na $\mathcal{R}$, ale $\mu_1 \neq \mu_2$.

Jiný příklad. Volte $X = \langle 0,1)$, nechť $\mathcal{R}$ je okruh všech konečných sjednocení intervalů tvaru $\langle a,b) \subset \langle 0,1)$. Potom $\sigma(\mathcal{R})$ je systém všech borelovských podmnožin intervalu $\langle 0,1)$. Definujme $\mu\emptyset = 0$, $\mu A = +\infty$ pro $\emptyset \neq A \in \mathcal{R}$. Nalezněte na $\sigma(\mathcal{R})$ různá rozšíření μ !

(B) Další protipříklady naleznete ve cvičení 13.W.

(C) Nepředpokládejme, že míra μ je σ-konečná na $\mathcal{R}$. Nechť μ^* je vnější míra sestrojená z pokrývacího systému $(\mathcal{R}, \mu)$. Nechť $\hat{\mu}$ je libovolné rozšíření míry μ z $\mathcal{R}$ na $\sigma(\mathcal{R})$.

Potom $\hat{\mu} B \leq \mu^* B$ pro každou množinu $B \in \sigma(\mathcal{R})$.

Tedy μ^* je "největší" mezi všemi mírami, které rozšiřují μ . Dokažte!

Návod. Nechť $\mathcal{R}_\sigma$ znamená systém všech spočetných sjednocení množin z $\mathcal{R}$ (musí být $\mathcal{R}_\sigma = \sigma(\mathcal{R})$?).
Ukažte, že $\hat{\mu} A = \mu^* A$ pro $A \in \mathcal{R}_\sigma$. Tedy pro $B \in \sigma(\mathcal{R})$ je (použijte 13.28)

$$\mu^* B = \inf\{\mu^* A;\ A \supset B\ ,\ A \in \mathcal{R}_\sigma\} = \inf\{\hat{\mu} A\ ;\ A \supset B,\ A \in \mathcal{R}_\sigma\} \geq \geq \hat{\mu}\, B .$$

(D) Rozšířená míra $\hat{\mu}$ nemusí být na $\sigma(\mathcal{R})$ úplná. Jako příklad stačí volit $\mathcal{R} = \sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{B}_1$ systém všech borelovských podmnožin E_1 a Lebesgueovu míru.

V dalším ukážeme, jak obecně z neúplné míry můžeme zkonstruovat míru úplnou.

$\boxed{13.45}$ Věta (zúplnění míry). Nechť μ je míra na σ-okruhu $\mathcal{S}$.

Nechť $\mathcal{N} = \{N;\ N \subset F \in \mathcal{S}\ ;\ \mu F = 0\}$,

$$\overline{\mathcal{S}} = \{E \cup N;\ E \in \mathcal{S}\ ,\ N \in \mathcal{N}\} .$$

Potom platí:

je-li $E_1 \cup N_1 = E_2 \cup N_2$ ($E_1, E_2 \in \mathcal{S}$, $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$)

je $\mu E_1 = \mu E_2$.

Definujme funkci $\overline{\mu}$ na $\overline{\mathcal{S}}$ předpisem

$$\overline{\mu}(E \cup N) = \mu E\ ,\ \text{je-li } E \in \mathcal{S}\ ,\ N \in \mathcal{N}$$

(podle předcházejícího nezávisí definice $\overline{\mu}$ na volbě množin E , N).

Konečně platí následující:

(i) $\mathcal{S} \subset \overline{\mathcal{S}}$, $\overline{\mathcal{S}}$ je σ-okruh ,

(ii) $\overline{\mu} = \mu$ na $\mathcal{S}$,

(iii) $\overline{\mu}$ je úplná míra na $\overline{\mathcal{S}}$.

Důkaz. Buďte $E_1, E_2 \in \mathcal{S}$, $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$, $E_1 \cup N_1 = E_2 \cup N_2$.
Existují množiny $F_1, F_2 \in \mathcal{S}$, $N_1 \subset F_1$, $N_2 \subset F_2$, $\mu F_1 = \mu F_2 = 0$.
Ze vztahu $E_1 - E_2 \subset N_2 \subset F_2$ plyne, že $\mu(E_1 - E_2) = 0$. Potom
$\mu E_1 = \mu((E_1 \cap E_2) \cup (E_1 - E_2)) = \mu(E_1 \cap E_2) + \mu(E_1 - E_2) =$
$= \mu(E_1 \cap E_2)$. Obdobně se dokáže, že $\mu E_2 = \mu(E_1 \cap E_2)$.

Dokazujme nyní další body.

(i) Inkluse $\mathcal{S} \subset \overline{\mathcal{S}}$ je zřejmá ($A = A \cup \emptyset$) .
Dokážeme, že $\overline{\mathcal{S}}$ je σ-okruh. Buďte $E_n \cup N_n \in \overline{\mathcal{S}}$ ($E_n \in \mathcal{S}$, $N_n \in \mathcal{N}$).

Potom $\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cup N_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \in \overline{\mathcal{S}}$, neboť $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{S}$,
$\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathcal{N}$. Jsou-li nyní $E \in \mathcal{S}$, $N \in \mathcal{N}$ ($N \subset F \subset \mathcal{S}$, $\mu F = 0$), potom
$E - N = (E - F) \cup (E \cap (F - N)) \in \overline{\mathcal{S}}$ (neboť $E - F \in \mathcal{S}$,
$E \cap (F - N) \subset F$).
Jsou-li konečně E_1, $E_2 \in \mathcal{S}$, $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$, je

$(E_1 \cup N_1) - (E_2 \cup N_2) = \left[(E_1 - E_2) - N_2\right] \cup \left[(N_1 - N_2) - E_2\right] \in \overline{\mathcal{S}}$

podle předchozího.

(ii) Je-li $E \in \mathcal{S}$, je (kupříkladu)

$$\overline{\mu} E = \overline{\mu}(E \cup \emptyset) = \mu E.$$

(iii) Buď $A \in \overline{\mathcal{S}}$, $\overline{\mu} A = 0$, $B \subset A$. Nechť $A = E \cup N$, $E \in \mathcal{S}$,
$N \subset F \in \mathcal{S}$, $\mu F = 0$; zřejmě $\mu E = 0$. Potom můžeme psát
$B = \emptyset \cup (A \cap B)$, přičemž $A \cap B \subset A = E \cup N \subset E \cup F$.
Tedy $B \in \overline{\mathcal{S}}$.

13.46 Problém. Nechť μ je σ-konečná míra na okruhu $\mathcal{R}$. Z ní můžeme zkonstruovat dvě rozšířené úplné míry:

(I) μ lze jednoznačně rozšířit na $\sigma(\mathcal{R})$ (podle 13.43) a tuto míru lze zúplnit (podle 13.45),

(II) z $(\mathcal{R}, \mu)$ lze vytvořit vnější míru μ^* a podle Caratheodoryho lze vybudovat systém $\mathcal{M}(\mu^*)$.

Schematicky:

(I) $\boxed{\mu \text{ na } \mathcal{R}} \xrightarrow{\text{rozšíření}} \boxed{\hat{\mu} \text{ na } \sigma(\mathcal{R})} \xrightarrow{\text{zúplnění}} \boxed{\bar{\mu} \text{ na } \overline{\sigma(\mathcal{R})}}$

(II) $\boxed{\mu \text{ na } \mathcal{R}} \xrightarrow{\text{konstrukce}} \boxed{\mu^*} \xrightarrow{\text{vytvoření}} \boxed{\mathcal{M}(\mu^*)}$

Přitom víme, že

(I) $\mathcal{R} \subset \overline{\sigma(\mathcal{R})}$, $\overline{\sigma(\mathcal{R})}$ je σ-algebra, $\mu = \bar{\mu}$ na $\mathcal{R}$,
$\bar{\mu}$ je úplná míra na $\overline{\sigma(\mathcal{R})}$,

(II) $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}(\mu^*)$, $\mathcal{M}(\mu^*)$ je σ-algebra, $\mu = \mu^*$ na $\mathcal{R}$,
μ^* je úplná míra na $\mathcal{M}(\mu^*)$.

Vztah systémů $\overline{\sigma(\mathcal{R})}$ a $\mathcal{M}(\mu^*)$, jako i měr $\bar{\mu}$ a μ^* podává následující věta.

$\boxed{13.47}$ **Věta** (porovnání obou metod).

Buď μ σ-konečná míra na okruhu $\mathcal{R}$. Potom
(i) $\overline{\sigma(\mathcal{R})} = \mathcal{M}(\mu^*)$
(ii) $\bar{\mu} = \mu^*$ na $\mathcal{M}(\mu^*)$.

Důkaz. Zřejmě $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}(\mu^*)$ a $\mu = \mu^*$ na $\sigma(\mathcal{R})$.
Z konstrukce úplné míry vyplývá dále, že $\overline{\sigma(\mathcal{R})} \subset \mathcal{M}(\mu^*)$ a $\bar{\mu} = \mu^*$ na $\overline{\sigma(\mathcal{R})}$. Stačí pouze dokázat, že $\mathcal{M}(\mu^*) \subset \overline{\sigma(\mathcal{R})}$.
Ukážeme, že

$$A \in \mathcal{M}(\mu^*),\ \mu^* A < +\infty \Longrightarrow A \in \mathcal{T}(\mathcal{R})$$

(víme, že μ^* je σ-konečná - viz začátek důkazu věty 13.43 !).
Nalezněme množinu $G \in \sigma(\mathcal{R})$ tak, aby $G \supset A$, $\mu^* G = \mu^* A$ (uvědomte si, že $\mu^* A = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu F_n ;\ \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \supset A,\ F_n \in \mathcal{R} \right\}$).
Zřejmě $\mu^*(G - A) = 0$. Tudíž $G - A \in \mathcal{M}(\mu^*)$ a opět nalezneme množinu $H \in \sigma(\mathcal{R})$ tak, aby $H \supset G - A$, $\mu^* H = \mu^*(G - A) = 0$.
Potom

$$A = (G - H) \cup (A \cap H),$$

kde $G - H \in \sigma(\mathcal{R})$, $A \cap H \subset H$, $\mu^* H = \mu H = P$, což podle konstrukce $\bar{\mu}$ neznamená nic jiného, než že $A \in \overline{\sigma(\mathcal{R})}$.

G. CVIČENÍ A PROBLÉMY

13.A Množinové systémy.

Zjišťujte, jaké množinové systémy tvoří $\mathcal{S}$, jestliže:

(a) $\mathcal{S}$ $\equiv$ konečné podmnožiny množiny X (X konečná, spočetná či nespočetná),

(b) $\mathcal{S} \equiv \{ \emptyset \}$ (X libovolná),

(c) $\mathcal{S} \equiv \{ X_1, \dots, X_n \}$, kde tyto množiny jsou neprázdné, po dvou disjunktní a $\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X$,

(d) $\mathcal{S}$ $\equiv$ řídké množiny v metrickém prostoru (X , ρ) ,

(e) $\mathcal{S}$ $\equiv$ množiny 1.kategorie v metrickém prostoru,

(f) $\mathcal{S}$ $\equiv$ otevřené množiny v metrickém prostoru (kdy bude $\mathcal{S}$ okruh?),

(g) $\mathcal{S}$ $\equiv$ množiny, které jsou současně otevřené i uzavřené v metrickém prostoru.

Zkoumejte, jak v těchto příkladech vypadají generované systémy $\sigma(\mathcal{S})$ a $\sigma_A(\mathcal{S})$ a okruh, generovaný $\mathcal{S}$.

13.B Borelovské množiny.

Nechť (P , ρ) je metrický prostor. Definujme borelovské množiny jako σ-okruh, generovaný systémem všech otevřených množin a označme jej $\mathcal{B}(P)$. Ukažte, že obecně systém $\mathcal{B}(P)$ může být různý od σ-okruhu generovaného systémem všech kompaktních množin (porovnej s 13.8.a).

Návod. Uvažujte nespočetný diskrétní metrický prostor.

Udejte vztah těchto systémů a pokuste se nalézt nějaké nutné či postačující podmínky pro jejich rovnost.

13.C Cvičení.

(a) Buď $\mathcal{F}$ třída podmnožin množiny X , $\mathcal{S}$ okruh generovaný systémem $\mathcal{F}$. Potom platí:

$$A \in \mathcal{S} \Longrightarrow \text{existují } F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F} \text{ tak, že } A \subset \bigcup_{i=1}^{n} F_i ,$$

dokažte!

Návod. Uvažujte systém $\mathcal{G} = \{ A \subset X;$ existují $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ s vlastností $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} F_i \}$. Ukažte, že $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ a že $\mathcal{G}$ je okruh.

(b) Buď opět $\mathcal{F}$ třída podmnožin množiny X . Dokažte, že

$$A \in \sigma(\mathcal{F}) \Longrightarrow \text{existují } F_n \in \mathcal{F} \text{ tak, že } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n .$$

(c) Buď $\mathcal{S}$ σ-okruh v X, $E \subset X$. Potom systém

$$\mathcal{S}_E = \{ E \cap A ;\ A \in \mathcal{S} \}$$

je σ-okruh. Dokažte! Lze něco říci o vztahu systémů $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_E$?

(d) Buď $\mathcal{S}$ σ-okruh v X, $E \subset X$. Potom systém

$$\widehat{\mathcal{S}} = \{ A \subset X;\ E \cap A \in \mathcal{S} \}$$

je σ-okruh. Dokažte! Opět se pokuste nalézt vztah $\mathcal{S}$ a $\widehat{\mathcal{S}}$, porovnejte též s (c) !

(e) Buď $\mathcal{B}$ okruh v X. Položme

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \{ B \subset X;\ A \cap B \in \mathcal{B} \ \text{pro každou}\ A \in \mathcal{B} \}.$$

Dokažte, že

(1) $\widetilde{\mathcal{B}}$ je algebra, $\mathcal{B} \subset \widetilde{\mathcal{B}}$

(2) je-li $\mathcal{B}$ algebra, potom $\mathcal{B} = \widetilde{\mathcal{B}}$,

(3) je-li $\mathcal{B}$ σ-okruh, je $\widetilde{\mathcal{B}}$ σ-algebra

(4) $\sigma(\widetilde{\mathcal{B}}) \subset \widetilde{\sigma(\mathcal{B})}$,

(5) rovnost ve (4) nemusí nastat; kdy nastane?

(f) Buď $\mathcal{B}$ okruh splňující podmínku:

$$A_n \in \mathcal{B} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}.$$

Je $\mathcal{B}$ již σ-okruh?

(g) Buď $\mathcal{B}$ okruh, $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ systém množin s vlastností:

$$A_n \in \mathcal{M} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}.$$

Potom $\sigma(\mathcal{B}) \subset \mathcal{M}$, ukažte ! Platí toto tvrzení i v případě, kdy systém $\mathcal{M}$ je uzavřen za tvoření monotonních spočetných sjednocení a průniků?

$\boxed{\text{13.D}}$ **Cvičení.** Zkoumejte nezávislost jednotlivých axiomů míry a vnější míry!

$\boxed{\text{13.E}}$ **Příklady měr.**

(a) Projděte si ještě jednou příklady z 13.12.

(b) Buď $\mathcal{S}$ σ-okruh. Pro $A \in \mathcal{S}$ položte

$$\mu A = \begin{cases} \text{počet prvků množiny } A, & \text{je-li konečná,} \\ +\infty, & \text{je-li } A \text{ nekonečná} \end{cases}$$

a rozhodněte, zda μ je míra na $\mathcal{S}$.

(c) Je-li $f \in \mathcal{L}^*$, $f \geq 0$, potom funkce μ definovaná

$$\mu M = A_M f$$

pro $M \in \mathfrak{M}$ je míra na $\mathfrak{M}$.

(d) Je-li opět $f \in \mathcal{L}^* (\mu)$, $f \geq 0$ (viz 18.13), potom funkce ν definovaná vztahem

$$\nu E = \int_E f \, d\mu$$

je míra na $\mathcal{J}$.

13.F Příklady vnější míry.

Zkoumejte, zda následující funkce jsou vnější míry. Určete též vždy (jako v 13.27), jak vypadá systém $\mathfrak{M}(\mu^*)$ všech μ^*-měřitelných množin.

(a) Příklady z 13.16.

(b) X libovolná množina,

$$\mu^* A = \begin{cases} \text{počet prvků množiny } A \text{, je-li } A \subset X \text{ konečná,} \\ + \infty \text{, je-li } A \text{ nekonečná,} \end{cases}$$

(c) $\mu^* \emptyset = 0$, $\mu^* X = 2$, $\mu^* A = 1$ pro $\emptyset \neq A \neq X$,

(d) X je úplný metrický prostor,

$$\mu^* A = \begin{cases} 0, \text{ je-li } A \subset X \text{ 1.kategorie,} \\ 1, \text{ je-li } A \subset X \text{ 2.kategorie,} \end{cases}$$

(e) X je množina přirozených čísel,

$$\mu^* A = \begin{cases} \frac{n}{n+1} \text{, obsahuje-li množina } A \text{ právě } n \text{ prvků,} \\ 1, \text{ je-li } A \text{ nekonečná,} \end{cases}$$

(f) $X = E_1$, $x_n = \frac{1}{n}$ $(n \in N)$,

$$\mu^* A = \begin{cases} \text{počet prvků množiny } A \cap \{x_n\} \text{, je-li tato konečná,} \\ + \infty \text{, je-li množina } A \cap \{x_n\} \text{ nekonečná.} \end{cases}$$

13.G Cvičení.

(a) Zkoumejte, které z vnějších měr v 13.F jsou regulární.

(b) Zkoumejte, které z vnějších měr v 13.F jsou metrické (viz 14.11); v případě, že X není metrický prostor,

(1) volte na X diskrétní metriku,

(2) volte $X = E_1$.

13.H Cvičení. Je-li vnější míra konečně aditivní, je již σ-aditivní (viz 13.11.c). Dokažte !

Návod. Zřejmě $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \mu^* A_n$.

$\boxed{13.I}$ Cvičení. Buď (P, ρ) metrický prostor s diskrétní metrikou ρ , λ^* metrická vnější míra na (P, ρ) (viz 14.11). Ukažte, že je λ^* σ-aditivní, čili λ^* je pak již míra.

Návod. Ukažte, že λ^* je konečně aditivní a použijte 13.H.

$\boxed{13.J}$ Cvičení. Předpokládejme, že μ^* je nezáporná množinová funkce na exp X (tj. splňuje axiomy VM_1 a VM_2 z 13.16). Definujte systém $\mathcal{M}(\mu^*)$ stejně jako v 13.22.

Dokažte, že

(a) systém $\mathcal{M}(\mu^*)$ může být prázdný, tj. žádná množina nemusí být μ^*-měřitelná,

(b) je-li $\mathcal{M}(\mu^*) \neq \emptyset$, potom $\mu^* \emptyset = +\infty$ (a tedy také $\mu^* M = +\infty$ pro každou M) anebo $\mu^* \emptyset = 0$,

(c) jestliže navíc předpokládáme $\mu^* \emptyset = 0$ (axiom VM_3), potom již systém $\mathcal{M}(\mu^*)$ tvoří algebru (což je na první pohled překvapující výsledek, ale uvědomte si, že $\mathcal{M}(\mu^*)$ může také obsahovat pouze $\emptyset$ a X) a funkce μ^* je na $\mathcal{M}(\mu^*)$ aditivní.

$\boxed{13.K}$ Cvičení. Nechť μ^* je vnější míra na X . Pro $H \subset X$, $A \subset H$ položme $\mu^*_H(A) = \mu^* A$ (tj. $\mu^*_H = \mu^*/\exp H$).

(a) Je-li $H \in \mathcal{M}(\mu^*)$, potom μ^*_H je vnější míra na H a

$$\mathcal{M}(\mu^*_H) = \left\{ A \,;\, A \in \mathcal{M}(\mu^*) \,,\, A \subset H \right\} .$$

(b) Není-li $H \in \mathcal{M}(\mu^*)$, potom funkce μ^*_H je stále vnější míra na H, platí implikace

$$A \subset H \,,\, A \in \mathcal{M}(\mu^*) \Longrightarrow A \in \mathcal{M}(\mu^*_H) ,$$

ale existují μ^*_H-měřitelné množiny, které nejsou μ^*-měřitelné.

(c) Je-li μ^* regulární, je i μ^*_H regulární.

(d) Nalezněte příklad, kdy μ^* je neregulární a μ^*_H regulární.

$\boxed{13.L}$ Cvičení. Buď μ konečně aditivní míra na σ-okruhu $\mathcal{S}$, splňující podmínku:

$$A_n \in \mathcal{S} \,,\, A_1 \subset A_2 \subset \dots \,,\, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Longrightarrow \mu A = \lim A_n .$$

Potom μ je již (σ-aditivní) míra. Dokažte !

$\boxed{13.M}$ Cvičení.

(a) Buď μ^* regulární vnější míra. Potom je splněna podmínka:

$$(*) \quad A_1 \subset A_2 \subset \dots, \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Longrightarrow \mu^* A = \lim \mu^* A_n .$$

Dokažte !

Návod. Ke každé množině A_n nalezněte $M_n \in \mathfrak{M}(\mu^*)$, $M_n \supset A_n$ s vlastností $\mu^* M_n = \mu^* A_n$.

(b) Ukažte, že předpoklad regularity je podstatný.

Návod. Volte $X = N$ v 13.F.c.

(c) Ukažte, že existují neregulární vnější míry splňující podmínku (*) .

Návod. Použijte 13.F.e.

(d) Ukažte, že pro klesající posloupnosti množin analogická podmínka k (*) nemusí platit.

Návod. Volte $X = N$, $\mu^* \emptyset = 0$, $\mu^* E = 1$ pro $E \neq \emptyset$.

13.N Cvičení.

(a) Nechť μ^* je regulární vnější míra na X , nechť $\mu^* X < +\infty$. Potom

$$A \in \mathfrak{M}(\mu^*) \Longleftrightarrow \mu^* X = \mu^* A + \mu^*(X - A).$$

Dokažte!

Poznámka. Číslo $\mu^* X - \mu^*(X - A)$ se obvykle nazývá vnitřní mírou množiny A . Interpretujte v těchto termínech (a)!

Návod. Jedna implikace je zřejmá. Nechť nyní $\mu^* X = \mu^* A + \mu^*(X - A)$. Zvolme $T \subset X$, $\mu^* T < +\infty$. Nalezněte $B \in \mathfrak{M}(\mu^*)$, $B \supset T$, $\mu^* B = \mu^* T$. Potom

$$\mu^* A = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A - B) ,$$

$$\mu^*(X - A) = \mu^*(B - A) + \mu^*(X-(A \cup B)) ,$$

tedy po menších úpravách

$$\mu^*(T \cap A) + \mu^*(T - A) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B - A) \leq \mu^* B = \mu^* T .$$

(b) Na příkladě 13.F.c ukažte, že předpoklad regularity nelze vynechat,

(c) Buď μ^* regulární vnější míra, $A \subset X$. Nechť existuje množina $H \in \mathfrak{M}(\mu^*)$ s vlastnostmi:

$$H \supset A, \quad \mu^* H < +\infty , \quad \mu^* H = \mu^* A + \mu^*(H - A).$$

Potom $A \in \mathfrak{M}(\mu^*)$, ukažte !

Poznámka. Uvědomte si, že pro zjištění μ^*-měřitelnosti množiny A stačí ověřit známou rovnost pro jednu μ^*-měřitelnou množinu H a nemusíme ji ověřovat pro každou testovací množinu !

13.O* Cvičení. Buď μ^* regulární vnější míra, nechť $\mu^* X = 1$.

Položme $\mu_* A = 1 - \mu^*(X - A)$ (viz poznámku v 13.N.a),

$\nu^* = \frac{1}{2}(\mu_* + \mu^*)$.

Ukažte, že

(a) ν^* je vnější míra,

(b) vynecháme-li předpoklad regularity μ^*, nemusí být ν^* vnější míra,

(c) je-li navíc ν^* regulární, je $\mathfrak{M}(\nu^*) = \exp X$,

(d) je-li μ^* vnější Lebesgueova míra v E_1, není množina M z důkazu 14.17 ν^*-měřitelná, a tedy vnější míra ν^* není regulární,

(e) je-li μ^* navíc metrická, je i ν^* metrická.

13.P Cvičení. Buď X nespočetná množina, za $\mathcal{S}$ vezměme systém všech spočetných podmnožin množiny X a systém všech množin, majících v X spočetný doplněk. Pro $A \in \mathcal{S}$ položme

$$\mu A = \begin{cases} \text{počet prvků množiny } A, & \text{je-li } A \text{ konečná,} \\ +\infty, & \text{je-li } A \text{ nekonečná.} \end{cases}$$

Ukažte, že

(a) systém $\mathcal{S}$ tvoří σ-algebru,

(b) μ je úplná míra na $\mathcal{S}$,

(c) míra μ není σ-konečná,

(d) pro míru μ na $\mathcal{S}$ neplatí tvrzení věty 13.47,

(e) neexistuje vnější míra μ^* na X tak, aby

$$\mathcal{S} = \mathfrak{M}(\mu^*), \quad \mu = \mu^* \text{ na } \mathcal{S},$$

tj. míra μ se nedá vytvořit z žádné vnější míry Caratheodoryho metodou.

Návod (e). Předpokládejte, že μ^* existuje. Potom ovšem nutně má tvar vnější míry z 13.F.b, takže $\mathfrak{M}(\mu^*) = \exp X$.

Poznámka. Víme již, že míra μ^* je na systému $\mathfrak{M}(\mu^*)$ úplná míra. V této souvislosti se naskýtala otázka, zda každá úplná míra na σ-algebře se dá tímto způsobem vytvořit. Příklad ukazuje, že odpověď je negativní.

13.Q Pokrývací systémy.

(a) Zopakujte si příklady 13.30, 13.31.

Určete vnější míru λ^* z pokrývacího systému $(\mathcal{U}, \lambda)$, zkoumejte $\mathfrak{M}(\lambda^*)$ a vyšetřete, zda λ^* je regulární či metrická, jestliže:

(b) $\mathcal{U} = \{\emptyset, X, \text{ jednobodové množiny}\}$,

$$\lambda\emptyset = 0, \quad \lambda\{a\} = 1 \text{ pro } a \in X, \quad \lambda X = +\infty,$$

(c) $\mathcal{U} = \{\emptyset, X\}$, $\lambda\emptyset = 0$, $\lambda X = 1$,

(d) $\mathcal{U} \equiv \{\emptyset, X$, jednobodové množiny$\}$, X nespočetná,

$\lambda\emptyset = \lambda\{a\} = 0$, $\lambda X = 1$,

(e) $\mathcal{U} \equiv \{A;\ A$ je spočetná anebo $X - A$ je spočetná$\}$, X nespočetná,

$$\lambda A = \begin{cases} \text{počet prvků } A \text{, je-li } A \text{ konečná,} \\ +\infty \text{, je-li } A \text{ nekonečná,} \end{cases}$$

(f) $\mathcal{U} \equiv$ systém všech vlastních podmnožin množiny X ,

$\lambda\emptyset = 0$, $\lambda A = 1$, pro $\emptyset \neq A \neq X$,

(g)* $X = E_2$, $\mathcal{U} \equiv$ prázdná množina a systém všech "otevřených intervalů", ležících vždy na přímkách rovnoběžných s osou x , λG je pak rovno délce tohoto intervalu,

(h)* $X = E_2$, $\mathcal{U} \equiv$ prázdná množina, všechny jednobodové množiny, každý "otevřený interval" ležící na přímce rovnoběžné buď s osou x či osou y, λG položme rovno "jednorozměrné Lebesgueově míře" množiny G.

Zkoumejte dále v těchto příkladech, zda

(i) $\lambda = \lambda^*$ na $\mathcal{U}$,

(ii) $\mathcal{U} \subset \mathfrak{M}(\lambda^*)$.

$\boxed{13.R}$ Cvičení. Buďte $(\mathcal{U}, \lambda_1)$, $(\mathcal{U}, \lambda_2)$ dva pokrývací systémy, λ_1^* , λ_2^* příslušné vnější míry. Je-li $\lambda_1^* = \lambda_2^*$ na $\mathcal{U}$, je $\lambda_1^* = \lambda_2^*$ všude. Dokažte!

Návod. Buď $A \subset X$; chceme dokázat, že $\lambda_2^* A \leq \lambda_1^* A$. Předpokládejte tedy $\lambda_1^* A < +\infty$, zvolte $\varepsilon > 0$ a nalezněte $E_n \in \mathcal{U}$ tak, aby

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset A\ , \qquad \lambda_1^* A + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1 E_n\ .$$

Potom

$$\lambda_1^* A + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1 E_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1^* E_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_2^* E_n \geq \lambda_2^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \geq \lambda_2^* A\ .$$

$\boxed{13.S}$ Cvičení. Buď $(\mathcal{U}, \lambda)$ pokrývací systém, λ^* příslušná vnější míra. Je-li $\mathcal{U} \subset \mathfrak{M}(\lambda^*)$, je vnější míra λ^* regulární. Dokažte !

Návod. Použijte 13.38.C.

$\boxed{13.T}$ Cvičení. Buď $(\mathcal{U}, \lambda)$ pokrývací systém na množině X . Potom $\lambda^* G = \lambda G$ pro každou množinu $G \in \mathcal{U}$ (viz problém (i) v 13.31), právě když funkce λ splňuje podmínku

$$\text{"}G, G_n \in \mathcal{U}\ , \quad G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \Longrightarrow \lambda G \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda G_n \text{"}\ .$$

Dokažte!

Návod. Platí-li $\lambda G = \lambda^* G$, vyplývá uvedená podmínka z faktu, že λ^* je vnější míra (viz 13.29) a že vnější míra tuto podmínku splňuje (axiom VM_4). Je-li naopak splněna podmínka, kopírujte (i) v důkazu věty 13.32.

13.U **Cvičení.** Zopakujte si větu 13.45 o zúplnění míry. Ukážeme, že tam sestrojené zúplnění míry $\bar{\mu}$ je v jistém smyslu minimální. Přesněji, je-li μ_1 úplná míra na σ-okruhu $\mathcal{S}_1$ taková, že $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_1$ a $\mu = \mu_1$ na $\mathcal{S}$, potom $\bar{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}_1$ a $\bar{\mu} = \mu_1$ na $\bar{\mathcal{S}}$.

Návod důkazu.

Buď $F \in \mathcal{S}$, $\mu F = 0$, $N \subset F$. Potom $\mu_1 F = 0$, $N \in \mathcal{S}_1$ a $\mu_1 N = 0$ (úplnost míry μ_1 !). Takže $\bar{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}_1$ a pro $E \in \mathcal{S}$ je

$$\mu_1 E \leq \mu_1(E \cup N) \leq \mu_1 E + \mu_1 N = \mu_1 E ,$$

odkud

$$\mu_1(E \cup N) = \mu_1 E = \mu E = \bar{\mu}(E \cup N).$$

13.V **Cvičení.** Ukažte, že neexistuje úplná míra μ na σ-okruhu $\mathcal{S}$ v E_1 taková, že

$$\mu = \lambda_1 \text{ na } \mathcal{B}_1 , \quad \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{S} \subsetneqq \mathcal{M}_1$$

(λ_1 = Leb. míra, $\mathcal{B}_1$ = borelovské množiny, $\mathcal{M}_1$ = leb. měřitelné množiny).

Jinými slovy, Lebesgueova míra na $\mathcal{M}_1$ je minimální zúplnění Lebesgueovy míry na $\mathcal{B}_1$. Dokažte !

Návod. Použijte předchozí cvičení a 14.11.(VI) (či 10.24.vi).

13.W **Cvičení.**

(a) Buď μ σ-konečná míra na σ-okruhu $\mathcal{S}$, μ^* vnější míra vytvořená z pokrývacího systému $(\mathcal{S}, \mu)$. Buď ν míra na $\mathcal{M}(\mu^*)$ taková, že $\mu = \nu$ na $\mathcal{S}$. Potom $\nu = \mu^*$ na $\mathcal{M}(\mu^*)$. Dokažte !

(b) Zůstane v platnosti tvrzení (a), požadujeme-li pouze, aby μ byla σ-konečná míra na okruhu ?

(c) Nechť μ je míra na σ-okruhu (resp. okruhu) $\mathcal{S}$. Mnozí autoři definují σ-konečnost míry μ podmínkou:

"ke každé množině $A \in \mathcal{S}$ lze najít posloupnost $A_n \in \mathcal{S}$ tak, že

$$\mu A_n < +\infty , \quad A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ ".}$$

Porovnejte s naší definicí σ-konečnosti v 13.41 a rozvažte, které z vět (hlavně 13.43, 13.47) zůstanou v platnosti i při této definici.

(d) Buď μ konečně-aditivní míra na okruhu $\mathcal{U}$. Vytvořme μ^* z pokrývacího systému $(\mathcal{U}, \mu)$. Platí potom tvrzení, že $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}(\mu^*)$, $\mu = \mu^*$ na $\mathcal{U}$?

(e) Pečlivě promyslete příklady v 13.44.A !

(f) Buď $\mathcal{S}$ σ-okruh, μ , ν míry na $\mathcal{S}$. Nechť $\mu = \nu$ na $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$. Je poté pravda, že $\mu = \nu$ na $\mathcal{S}$?
Předpokládejte navíc, že μ , ν jsou konečné a porovnejte s větou 13.43, kde jsme předpokládali, že systém $\mathcal{U}$ je okruh.

13.X Tvoření nových měr.

(a) Buď μ míra na okruhu $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X , buď $B \subset X$. Nechť μ^* je vnější míra vytvořená z pokrývacího systému ($\mathcal{S}$, μ) . Pro $E \in \mathcal{S}$ dále položme

$$\nu E = \mu^*(B \cap E) .$$

Dokažte, že ν je míra na $\mathcal{S}$.

(b) Buďte $\mathcal{R}$ a $\mathcal{S}$ okruhy podmnožin množiny X . Předpokládejme navíc, že $\mathcal{R}$ je ideál v $\mathcal{S}$ (tj. $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ a platí: $E \in \mathcal{S}$, $A \in \mathcal{R} \Longrightarrow E \cap A \in \mathcal{R}$) a nechť μ je míra na $\mathcal{R}$.
Pro $E \in \mathcal{S}$ položte

$$\nu E = \sup \left\{ \mu A ; A \subset E , A \in \mathcal{R} \right\}$$

a ukažte, že

(1) ν je míra na $\mathcal{S}$,

(2) $\nu = \mu$ na $\mathcal{R}$

(rozšíření míry z ideálu na celý okruh).

(c) Je míra ν z (b) již podmínkami (1),(2) jednoznačně určena ?

(d)* Nechť μ je míra na σ-okruhu $\mathcal{S}$. Nechť $\tilde{\mathcal{S}}$ je σ-algebra vytvořená jako v 13.C.e . Pro $E \in \mathcal{S}$, $A \in \tilde{\mathcal{S}}$ položme

$$\mu^E(A) = \mu(E \cap A).$$

Ukažte, že μ^E je míra na $\tilde{\mathcal{S}}$.
Dále pro každé $A \in \tilde{\mathcal{S}}$ položte

$$\tilde{\mu} A = \sup \left\{ \mu^E(A) ; E \in \mathcal{S} \right\}$$

a ukažte, že

(1) $\tilde{\mu}$ je míra na $\tilde{\mathcal{S}}$,

(2) $\mu = \tilde{\mu}$ na $\mathcal{S}$

(rozšíření míry ze σ-okruhu na σ-algebru).

(e) Zůstane tvrzení (d) v platnosti, nahradíme-li σ-okruh pouze okruhem? Je míra $\tilde{\mu}$ na $\tilde{\mathcal{S}}$ podmínkami (1),(2) jednoznačně určena ?

(f)* Nechť μ je míra na σ-okruhu $\mathcal{S}$. Pro $A \in \mathcal{S}$ položte

$$\mu_c(A) = \sup \left\{ \mu F ; F \subset A , \mu F < +\infty \right\}$$

a zkoumejte, zda funkce μ_c je míra na $\mathcal{S}$. Řekneme, že míra μ na $\mathcal{S}$ je **semi-konečná**, jestliže $\mu = \mu_c$.

Ukažte, že

(1) každá σ-konečná míra je semi-konečná (viz 13.W.c),

(2) ne každá semi-konečná míra je σ-konečná,

(3) je-li míra μ v (d) semi-konečná, je semi-konečná i míra $\tilde{\mu}$.

(g) V tomto odstavci (a dále) budeme řešit problém:

" μ_n jsou míry na σ-okruhu $\mathcal{S}$, $\mu_n \to \mu$ (ve smyslu: pro každé $A \in \mathcal{S}$ je $\mu_n A \to \mu A$) $\overset{?}{\Longrightarrow} \mu$ je míra na $\mathcal{S}$ ".

Buď $\{u_n\}$ posloupnost reálných čísel, $0 \leq u_n \leq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < +\infty$. Definujme

$$u_{n,k} = \begin{cases} u_k & \text{pro } k \leq n, \\ 1 & \text{pro } k > n. \end{cases}$$

Nechť X je množina přirozených čísel; pro $A \subset X$, $n \in N$ položme

$$\mu_n A = \sum_{k \in A} u_{n,k} .$$

Ukažte, že μ_n je míra na exp X a $\lim \mu_n$ není dokonce ani vnější míra. Povšimněte si, že posloupnost $\{\mu_n\}$ konverguje monotonně.

(h) Nechť $\{\mu_n\}$ je posloupnost měr na σ-okruhu $\mathcal{S}$, nechť $\mu_n \nearrow \mu$. Potom μ je míra na $\mathcal{S}$. Dokažte !

<u>Návod.</u> Můžete použít 13.H.

(i) Buďte μ_n^* vnější míry na X, nechť $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných čísel. Položíte-li $\mu^* = \sum_n a_n \mu_n^*$, je μ^* vnější míra. Dokažte !

(j) Buďte μ_1^*, μ_2^* konečné vnější míry na X. Potom

$$\mathfrak{M}(\mu_1^* + \mu_2^*) = \mathfrak{M}(\mu_1^*) \cap \mathfrak{M}(\mu_2^*) .$$

Dokažte ! Co lze říci, nejsou-li μ_1^*, μ_2^* konečné ?

(k) Buďte μ_1^*, μ_2^* regulární vnější míry. Je i vnější míra $\mu_1^* + \mu_2^*$ regulární ?

<u>Návod.</u> Vezměte za μ_1^* libovolnou konečnou regulární vnější míru, nabývající více než dvou hodnot a $\mu_2^* \emptyset = 0$, $\mu_2^* A = 1$ pro $A \neq \emptyset$.

13.Y Horní integrál.

Stejně jako jsme vybudovali teorii míry, vnější míry, jako jsme řešili otázky rozšiřování a vytváření měr, stejně tak můžeme budovat teorii integrálu. Podáme zde pouze náznak teorie a uvedeme řadu problémů a námětů.

(a) Nechť X je libovolná množina a nechť N je zobrazení množiny všech nezáporných funkcí na X do $\langle 0, +\infty \rangle$. Řekneme, že N je <u>horní integrál</u> na X, jestliže splňuje:

(H_1) : $N(f_o) = 0$, kde $f_o = 0$ na X ,

(H_2) : $f \geq 0$, $c \geq 0 \Longrightarrow N(cf) = cNf$,

(H_3) : $g_n \geq 0$, $0 \leq f \leq \sum_{n=1}^{\infty} g_n \Longrightarrow Nf \leq \sum_{n=1}^{\infty} Ng_n$,

(H_4) : $f_n \geq 0$, $f_n \nearrow f \Longrightarrow Nf_n \nearrow Nf$.

(b) Řekneme, že množina $A \subset X$ je N-nulová, jestliže $Nc_A = 0$. Studujte vlastnosti N-nulových množin.

(c) Řekneme, že funkce f,g jsou N-ekvivalentní, jestliže $\{ x \in X;\ f(x) \neq g(x) \}$ je N-nulová. Ukažte, že $Nf = Ng$, jestliže funkce f,g jsou nezáporné a N-ekvivalentní.

(d) Dále bychom chtěli definovat systémy "měřitelných funkcí" a "integrovatelných funkcí". Definujte následující systémy:

$$\Lambda_1^+ = \left\{ f \geq 0 \ ;\ N(f + \varphi) = Nf + N\varphi \quad \text{pro každou funkci} \quad \varphi \geq 0 \right\},$$

$$\Lambda_2^+ = \left\{ f \geq 0 \ ;\ Nf + N\varphi = N\max(f,\varphi) + N\min(f,\varphi) \ ,\ \forall \varphi \geq 0 \right\},$$

$$\Lambda_3^+ = \left\{ f \geq 0 \ ;\ N\varphi = N\min(f,\varphi) + N(\varphi - \min(f,\varphi)) \quad \forall \varphi \geq 0 \right\},$$

$$\mathcal{L}_i^+ = \left\{ f \in \Lambda_i^+ \ ;\ Nf < +\infty \ , \right\}$$

$$\mathcal{L}_i = \left\{ f \ \text{na} \ X \ ;\ f^+, f^- \in \mathcal{L}_i^+ \right\} .$$

Pro $f \in \mathcal{L}_i$ dále položte $Af = Nf^+ - Nf^-$.

Studujte vlastnosti systémů Λ_i^+ , $\mathcal{L}_i$ a "integrálu" A (linearita, monotonní přechody, N-ekvivalentní funkce a j.), jakož i jejich vzájemný vztah. Zjistěte, který ze systémů $\mathcal{L}_i$ má nejvíce "příjemných" vlastností.

(e) Buď (Z,A) základní prostor z teorie Daniellova integrálu. Pro libovolnou nezápornou funkci f položte

$$Nf = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} Ag_n \ ;\ g_n \in Z \ ,\ f \leq \sum_{n=1}^{\infty} g_n \right\} .$$

(Jaký je vztah N a $\tilde{A}$?). Ukažte, že N je horní integrál. Odpovídá některý ze systémů $\mathcal{L}_i$ systému $\mathcal{L}$ z teorie Daniellova rozšíření? Nepřipomíná vám schema

$$\boxed{(Z,A)} \longrightarrow \boxed{N} \longrightarrow \boxed{(\mathcal{L},A)}$$

Hopfovu větu o rozšíření míry?

(f) Řekneme, že horní integrál N je <u>regulární</u>, jestliže platí:

$$(R) : f \geq 0 \Longrightarrow Nf = \inf \left\{ Ng \ ;\ g \geq f \ ,\ g \in \mathcal{L} \right\} .$$

(Závisí na volbě systému $\mathcal{L}$!). Existují vůbec neregulární horní integrály? Odvoďte některé jejich další vlastnosti !

14. Lebesgueova míra v E_n

A. ÚVOD

V dalším popíšeme dvě metody, jimiž můžeme - se znalostmi abstraktní teorie míry - sestrojit Lebesgueovu míru v E_n. Lze také pochopitelně, postupovat přímo a nevyužívat výsledků předešlé kapitoly; lze jen čtenáři doporučit, aby se pokusil o přenesení obecných principů na konkrétní případ E_n a celou teorii si sám vybudoval.

A nyní již slíbené metody.

Metoda (α). Vyjdeme z pokrývacího systému $(\mathcal{Y}, \lambda)$, kde systém $\mathcal{Y}$ je tvořen všemi otevřenými intervaly v E_n a λI položíme rovno objemu intervalu I. Známým způsobem (viz 13.28) můžeme pomocí $(\mathcal{Y}, \lambda)$ vytvořit vnější míru λ^* a máme-li již vnější míru, můžeme aplikovat Caratheodoryův postup a sestrojit systém $\mathfrak{M}(\lambda^*)$ všech λ^* - měřitelných množin a míru na něm. Pochopitelně nás zajímají dvě otázky (jako v 13.31), a to:

(I) Zda $\mathcal{Y} \subset \mathfrak{M}(\lambda^*)$,

(II) zda $\lambda I = \lambda^* I$ pro každý otevřený interval $I \in \mathcal{Y}$. V předchozí kapitole jsme tuto otázku řešili zcela abstraktně a Hopfova věta 13.32 udávala postačující podmínky pro splnění požadavků (I) a (II). Ovšem Hopfovu větu nemůžeme, bohužel, v tomto konkrétním případě použít, neboť systém $\mathcal{Y}$ netvoří okruh. Nezbývá asi nic jiného, než platnost (I) a (II) dokázat přímo. Ostatní vlastnosti Lebesgueovy míry v E_n získáme pak již snadno.

Metoda (β). Tuto metodu ukážeme pouze na příkladu E_1, přenesení na E_n činí trochu technické obtíže. Tentokráte za $\mathcal{Y}$ zvolíme systém všech konečných sjednocení intervalů typu $\langle a,b)$ a pro $G = \bigcup_{i=1}^{n} \langle a_i, b_i) \in \mathcal{Y}$ (kde intervaly $\langle a_i, b_i)$ můžeme volit po dvou disjunktní) položíme

$\lambda G = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$. Vcelku snadno ukážeme, že systém $\mathcal{Y}$ tvoří okruh a λ je míra za $\mathcal{Y}$. K dalšímu rozšíření míry λ máme opět dvě možnosti.

Možnost (β_1). Z pokrývacího systému $(\mathcal{Y}, \lambda)$ vytvoříme vnější míru λ^* a aplikujeme Caratheodoryho postup pro získání $\mathfrak{M}(\lambda^*)$ a míry na něm. Vzhledem k tomu, že v tomto případě jsou splněny předpoklady Hopfovy věty, víme, že řešení otázek (I) a (II) je positivní.

Možnost (β_2). Míru λ z okruhu $\mathcal{Y}$ můžeme podle věty 13.43 jednoznačně rozšířit na $\sigma(\mathcal{Y})$ a podle věty 13.45 můžeme dále tuto míru zúplnit.

Víme již (podle obecné věty 13.47), že obě metody (β_1) a (β_2) dají tentýž výsledek a není těžké dokázat, že i metoda (α) vede ke stejným závěrům.

Než nyní myšlenky obou postupů (α), (β) detailně zpracujeme, zavedeme ještě pojem tzv. metrické **vnější míry.**

B. METRICKÁ VNĚJŠÍ MÍRA

14.1 Definice. Buď (P, ρ) metrický prostor, nechť μ^* je vnější míra na P (přesněji na systému všech podmnožin množiny P). Řekneme, že μ^* je metrická vnější míra, splňuje-li axiom

$$(M):\ A, B \subset P,\ \rho(A,B) > 0 \Longrightarrow \mu^*(A \cup B) = \mu^* A + \mu^* B$$

(kde, pochopitelně, $\rho(A,B) = \inf \{ \rho(x,y);\ x \in A,\ y \in B \}$ je vzdálenost množin A, B).

14.2 Příklad. Ne každá vnější míra na metrickém prostoru je metrická. Ku příkladu vnější míra μ^* na E_1 (s eukleidovskou metrikou) definovaná předpisem

$$\mu^* A = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } A = \emptyset, \\ 1 & \text{jestliže } A \neq 0, \end{cases}$$

není metrická (ukažte!). Zkoumejte též, které vnější míry z 13.18 a z 13.F jsou metrické (nezapomeňte ovšem, že základní množina P musí být metrický prostor!).

14.3 Věta. Buď μ^* metrická vnější míra na (P, ρ). Potom každá otevřená množina (a tudíž i každá uzavřená, dokonce každá borelovská) je μ^*-měřitelná.

Důkaz. Dokážeme-li, že každá uzavřená množina je μ^*-měřitelná, je potom i každá borelovská množina μ^*-měřitelná (proč? , viz též 10.8 či 13.8). Nechť tedy $G \subset P$ je otevřená množina. Důkaz rozdělíme do dvou částí.

(1) Je-li $A_o \subset G$, $\mu^* A_o < +\infty$, $A_n = \left\{ x \in A_o \,;\, \rho\,(x;\, P-G) \geq \frac{1}{n} \right\}$, potom $\mu^* A_n \nearrow \mu^* A_o$.

K důkazu tohoto tvrzení položme

$$B_n = A_{2n+1} - A_{2n}, \quad C_n = A_{2n} - A_{2n-1} \quad \text{pro} \quad n \in N \,.$$

Je-li $i \neq j$, potom $\rho\,(B_i, B_j) > 0$, $\rho\,(C_i, C_j) > 0$ (použijte nerovnost

$$\rho\,(x,y) \geq \left| \rho\,(x,\, P-G) - \rho\,(y,\, P-G) \right|$$

pro $x \in B_i$, $y \in B_j$).

Z vlastností metrické vnější míry dostáváme pro každé $k \in N$

$$\sum_{j=1}^{k} \mu^* B_j = \mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j \right) \leq \mu^* A_o < +\infty \,,$$

$$\sum_{j=1}^{k} \mu^* C_j = \mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{k} C_j \right) \leq \mu^* A_o < +\infty \,.$$

Tudíž

$$\lim_{p \to \infty} \sum_{j=p}^{\infty} \mu^* B_j = 0 \,, \quad \lim_{p \to \infty} \sum_{j=p}^{\infty} \mu^* C_j = 0 \quad \text{(proč?)}$$

a

$$\lim_{p \to \infty} \sum_{j=p}^{\infty} \left(\mu^* C_j + \mu^* B_j \right) = 0 \,.$$

Protože pro každé $p \in N$ je $\bigcup_{j=p}^{\infty} (C_j \cup B_j) = A_o - A_{2p-1}$, plyne odtud, že $\lim_{p \to \infty} \mu^* (A_o - A_n) = 0$.

Tvrzení plyne z nerovnosti

$$\mu^* A_o \leq \mu^* A_n + \mu^* (A_o - A_n) \,.$$

(2) Buď nyní $T \subset P$ libovolná testovací množina s $\mu^* T < +\infty$, $F \subset P$ libovolná uzavřená množina. Položme $G = P - F$, $A_o = T - F$,

$$A_n = \left\{ x \in A_o;\, \rho\,(x,F) \geq \frac{1}{n} \right\}. \text{ Tudíž } \rho\,(A_n, F) \geq \frac{1}{n} \,.$$

Ze vztahu

$$T = (T \cap F) \cup (T - F) = (T \cap F) \cup A_o \supset (T \cap F) \cup A_n$$

a z vlastností μ^* plyne, že

$$\mu^* T \geq \mu^* ((T \cap F) \cup A_n) = \mu^* (T \cap F) + \mu^* A_n \,,$$

odkud podle části (1) dostáváme limitním přechodem

$$\mu^* T \geq \mu^*(T \cap F) + \mu^*(T - F) .$$

Tím jsme dokázali, že $F \in \mathfrak{M}(\mu^*)$.

14.4 Cvičení.

(A) Použijte větu 14.3 k důkazu, že některé vnější míry v 13.18 či 13.F nejsou metrické.

(B) Větu 14.3 je možno též obrátit. Je-li každá množina otevřená v (P, ρ) μ^*-měřitelná, je vnější míra μ^* metrická. Dokažte !

Návod. Buďte $A, B \subset P$, $\rho(A,B) > 0$. Existuje otevřená množina G , $G \supset A$, $G \cap B \neq \emptyset$ (proč?). Množina G je podle předpokladu μ^*-měřitelná; použijte definici $\mathfrak{M}(\mu^*)$, kde za testovací množinu T zvolíte $A \cup B$.

C. METODA (α)

Označme symbolem $\mathcal{U}$ systém všech otevřených intervalů v E_n ; pro $I \in \mathcal{U}$ položme $\lambda I = \operatorname{vol} I$. Nechť navíc $\emptyset \in \mathcal{U}$ a $\lambda \emptyset = 0$.

Pro $A \subset E_n$ buď dále

$$\lambda^* A = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda I_n ;\ I_n \in \mathcal{U} ,\ \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset A \right\} .$$

Utvořme systém všech λ^*-měřitelných množin $\mathfrak{M}(\lambda^*)$ a značme jej v tomto případě symbolem $\mathfrak{M}_n$. Množinám ze systému $\mathfrak{M}_n$ říkejme lebesgueovsky měřitelné a funkci λ^* uvažované na $\mathfrak{M}_n$ říkejme Lebesgueova míra a značme ji symbolem λ_n (tj. $\lambda_n = \lambda^* / \mathfrak{M}_n$) .

Ukážeme, že

(I) $\mathcal{U} \subset \mathfrak{M}_n$

(II) $\lambda^* I = \operatorname{vol} I$ pro každé $I \in \mathcal{U}$.

Ještě jednou připomeňme, že nelze užít Hopfovu větu.

14.5 Lemma. Buď $I \in \mathcal{U}$, potom $\lambda^* I = \operatorname{vol} I$.

Důkaz. Nerovnost $\lambda^* I \leq \operatorname{vol} I$ je zřejmá (proč?). Buď nyní $I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, $I_n \in \mathcal{U}$. Potom $\operatorname{vol} I \leq \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{vol} I_n$ (rozmyslete!), tedy

$$\operatorname{vol} I \leq \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{vol} I_n ;\ I_n \in \mathcal{U} ,\ \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset A \right\} = \lambda^* I .$$

14.6 Lemma. Pro $\delta > 0$ označme symbolem $\mathcal{U}_\delta$ systém všech otevřených intervalů v E_n , jejichž průměr nepřevýší δ . Tedy

$$\mathcal{U}_\delta = \left\{ I \in \mathcal{U} ;\ d(I) \leq \delta \right\}$$

(kde $d(I) = \sup \left\{ \rho(x,y);\ x,y \in I \right\}$, ρ ≡ eukleidovská metrika v E_n).
Pro $A \subset E_n$ položme

$$\lambda^*_\delta A = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{vol} I_n;\ I_n \in \mathcal{U}_\delta\ ,\ \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset A \right\}$$

(λ^*_δ je vnější míra vytvořená z pokrývacího systému ($\mathcal{U}_\delta$, λ)).
Potom $\lambda^*_\delta = \lambda^*$.

Důkaz. Z inkluse $\mathcal{U}_\delta \subset \mathcal{U}$ plyne nerovnost $\lambda^* \le \lambda^*_\delta$.
Buď $A \subset E_n$, chceme ukázat, že $\lambda^*_\delta A \le \lambda^* A$. Předpokládejme hned, že $\lambda^* A < +\infty$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Existují $I_n \in \mathcal{U}$ tak, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset A$, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{vol} I_n < \lambda^* A + \frac{\varepsilon}{2}$. Ke každému I_n nalezněme intervaly I_n^j ($j = 1,\dots,N(n)$) tak, aby

$$I_n^j \in \mathcal{U}_\delta,\ \bigcup_{j=1}^{N(n)} I_n^j \supset I_n\ ,\ \sum_{j=1}^{N(n)} \operatorname{vol} I_n^j < \operatorname{vol} I_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

(existují vůbec takové intervaly?). Potom

$$\bigcup_{n,j} I_n^j \supset A\ ,\quad I_n^j \in \mathcal{U}_\delta \quad \text{a}$$

$$\sum_{n,j} \operatorname{vol} I_n^j \le \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{vol} I_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) < \lambda^* A + \varepsilon\ .$$

Tedy $\lambda^*_\delta A \le \lambda^* A + \varepsilon$. Ale $\varepsilon > 0$ bylo libovolné.

14.7 Věta. Vnější míra λ^* je metrická.

Důkaz. Buďte $A,B \subset E_n$, $\rho(A,B) = \delta > 0$. Chceme dokázat, že $\lambda^* A + \lambda^* B \le \lambda^*(A \cup B)$; obrácená nerovnost platí pro každou vnější míru. Zvolme $\varepsilon > 0$ a předpokládejme $\lambda^*(A \cup B) < +\infty$.
Existují $I_n \in \mathcal{U}$ tak, že

$$d(I_n) \le \frac{\delta}{2}\ ,\quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset A \cup B\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{vol} I_n < \lambda^*(A \cup B) + \varepsilon\ .$$

Můžeme předpokládat, že $I_n \cap (A \cup B) \ne \emptyset$ pro každé n (proč?) .
Je-li $I_n \cap A \ne \emptyset$, je nutně $I_n \cap B = \emptyset$; označíme-li tedy

$$I^B = \left\{ I_n;\ I_n \cap B \ne \emptyset \right\},\quad I^A = \left\{ I_n;\ I_n \cap A \ne \emptyset \right\},\quad \text{je}$$

$$\bigcup I^A \supset A\ ,\quad \bigcup I^B \supset B \quad \text{a}$$

$$\lambda^*(A \cup B) + \varepsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{vol} I_n = \sum_{I \in I^A} \operatorname{vol} I + \sum_{J \in I^B} \operatorname{vol} I \geq$$
$$\geq \lambda^* A + \lambda^* B .$$

Odtud již vyplývá tvrzení. (Poznamenejme, že důkaz byl velice přirozený a názorný.)

$\boxed{14.8}$ Věta. Každá otevřená, uzavřená či borelovská množina v E_n je lebesgueovsky měřitelná, tj. $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$.

Důkaz. Plyne ihned z 14.3. a 14.7.

$\boxed{14.9}$ Věta. Pro $A \subset E_n$ je

$$\lambda^* A = \inf \left\{ \lambda_n U \ ; \ U \supset A \ , \ U \text{ otevřená} \right\} .$$

Důkaz. Je-li $A \subset U$ (U otevřená), je $\lambda^* A \leq \lambda^* U = \lambda_n U$ (podle předešlého je $U \in \mathcal{M}_n$). Buďte naopak $I_n \in \mathcal{Y}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset A$. Označíme-li $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, je U otevřená, $U \supset A$ a

$$\lambda_n U = \lambda_n \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{vol} I_n ,$$

tudíž $\inf \left\{ \lambda_n U ; \ U \supset A \ , \ U \text{ otevřená} \right\} \leq \lambda^* A$.

$\boxed{14.10}$ Důsledky.

(A) Z 14.9 a 14.7 a 13.37 plyne, že vnější míra λ^* je regulární.

(B) Z 14.9 též plyne, že vnější míra λ^* vybudovaná v této kapitole se shoduje s Lebesgueovou vnější mírou vybudovanou v teorii Daniellova integrálu. Také systémy měřitelných množin splývají, jak vyplývá z další věty (a vět 10.24, 11.2.F).

(C) Z 14.9 plyne, že $\lambda_1^* A = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) ; \ \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \supset A \right\}$

pro každou množinu $A \subset E_1$. Porovnejte též s 10.21 a přečtěte si 10.22 !

$\boxed{14.11}$ Věta. Následující výroky jsou ekvivalentní:

(I) $A \in \mathcal{M}_n$,

(II) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists G$, G otevřená, $G \supset A$, $\lambda^*(G - A) < \varepsilon$,

(III) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists F$, F uzavřená, $F \subset A$, $\lambda^*(A - F) < \varepsilon$,

(IV) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists G, F$, G otevřená, F uzavřená, $F \subset A \subset G$, $\lambda_n(G - F) < \varepsilon$,

(V) $\exists U, N$, U typu G_δ , N nulová, $A = U - N$,

(VI) $\exists V, N$, V typu F_σ , N nulová, $A = V \cup N$.

Důkaz. Proveďte sami podle důkazů vět 10.23 a 10.24.

D. METODA (β)

V tomto odstavci popíšeme další konstrukci Lebesgueovy míry podle myšlenek naznačených v úvodu. Omezíme se pouze na případ E_1, pro prostory vyšší dimense je postup pouze technicky trochu komplikovanější.

14.12 Věta. Buď $\mathcal{Y}$ systém všech konečných sjednocení intervalů typu $\langle a,b)$ $(-\infty < a \leq b \leq +\infty)$. Pro $G = \bigcup_{i=1}^{n} \langle a_i,b_i) \in \mathcal{Y}$, kde intervaly $\{\langle a_i,b_i)\}$ jsou po dvou disjunktní, položme

$$\lambda G = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) .$$

Potom

(a) systém $\mathcal{Y}$ je okruh,

(b) funkce λ je korektně definovaná,

(c) λ je (σ-aditivní) míra na $\mathcal{Y}$

(poznamenejme, že $\emptyset \in \mathcal{Y}$ - stačí totiž položit $a=b$ - přičemž $\lambda\,\emptyset = 0$).

Důkaz. Provádějte sami podle následujících bodů.

(a_1): Je-li $G \in \mathcal{Y}$, potom existují intervaly $\langle a_i,b_i)$, $i=1,\dots,n$, po dvou disjunktní tak, že $G = \bigcup_{i=1}^{n} \langle a_i,b_i)$ (je toto vyjádření v nějakém smyslu jednoznačné?, nezapomeňte, že kupříkladu $\langle 0,2) = \langle 0,1) \cup \langle 1,2)$).

(a_2) Systém $\mathcal{Y}$ je okruh.

(b_1) Buď $G \in \mathcal{Y}$, nechť

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} \langle a_i,b_i) = \bigcup_{j=1}^{k} \langle A_j,B_j) ,$$

kde intervaly $\{\langle a_i,b_i)\}$, resp. $\{\langle A_j,B_j)\}$ jsou po dvou disjunktní.

Potom

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \sum_{j=1}^{k} (B_j - A_j) .$$

(c_1) Buďte $\{\langle a_i,b_i)\}$ po dvou disjunktní intervaly

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} \langle a_i,b_i) \subset \langle A,B) .$$

Potom $\lambda G \leq B - A$.

(c_2) Nechť $\langle A,B) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle a_i, b_i)$. Potom

$$B - A \leq \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) .$$

(c_3) Buďte $\left\{ \langle a_i,b_i) \right\}$ po dvou disjunktní intervaly, $\bigcup_{i=1}^{\infty} \langle a_i,b_i) = \langle A,B)$.

Pomocí (c_1) a (c_2) ukažte, že $B - A = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)$.

(c_4) Funkce λ je (σ-aditivní) míra na okruhu $\mathcal{Y}$.

14.13 Konstrukce Lebesgueovy míry.

Ke konstrukci máme, jak jsme již řekli v úvodu, dvě možnosti.

Možnost (β_1). Z pokrývacího systému ($\mathcal{Y}$, λ) vytvoříme vnější míru λ^* a Caratheodoryho metodou získáme systém $\mathcal{M}$ (λ^*) všech λ^*-měřitelných množin a míru na něm. Z Hopfovy věty pak vyplývá, že

$$\mathcal{Y} \subset \mathcal{M}(\lambda^*) \quad \text{a} \quad \lambda^* G = \lambda G \quad \text{pro každé} \quad G \in \mathcal{Y} .$$

Možnost (β_2). Míru λ z okruhu $\mathcal{Y}$ jednoznačně rozšíříme na σ-okruh $\sigma(\mathcal{Y})$ (nezapomeňte, že $E_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle -n,n)$ a $\lambda(\langle -n,n)) < +\infty$!), tuto míru dále zúplníme.

Věta 13.47 nám říká, že metody (β_1) a (β_2) dají tentýž výsledek (precizujte!). Označme tedy symbolem $\mathcal{M}_1$ systém $\mathcal{M}$ (λ^*) všech lebesgueovsky měřitelných množin, nechť dále $\lambda_1 = \lambda^*$ je Lebesgueova míra na $\mathcal{M}_1$.

14.14 **Věta.**

(A) Každá jednobodová množina je nulová.

(B) Je-li $(a,b) \subset E_1$ otevřený interval, je $(a,b) \in \mathcal{M}_1$ a $\lambda_1((a,b)) = (b - a)$.

(C) Každá borelovská množina je měřitelná.

(D) Pro každou množinu $A \subset E_1$ je

$$\lambda^* A = \inf \left\{ \lambda_1 U ;\ U \supset A \text{ , } U \text{ otevřená} \right\} .$$

Důkaz. (A) Buď $a \in E_1$, potom

$$\left\{ a \right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle a, a + \tfrac{1}{n}) .$$

Ale $\lambda_1(\langle a, a+\frac{1}{n})) = \frac{1}{n}$, tudíž $\lambda_1(\{a\}) = 0$ (kterých vět používáme?).

(B) Zřejmě $(a,b) = \langle a,b) - \{a\}$; tvrzení dokažte sami!

(C) Každý otevřený interval je měřitelná množina, tudíž i každá otevřená množina je měřitelná.

(D) Buď $A \subset E_1$, U otevřená, $U \supset A$. Potom

$$\lambda^* A \le \lambda^* U = \lambda_1 U .$$

Na druhé straně, zvolíme-li $\varepsilon > 0$, můžeme nalézt posloupnost intervalů $\{\langle a_i, b_i)\}$ tak, že

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle a_i, b_i) , \quad \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \lambda^* A + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Tedy $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, b_i) = U$; poslední množina je otevřená a

$$\lambda_1 U = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}) < \lambda^* A + \varepsilon .$$

14.15 Poznámky.

(A) Z předchozího ihned vyplývá, že vnější míra λ^* je regulární (srovnej s 14.10.A).

(B) Pomocí věty 14.14 lze nyní - stejně jako ve větě 14.11 - podat charakteristiku systému $\mathfrak{M}_1$. Proveďte sami.

(C) Z (B) a (D) předešlé věty vyplývá, že vnější míra λ^* sestrojená metodou (β) se shoduje s vnější mírou sestrojenou pomocí metody (α) (a tedy i s mírou, sestrojenou v teorii Daniellova integrálu), rovněž tak se shodují systémy měřitelných množin. Rozmyslete!

Odvodíme si nyní ještě jednu důležitou vlastnost lebesgueovsky měřitelných množin.

14.16 Věta. Buďte $x \in E_1$, $A \subset E_1$; označme

$$-A = \{ t \in E_1 ; -t \in A \} ,$$
$$x + A = \{ x + t ; t \in A \} .$$

Je-li $A \in \mathfrak{M}_1$, je i $-A \in \mathfrak{M}_1$, $x + A \in \mathfrak{M}_1$ a

$$\lambda_1 A = \lambda_1(-A) = \lambda_1(x + A) .$$

(Vyslovte obdobnou větu pro prostory vyšší dimense!).

Důkaz. Proveďte sami, použijte kupříkladu věty 14.11 a 14.10.C.

E. NEMĚŘITELNÉ MNOŽINY

V tomto odstavci budeme zkoumat otázku, zda každá množina v E_1 je lebesgueovsky měřitelná či zda existují neměřitelné množiny. Označme, ve shodě s předchozími odstavci, symbolem λ_1 Lebesgueovu míru v E_1 a symbolem $\mathcal{M}_1$ systém všech (lebesgueovsky) měřitelných množin. Víme již, že je celkem lhostejné, jakým způsobem jsme k λ_1 a $\mathcal{M}_1$ dospěli; ať již teorií Daniellova rozšíření či metodou (α) nebo (β) .

14.17 Věta. V E_1 existuje lebesgueovsky neměřitelná množina, tj. $\mathcal{M}_1 \neq \exp E_1$.

Důkaz (provedeme podle J II, Věta 31).

Buď Q množina všech racionálních čísel v E_1 . Pro $x,y \in E_1$ definujme relaci $\sim$ vztahem:

$$x \sim y \text{ , právě když } x - y \in Q \text{ .}$$

Sami ukažte, že

(a) relace $\sim$ je vztahem ekvivalence (tj. jest reflexivní, symetrická a transitivní).
Proveďte rozklad E_1 do tříd ekvivalence podle relace $\sim$ (tedy x,y leží v téže třídě, právě když $x \sim y$) a nechť M je množina, která má s každou touto třídou společný právě jeden prvek (používáme axiomu výběru!).

Nechť dále pro každé $s \in Q$ jest

$$M_s = \{ x + s \text{ ; } x \in M \}$$

a předpokládejme, že množina M je lebesgueovsky měřitelná.

Opět sami dokazujte, že potom

(b) každá množina M_s $(s \in Q)$ je měřitelná a $\lambda_1 M = \lambda_1 M_s$,

(c) $E_1 = \bigcup_{s \in Q} M_s$,

(d) $s \neq t \implies M_s \cap M_t = \emptyset$,

(e) $\lambda_1 M = \lambda_1 M_s > 0$ (plyne z (c)),

(f) existuje $n \in N$ tak, že $\lambda_1 (M \cap (-n,n)) > 0$.

Položíme-li konečně

$$N = \bigcup_{s \in Q \cap (0,1)} M_s \cap (-n+s, n+s) \text{ , je}$$

(g) $N \subset (-n,n+1)$, tedy $\lambda_1 N \leq 2n + 1$,

(h) $\lambda_1 N = \sum_{s \in Q \cap (0,1)} \lambda_1 (M_s \cap (-n+s, n+s)) = +\infty$

(neboť $\lambda_1(M_s \cap (-n+s,\ n+s)) = \lambda_1(M \cap (-n,\ n))$),
čímž jsme obdrželi spor.

$\boxed{14.18}$ Poznámky.

(A) V předchozí větě jsme dokázali existenci neměřitelné množiny. Konstrukce této množiny závisela podstatným způsobem na užití axiomu výběru. Někoho by snad mohlo napadnout, zda nelze takovou množinu sestrojit "efektivně", skutečně takovou množinu "předepsat" (bez použití axiomu výběru, který má "nekonstruktivní" charakter). Snad již množství uvozovek v minulé větě napovídá, že podobné problémy týkající se neměřitelných množin bude nutné přesně formulovat. Je třeba přesně popsat , čeho smíme užívat, k čemu směřujeme, když chceme neměřitelnou množinu v nějakém smyslu opravdu sestrojit. Tyto otázky, v nichž se vlastně dostáváme do samých základů matematiky (co je "množina"?, "platí" axiom výběru?, co je konstrukce? a pod.), jsou složitější a spadají spíše do oblasti matematické logiky a teorie množin.

(B) Uvedená věta o existenci neměřitelné množiny tudíž nemá velkou "praktickou" cenu. Libovolná množina, s kterou se "setkáte", kterou si "zadáte", bude měřitelná. Ale pozor! - poslední věta není žádná matematická věta! Vždy v konkrétním případě je třeba to dokázat (často to bývá jednoduché). Existenci neměřitelné množiny budeme převážně používat při řešení teoretických problémů, při sestrojování různých protipříkladů.

(C) Nyní lze již lehko dokázat, že existuje lebesgueovsky neměřitelná funkce v E_1 , stačí totiž uvažovat charakteristickou funkci neměřitelné množiny.

(D) Sami dokažte - obdobnými úvahami - že existují neměřitelné množiny i v E_n $(n > 1)$.

(E) Lze dokázat daleko více, každý interval v E_1 (a dokonce každá měřitelná množina kladné míry) a obsahuje lebesgueovsky neměřitelnou podmnožinu. K tomuto viz 14.20.

(F) Jako zajímavost uveďme tvrzení (Sierpinski), že v E_2 existuje lebesgueovsky neměřitelná množina, která má s každou přímkou, rovnoběžnou s kteroukoliv osou, společný právě jeden bod.

F.* OTÁZKY DALŠÍHO ROZŠÍŘENÍ LEBESGUEOVY MÍRY

Upozorňuji, že úvahy tohoto odstavce nebudou nikterak triviální a nebudu je ani nijak pečlivě provádět. Chci pouze (informativně) upozornit na některé problémy, naskýtající se na tomto místě.

$\boxed{14.19}$ Formulace problému.

V předchozích odstavcích jsme ukázali, jakými prostředky a způsoby lze vybudovat teorii Lebesgueovy míry v E_1 . Sestrojili jsme systém $\mathfrak{M}_1$ lebesgueovsky měřitelných množin a míru λ_1 na něm. Ukázali jsme, že

(i) existují neměřitelné množiny (tj. $\mathfrak{M}_1 \neq \exp E_1$),

(ii) Lebesgueova míra λ_1 je invariantní vůči translaci, tj. platí $A \in \mathfrak{M}_1$, $x \in E_1 \Longrightarrow x + A \in \mathfrak{M}_1$ a $\lambda_1 A = \lambda_1(x + A)$ (viz větu 14.16).

Otázka, kterou budeme zkoumat, je následující:

"Existuje σ-algebra $\mathcal{G}$ podmnožin E_1 a míra μ na $\mathcal{G}$ tak, aby

(A) $\mathfrak{M}_1 \subset \mathcal{G}$, $\mathfrak{M}_1 \neq \mathcal{G}$,

(B) $A \in \mathfrak{M}_1 \Longrightarrow \lambda_1 A = \mu A$,

(C) $A \in \mathcal{G}$, $x \in E_1 \Longrightarrow x + A \in \mathcal{G}$ a $\mu(x+A) = \mu A$?"

Jinými slovy: lze Lebesgueovu míru rozšířit na širší systém množin (než je systém $\mathfrak{M}_1$) tak, aby nová míra byla stále ještě invariantní vůči translaci?

Speciálně, zajímá nás, zda lze volit $\mathcal{G} = \exp E_1$. Opět jinak - zda lze Lebesgueovu míru rozšířit na systém <u>všech</u> podmnožin E_1.

Ať jsou odpovědi na naše otázky jakékoliv, jedno můžeme říci s určitostí. Nová míra μ se na systému $\mathcal{G}$ nemůže shodovat s Lebesgueovou vnější mírou, <u>existuje</u> tedy $A \in \mathcal{G} - \mathfrak{M}_1$ tak, že $\mu A \neq \tilde{\lambda}_1 A$. Toto tvrzení ihned plyne z věty 13.39. Uvědomte si a promyslete si dobře tento fakt !

$\boxed{14.20}$ <u>Věta.</u> Buď $T \in \mathfrak{M}_1$ a nechť $\lambda_1 T > 0$ (kupříkladu $T = E_1$). Předpokládejme, že

(1) $\mathcal{G}$ je σ-algebra podmnožin E_1 taková, že

(1a) $\mathfrak{M}_1 \subset \mathcal{G}$,

(1b) $A \in \mathcal{G}$, $x \in E_1 \Longrightarrow x + A \in \mathcal{G}$,

(2) μ je míra na $\mathcal{G}$ taková, že

(2a) $A \in \mathfrak{M}_1 \Longrightarrow \lambda_1 A = \mu A$,

(2b) $x \in E_1$, $A \in \mathcal{G} \Longrightarrow \mu(x+A) = \mu A$.

Potom existuje $E \subset T$ s vlastností $E \notin \mathcal{G}$.

<u>Poznámky:</u>

(A) Volíme-li speciálně $T = E_1$, $\mathcal{G} = \mathfrak{M}_1$, $\mu = \lambda_1$, plyne odtud, že existuje lebesgueovsky neměřitelná množina (věta 14.17). V uvedené větě je též obsaženo tvrzení z 14.18.E.

(B) Uvedená věta též dává negativní odpověď na jednu z našich otázek: neexistuje míra na $\exp E_1$, která by byla invariantní vůči translaci a která by se shodovala s Lebesgueovou mírou na $\mathfrak{M}_1$. Objasněte !

Důkaz. Vynecháme; viz kupř. [He - St], věta 10.28.

$\boxed{14.21}$ <u>Poznámka.</u> Lze dokonce dokázat tuto větu.
Nechť μ a $\mathcal{G}$ splňují předpoklady z 14.20. Potom existuje σ-algebra $\mathcal{T} \subset \exp E_1$ a míra ν na $\mathcal{T}$ tak, že

(i) $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, $\mathcal{S} \neq \mathcal{T}$

(ii) $A \in \mathcal{S} \Longrightarrow \mu A = \nu A$,

(iii) $A \in \mathcal{T}$, $x \in E_1 \Longrightarrow x + A \in \mathcal{T}$ a $\nu(x + A) = \nu A$.

Rozmyslete a komentujte !

Tím jsme, zdá se že úplné, vyčerpali odpovědi na naše otázky. Vidíme, že neexistuje σ-aditivní rozšíření Lebesgueovy míry na $\exp E_1$, které by bylo invariantní vůči translaci. Položme si tedy otázku, zda existuje alespoň konečně aditivní rozšíření. Odpověď dává následující věta.

14.22 Věta (Banach). Existuje konečně aditivní míra μ na $\exp E_1$ taková, že

(i) $A \in \mathcal{M}_1 \Longrightarrow \lambda_1 A = \mu A$,

(ii) $\mu(t+A) = \mu A$ pro všechna $t \in E_1$, $A \subset E_1$.

(Opět poznamenejme, že nemůže být $\mu = \tilde{\lambda}_1$!)

Důkaz této věty není nikterak snadný a vyžaduje hlubší znalosti například funkcionální analýzy (kupř. Hahn - Banachovu větu).

14.23 Poznámka. Zajímavé je, že předchozí věta zůstává v platnosti ještě pro E_2, zatímco v prostorech vyšší dimense již ani tato věta neplatí.

G. CVIČENÍ A PROBLÉMY

14.A Cvičení. Nechť $F \subset \langle 0,1 \rangle$ je uzavřená, $\lambda_1 F = 1$. Potom $F = \langle 0,1 \rangle$, ukažte !

14.B Cvičení.

(a) Buďte $A, B \subset E_1$ měřitelné. Potom $A \times B \in \mathcal{M}_2$ a

$$\lambda_2(A \times B) = \lambda_1 A \, . \, \lambda_1 B \, .$$

Ukažte !

(b) Je pravda, že $\lambda^*_2(A \times B) = \lambda^*_1 A \, . \, \lambda^*_1 B$ pro každé $A, B \subset E_1$?

14.C Regulární míry.

(a) Buď X lokálně kompaktní (metrický) prostor. Nechť μ je míra na σ-algebře $\mathcal{S} \supset \mathcal{B}(X)$ ($\mathcal{B}(X)$ znamená systém všech borelovských množin viz 13.B).

Řekneme, že míra μ je regulární (pozor! nepleťte s regularitou vnější míry, definovanou v 13.36), jestliže

(i) $\mu F < +\infty$ pro každou kompaktní množinu $F \subset X$,

(ii) $\mu A = \inf \{ \mu \mathcal{U} \, ; \, \mathcal{U}$ otevřená, $A \subset \mathcal{U} \}$ pro každou $A \in \mathcal{S}$,

(iii) $\mu \mathcal{U} = \sup \{ \mu F ; F$ kompakt, $F \subset \mathcal{U} \}$ pro každou otevřenou množinu $\mathcal{U} \subset X$

(promyslete !).

(b) Ukažte, že Lebesgueova míra v E_1 je regulární.

(c) Buď X lokálně kompaktní. Nechť každá otevřená množina v X je σ-kompaktní (= sjednocení spočetně mnoha kompaktních množin). Nechť μ je míra na $\mathcal{B}(X)$ splňující (i). Potom je již míra μ regulární (uvědomte si překvapivost tohoto výsledku !). Dokažte !

Návod. Předpokládejte nejdříve, že X je kompakt a uvažujte systémy množin

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ E \in \mathcal{B}(X);\ \mu E = \inf\left\{\mu\mathcal{U} ;\ \mathcal{U} \text{ otevřená, } \mathcal{U} \supset E\right\}\right\} \quad \text{a}$$

$$\mathcal{L}_2 = \left\{ E \in \mathcal{B}(X);\ \mu E = \sup\left\{ \mu F;\ F \text{ kompakt, } F \subset E \right\}\right\} .$$

(d) Buď μ míra na $\mathcal{B}_1$ (= borelovské množiny v E_1) taková, že

$\mu\langle 0,1\rangle = 1$, $\mu(E + x) = \mu E$ pro každé $x \in E_1$, $E \in \mathcal{B}_1$.

Potom již je μ (na $\mathcal{B}_1$) rovna Lebesgueově míře.
(Opět si uvědomte překvapivost !).

Návod. Nejdříve ukažte, že $\mu\{x\} = 0$ pro každé $x \in E_1$ a $\mu(a,b) = b-a$. Poté aplikujte (c).

(e) Sestrojíme příklad neregulární míry. Nechť $X_1 = E_1$ s eukleidovskou metrikou a $X_2 = E_1$ s diskrétní metrikou. Položme $X = X_1 \times X_2$ a zaveďme do X přirozeným způsobem "součinovou" metriku (proveďte !).
Pro $A \in \mathcal{B}(X)$ položme

$$\mu A = \sum_{x \in E_1} \lambda_1\left\{ y;\ [x,y] \in A\right\}$$

(λ_1 je Lebesgueova míra; jedná se o zobecněnou řadu! - viz 9.J).
Ukažte, že μ je neregulární míra na $\mathcal{B}(X)$.

(f) Ukážeme ještě jeden netriviální příklad. Nechť $\left\{ r_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost všech racionálních čísel E_1 , nechť

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{pro } x \in (0,1), \quad g = 0 \ \text{ jinde v } E_1.$$

Dále položme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, g(x + r_n),\ x \in E_1 .$$

Ukažte, že $f \in \mathcal{L}_1$.

Pro $A \in \mathcal{B}_1$ položme dále

$$\mu A = \int_A f^2$$

(Lebesgueův integrál). Ukažte, že

(1) míra μ je σ-konečná ,

(2) $\mu\langle a,b\rangle = +\infty$ pro každé $a,b \in E_1$, $a < b$,

(3) míra μ není regulární.

(g) Poznámka. Lze dokázat, že (v podstatě) každá regulární míra na $\mathcal{B}_1$ je již Lebesgue-Stieltjesova míra, která je vytvořena z neklesající, zleva spojité funkce φ na E_1. Obráceně též platí, že každá taková Lebesgue-Stieltjesova míra je regulární. V tomto smyslu si regulární míry a Lebesgue-Stieltjesovy míry navzájem jednoznačně odpovídají.

(h) Poznámka. Lze dokázat (von Neumannova věta), že každá konečně aditivní a regulární míra na $\mathcal{B}(X)$ je již σ-aditivní.

$\boxed{\text{14.D}}$ Cvičení. Promyslete cvičení 10.H.

15. Příklady dalších měr

A. LEBESGUE - STIELTJESOVA MÍRA V E_1

V celém odstavci předpokládejme, že φ je neklesající funkce v E_1. Budeme postupovat obdobně jako při vytváření Lebesgueovy míry v kapitole 14, měli byste si ji proto nejdříve prostudovat. Budeme struční.

15.1 Metoda (α).

Nechť $\mathcal{U}$ sestává z prázdné množiny a ze všech otevřených (omezených) intervalů v E_1; pro $(a,b) \in \mathcal{U}$ položme $\lambda_\varphi(a,b) = \varphi(b-) - \varphi(a+)$, nechť $\lambda_\varphi \emptyset = 0$. Vytvořme z pokrývacího systému $(\mathcal{U}, \lambda_\varphi)$ vnější míru λ^*_φ a dále systém λ^*_φ-měřitelných množin $\mathcal{M}_\varphi$. Obdobně jako v odstavcích 14.5 - 14.11 dokažte, že

(A) $\lambda^*_\varphi(a,b) = \varphi(b-) - \varphi(a+)$,

(B) λ^*_φ je metrická vnější míra,

(C) λ^*_φ je regulární vnější míra.

Dále dokažte, že

(D) $\lambda^*_\varphi\{x\} = \varphi(x+) - \varphi(x-)$ pro každé $x \in E_1$,

(E) $\lambda^*_\varphi(\langle a,b\rangle) = \varphi(b+) - \varphi(a-)$.

15.2 Metoda (β).

V tomto odstavci předpokládejme, že funkce φ je spojitá zleva v každém bodě E_1. Označme tentokráte symbolem $\widetilde{\mathcal{U}}$ systém všech konečných sjednocení intervalů typu $\langle a,b)$ $(-\infty < a \leq b \leq +\infty)$. Pro

$G = \bigcup_{i=1}^{n} \langle a_i, b_i) \in \widetilde{\mathcal{U}}$, kde poslední intervaly jsou po dvou disjunktní, položme

$$\lambda_\varphi G = \sum_{i=1}^{n} (\varphi(b_i) - \varphi(a_i)) .$$

Opět - jako v 14.12 - dokažte, že

(A) systém $\widetilde{\mathcal{U}}$ je okruh,

(B) funkce λ_φ je korektně definována,

(C) λ_φ je σ-aditivní míra na $\widetilde{\mathcal{Y}}$.

Nechť $\widetilde{\lambda_\varphi}$ je vnější míra, odvozená z pokrývacího systému ($\widetilde{\mathcal{Y}}$, λ_φ) . A opět dokažte, že

(D) $\widetilde{\lambda}_\varphi$ je metrická, **regulární** vnější **míra** (uvědomte si, že podle Hopfovy věty každý interval, a tedy i každá borelovská množina je $\widetilde{\lambda}_\varphi$ -měřitelná a užijte 14.4.B).

(E) $\widetilde{\lambda}_\varphi (\langle a,b)) = \varphi(b) - \varphi(a) \quad (= \lambda_\varphi(\langle a,b)))$,

(F) $\widetilde{\lambda}_\varphi(\{x\}) = \varphi(x+) - \varphi(x)$.

Můžete též míru λ_φ z okruhu $\widetilde{\mathcal{Y}}$ rozšířit na σ-okruh $\sigma(\widetilde{\mathcal{Y}})$ a potom zúplnit (viz 13.43 a 13.47).

15.3 Porovnání metod (α) a (β).

(A) Je-li funkce φ spojitá zleva v E_1 , potom $\lambda^*_\varphi = \widetilde{\lambda}_\varphi$.

Důkaz. Podle 15.1 jest

$$\lambda^*_\varphi(\langle a,b)) = \lambda^*_\varphi(\{a\}) + \lambda^*_\varphi(a,b) = \varphi(a+) - \varphi(a-) + \varphi(b-) - \varphi(a+) =$$

$$= \varphi(b-) - \varphi(a-) = \varphi(b) - \varphi(a) = \widetilde{\lambda}_\varphi(\langle a,b)).$$

Tedy $\lambda^*_\varphi = \widetilde{\lambda}_\varphi$ na systému $\mathcal{Y}$. Nyní z regularity vnějších měr λ^*_φ , $\widetilde{\lambda}_\varphi$ a z obecné věty ve cvičení 13.R plyne požadovaná rovnost (proveďte podrobně!). Dokažte též toto tvrzení přímo z definic λ^*_φ a $\widetilde{\lambda}_\varphi$.

(B) Nechť funkce φ je nyní libovolná. Definujme funkci ψ na E_1 předpisem

$$\psi(x) = \lim_{y \to x-} \varphi(y) = \varphi(x-) .$$

Zřejmě ψ je neklesající, zleva spojitá funkce na E_1 (dokažte!) a

$$\psi(z+) = \varphi(z+) , \quad \psi(z-) = \varphi(z-) \quad \text{pro každé } z \in E_1 .$$

Opět

$$\widetilde{\lambda}_\psi(\langle a,b)) = \psi(b) - \psi(a) = \psi(b-) - \psi(a-) = \varphi(b-) - \varphi(a-) =$$

$$= \lambda^*_\varphi(\langle a,b))$$

a ze stejného důvodu jako výše jest tedy $\widetilde{\lambda}_\psi = \lambda^*_\varphi$.

Není-li tedy funkce φ spojitá zleva, můžeme vytvořit funkci ψ a na ni již můžeme použít metodu (β) . Tím jsme ukázali, že metodu (β) můžeme použít v každém případě.

15.4 Cvičení.

Do tohoto odstavce zahrneme ve formě cvičení některé další vlastnosti Lebesgue-Stieltjesovy míry. Dokažte je !

(A) Jako v 14.13 popište podrobně metody (β_1) a (β_2).

(B) Vyslovte větu analogickou větě 14.11 pro LS-míru !

(C) Ukažte, že pro každou množinu $A \in \mathfrak{M}_\varphi$ platí

$$\lambda^*_\varphi(A) = \sup \left\{ \lambda^*_\varphi(K) \ ; \ K \subset A, \ K \text{ kompakt} \right\} .$$

(D) Lze vyslovit větu podobnou větě 14.16 ?

B. HAUSDORFFOVA MÍRA

$\boxed{15.5}$ Definice. Předpokládejme v dalším, že (P, ρ) je metrický prostor. Symbolem $d(A)$ označme průměr množiny A (viz 14.6) . Pro každé přirozené n položme

$$\mathcal{U}_n = \left\{ U \subset P \ ; \ U \text{ otevřená}, \ d(U) \le \frac{1}{n} \right\} .$$

Buď konečně $p \ge 0$. Pro každou množinu $G \subset P$ položme $\lambda G = [d(G)]^p$ (navíc $\lambda \emptyset = 0$) a vytvořme vnější míru λ^*_n z pokrývacího systému $(\mathcal{U}_n, \lambda)$. Zřejmě $\mathcal{U}_1 \supset \mathcal{U}_2 \supset \mathcal{U}_3 \supset \dots$, tudíž $\lambda^*_1 A \le \lambda^*_2 A \le \lambda^*_3 A \le \dots$ pro každou množinu $A \subset P$ (odůvodněte!).

Položme konečně pro $A \subset P$

$$\mu^*_p A = \lim_{n \to \infty} \lambda^*_n A .$$

V dalším ukážeme, že funkce μ^*_p je vnější míra a budeme ji nazývat p-dimensionální Hausdorffovou vnější mírou.

$\boxed{15.6}$ Věta. Funkce μ^*_p je metrická regulární vnější míra.

Důkaz. (A) Funkce μ^*_p je vnější míra.

Jelikož všechny funkce λ^*_n jsou vnější míry, plyne lehko z limitního přechodu, že funkce μ^*_p splňuje axiomy (VM_1) - (VM_3) z 13.16. Zbývá ověřit (VM_4). Buď tedy

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i . \quad \text{Potom}$$

$$\mu^*_p A \le \mu^*_p \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \lim_{n\to\infty} \lambda^*_n \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*_n A_i \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*_p A_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*_p A_i .$$

(B) Vnější míra μ^*_p je metrická (viz 14.1).

Buďte $A, B \subset P$, $\rho(A,B) > 0$. Chceme dokázat nerovnost $\mu^*_p(A \cup B) \ge$ $\ge \mu^*_p A + \mu^*_p B$ (obrácená nerovnost je zřejmá, proč ?). Stačí tedy předpokládat $\mu^*_p(A \cup B) < +\infty$. Nalezněme n_0 tak, aby $\rho(A,B) > \frac{1}{n}$

pro každé $n > n_0$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Pro každé n existují množiny $A_n^k \in \mathcal{U}_n$ tak, že

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^k \supset A \cup B \,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda A_n^k \leq \lambda^*_n(A \cup B) + \varepsilon \;.$$

Potom ovšem pro $n > n_0$ jest

$$\lambda^*_n A + \lambda^*_n B \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda A_n^k \leq \lambda^*_n(A \cup B) + \varepsilon \;.$$

(Nezapomeňte, že žádná z množin A_n^k nemůže mít společné body jak s A , tak s B .)

Tedy $\lambda^*_n A + \lambda^*_n B \leq \lambda^*_n (A \cup B)$ (pro $n > n_0$) a limitním přechodem dostáváme tvrzení.

(Porovnejte tento důkaz s důkazem věty 14.7.)

(C) Vnější míra μ^*_p je <u>regulární</u> (viz 13.36).

Víme již z předchozího, že každá otevřená množina je μ^*_p-měřitelná. K důkazu regularity stačí nyní dokázat toto:

ke každé množině $A \subset P$ existuje nerostoucí posloupnost $\{G_n\}$ otevřených množin tak, že

$$\mu^*_p A = \mu^*_p \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right)$$

(odůvodněte! viz 13.37). Buď tedy $A \subset P$. Je-li $\mu^*_p A = +\infty$, stačí položit $G_n = P$ (proč?).

Nechť $\mu^*_p A < +\infty$. Nalezněme (pro každé n) množiny A_n^k tak, aby

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^k \supset A \,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda A_n^k \leq \lambda^*_n A + \frac{1}{n} \;.$$

Položíme-li $G_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^k$, lehko ověříme, že

$$\mu^*_p A = \mu^*_p \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) \;.$$

$\boxed{15.7}$ **Poznámka.** Další vlastnosti Hausdorffovy vnější míry jsou uvedeny ve cvičeních 15.F - 15.L.

C.* SOUČIN MĚR

15.8 Formulace problému.

Mějme dány dvě trojice – $(X, \mathcal{S}, \mu)$, $(Y, \mathcal{M}, \nu)$ – kde μ (resp. ν) je míra na σ-okruhu $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{M}$) podmnožin množiny X (resp. Y). Hledáme nyní v kartézském součinu $X \times Y$ takový σ-okruh $\mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{M}$ a takovou míru $\mu \hat{\otimes} \nu$ na $\mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{M}$, aby platilo:

(i) $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{M} \Longrightarrow A \times B \in \mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{M}$,

(ii) $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{M} \Longrightarrow \mu \hat{\otimes} \nu (A \times B) = \mu A \,.\, \nu B$.

Je otázkou, zda taková míra a takový σ-okruh vůbec existuje a je též problém, jak dalece jsou našimi podmínkami (i), (ii) jednoznačně určeny. Existuje opět více způsobů, jak konstruovat $\mu \hat{\otimes} \nu$ a $\mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{M}$, jeden z nich využívá definice integrálu a uvedeme jej v 19.7; nyní probereme dva jiné způsoby, které jsou sice elementární, ale trochu technicky komplikované.

Protože budeme převážně používat rozšiřovacích vět z teorie míry, vyplývá odtud omezení se (většinou) na případ σ-konečných měr. Proto předpokládejme, že μ a ν jsou σ-konečné úplné míry (lepší čtenář si může promyslet, které věty platí i bez některého z těchto předpokladů).

15.9 Metoda (α). Buďte tedy $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{M}, \nu)$ jako v předešlém odstavci. Označme symbolem

$$\mathcal{Y} = \{ A \times B \subset X \times Y \,;\, A \in \mathcal{S} \,,\, B \in \mathcal{M} \}$$

a pro $A \times B \in \mathcal{Y}$ položme

$$\lambda (A \times B) = \mu A \,.\, \nu B$$

(poznamenejme, že platí implikace

$$A \times B = C \times D \Longrightarrow A = C \,,\, B = D \,;$$

proč je dobré si toto uvědomit ?).

Nechť λ^* je vnější míra vytvořená z pokrývacího systému $(\mathcal{Y}, \lambda)$.

Problémy, které nás zajímají, jsou – jako obvykle – tyto:

(i) zda $\mathcal{Y} \subset \mathfrak{M}(\lambda^*)$,

(ii) zda $\lambda^*(G) = \lambda(G)$ pro $G \in \mathcal{Y}$.

Ukážeme, že tomu tak je (proč nelze užít Hopfovu větu?).

15.10 Lemma. Buďte G, $G_n \in \mathcal{Y}$, $G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Potom

$$\lambda G \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda G_n \,.$$

Důkaz. Pro $A \subset X \times Y$ položme

$$\omega^* A = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda G_i \; ; \; G_i \in \mathscr{Y} \quad , \; A \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_i \right\}$$

(pozor! množinu A pokrýváme <u>konečným</u> sjednocením množin z $\mathscr{Y}$, porovnejte ω^* a λ^* !).

Není těžké ukázat, že

(i) $\omega^* \emptyset = 0$

(ii) $\omega^*(E \cup F) \leq \omega^* E + \omega^* F$,

(iii) $E \subset F \implies \omega^* E \leq \omega^* F$,

(iv) $\omega^* G \leq \lambda G$ pro $G \in \mathscr{Y}$.

Je-li nyní $G, G_n \in \mathscr{Y}$, $G \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$, položme $K_n = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$.

Dokážeme-li, že $\lim\limits_{n\to\infty} \omega^* K_n \geq \lambda G$, obdržíme

$$\lambda G \leq \lim_{n\to\infty} \omega^* K_n = \lim_{n\to\infty} \omega^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} G_i\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \omega^* G_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda G_i$$

a budeme s důkazem hotovi.

Dokazujme nyní nerovnost $\lim \omega^* K_n \geq \lambda G$. Nechť $G = A \times B$, $A \in \mathscr{S}$, $B \in \mathscr{M}$, přičemž se omezme na případ $\mu A < +\infty$, $\nu B < +\infty$ (pro jednoduchost; ostatní případy si rozmyslete sami).

Zvolme $\varepsilon > 0$ a označme

$$M_n = \left\{ x \in A \; ; \quad \nu K_n^{x,*} \geq \nu B - \varepsilon \right\}$$

(zřejmě $K_n^{x,*} \in \mathscr{M}$ pro každé $x \in A$). Podle předpokladu pro každé $x \in A$

platí $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^{x,*} \supset B$, tj. $\lim \nu K_n^{x,*} = \nu B$. Odtud plyne, že

$\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = A$, tedy $\mu A = \lim \mu M_n$. Existuje tudíž n_o tak, že pro každé $n > n_o$ je $\mu M_n > \mu A - \varepsilon$.

Celkem dostáváme, že $\omega^*(K_n \cap (M_n \times B)) \geq \mu M_n (\nu B - \varepsilon)$ (poslední nerovnost si dobře promyslete a detailně dokažte !, je to jakási "Fubiniova věta"), tedy

$$\omega^* K_n \geq (\mu A - \varepsilon)(\nu B - \varepsilon) \quad \text{pro } n > n_o .$$

$\boxed{15.11}$ <u>Věta.</u> Při označení odstavce 15.9 platí:

(i) $\mathscr{Y} \subset \mathfrak{M}(\lambda^*)$,

(ii) $\lambda^* G = \lambda G$ pro každé $G \in \mathscr{Y}$.

Důkaz. (i) Buď $G \in \mathscr{Y}$, $T \subset X \times Y$, $\lambda^* T < +\infty$ (T je testovací množina, viz 13.24), a buď $\varepsilon > 0$.

Nalezněte $G_n \in \mathscr{Y}$ tak, aby

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \supset T \ , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda G_n \leq \lambda^* T + \varepsilon \ .$$

Nechť $G_n = A_n \times B_n$, $G = A \times B$, potom

$$G_n \cap G = (A_n \cap A) \times (B_n \cap B) = I_n^1 \ ,$$

$$G_n - G = \left[(A_n \cap A) \times (B_n - B)\right] \cup \left[(A_n - A) \times B_n\right] = I_n^2 \cup I_n^3 \ ,$$

přičemž $\lambda I_n^1 + \lambda I_n^2 + \lambda I_n^3 = \lambda G_n$ (proveďte podrobně) a $I_n^1 \subset G$, $I_n^2 \cap G = I_n^3 \cap G = \emptyset$.

Odtud plyne, že můžeme předpokládat ihned, že $G_n \subset G$ anebo $G_n \cap G = \emptyset$.

Konečně tedy

$$\lambda^*(T - G) + \lambda^*(T \cap G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda G_n \leq \lambda^* T + \varepsilon \ .$$

(ii) Zřejmě $\lambda^* G \leq \lambda G$ pro $G \in \mathcal{Y}$. Chceme dokázat, obrácenou nerovnost, stačí tedy předpokládat, že $\lambda^* G < +\infty$. Buďte $G_n \in \mathcal{Y}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \supset G$. Potom (použij 15.10) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda G_n \geq \lambda G$, tudíž $\lambda^* G \geq \lambda G$.

$\boxed{15.12}$ Poznámka. Označme tedy symbolem $\mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{M}$ systém $\mathfrak{M}$ (λ^*) a symbolem $\mu \hat{\otimes} \nu$ funkci λ^* uvažovanou pouze na $\mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{M}$.

Budeme nyní zkoumat jednoznačnost míry $\mu \hat{\otimes} \nu$ vzhledem k podmínkám (i) a (ii) z 15.8. Poznamenejme, že míra $\mu \hat{\otimes} \nu$ je σ-konečná (předpokládáme, že μ , ν jsou σ-konečné!). Stačí totiž nalézt $A_n \in \mathcal{S}$, $B_n \in \mathcal{M}$, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset , \dots , B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$, $\mu A_n < +\infty$, $\nu B_n < +\infty$ tak, aby $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = Y$ a položit $C_n = A_n \times B_n$.

Potom $C_n \in \mathcal{Y} \subset \mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{M}$, $\mu \hat{\otimes} \nu (C_n) < +\infty$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = X \times Y$.

$\boxed{15.13}$ Věta. Označme symbolem $\mathcal{D}$ třídu všech konečných disjunktních sjednocení množin z $\mathcal{Y}$. Potom $\mathcal{D}$ je okruh ($\mathcal{D}$ je právě okruh generovaný systémem $\mathcal{Y}$).

Důkaz. Obdobně jako v důkaze věty 15.11 si uvědomte, že

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \ ,$$

$$(A_1 \times B_1) - (A_2 \times B_2) = \left[(A_1 \cap A_2) \times (B_1 - B_2)\right] \cup \left[(A_1 - A_2) \times B_1\right]$$

(kreslete !), tudíž platí

$$G_1, G_2 \in \mathcal{Y} \Longrightarrow G_1 \cap G_2 \ , \ G_1 - G_2 \in \mathcal{D} \ .$$

Nyní tvrzení již lehko plyne ze vztahů

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) - \left(\bigcup_{j=1}^{k} D_j\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{k} (C_i - D_j) ,$$

$$A \cup B = A \cup (B - A).$$

(Poznámka. Stačilo v 15.13 předpokládat, že $\mathcal{S}$, $\mathcal{M}$ jsou okruhy!)

15.14 Věta. Funkce λ^* je míra na okruhu $\mathcal{D}$. Je-li $\hat{\lambda}$ jiná (stačí konečně aditivní) míra na $\mathcal{D}$, splňující podmínku

$$A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{M} \Longrightarrow \hat{\lambda}(A \times B) = \mu A \cdot \nu B$$

(tj. $\hat{\lambda} = \lambda^*$ na $\mathcal{Y}$), potom $\hat{\lambda} = \lambda^*$ na $\mathcal{D}$.

Důkaz. Dokažte sami, tvrzení ihned vyplývá ze vztahu $\mathcal{Y} \subset \mathcal{D} \subset \mathfrak{M}(\lambda^*)$, věty 15.13 a z toho, že λ^* je míra na $\mathfrak{M}(\lambda^*)$.

15.15 Věta. Označme symbolem $\mathcal{S} \otimes \mathcal{M}$ σ-okruh, generovaný systémem $\mathcal{Y}$. Potom existuje právě jedna míra, označme ji symbolem $\mu \otimes \nu$, na $\mathcal{S} \otimes \mathcal{M}$ taková, že

$$A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{M} \longrightarrow \mu \otimes \nu (A \times B) = \mu A \cdot \nu B .$$

Tato míra je σ-konečná a navíc míra $\mu \hat{\otimes} \nu$ na systému $\mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{M}$ je její zúplnění.

Důkaz. Položíme-li $\mu \otimes \nu (A \times B) = \mu A \cdot \nu B$ pro $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{M}$, lze tuto funkci jednoznačně rozšířit (podle 15.14) na okruh $\mathcal{D}$ a protože $\mathcal{S} \otimes \mathcal{M} = \sigma(\mathcal{D})$, lze tuto dále jednoznačně podle věty 13.43 rozšířit na $\mathcal{S} \otimes \mathcal{M}$ (nezapomeňte na σ-konečnost v 15.12 !).

Zbytek tvrzení plyne z 13.47.

15.16 Poznámka. Přečtěte si cvičení 15.0, v nichž vynikne rozdíl systémů $\mathcal{S} \otimes \mathcal{M}$ a $\mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{M}$!

15.17 Metoda (β). Budeme nyní již struční.

(A) Definujeme nejdříve systém $\mathcal{Y}$ a funkci λ jako v 15.9,

$$\mathcal{Y} = \{A \times B;\ A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{M}\}, \quad \lambda(A \times B) = \mu A \cdot \nu B .$$

(B) Definujeme systém $\mathcal{D}$ jako třídu všech konečných disjunktních sjednocení množin z $\mathcal{Y}$ a ukážeme, že $\mathcal{D}$ je okruh (generovaný systémem $\mathcal{Y}$) stejně jako v 15.13.

(C) Pro $D = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B_i) \in \mathcal{D}$ $(A_i \times B_i \in \mathcal{Y})$ položme

$$\lambda D = \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i \times B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu A_i \cdot \nu B_i$$

a ukažme, že

(C_1): definice λ není v rozporu s dřívější definicí množiny z $\mathcal{Y}$ (to je jasné),

(C_2): definice funkce λ nezávisí na "vyjádření" množiny D, tj. je-li

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i = \bigcup_{j=1}^{k} C_j \times D_j \in \mathcal{D} \quad \text{, potom}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu A_i \cdot \nu B_i = \sum_{j=1}^{k} \mu C_j \cdot \nu D_j$$

(ani to není těžké),

(C_3): funkce λ je na okruhu $\mathcal{D}$ míra (důkaz σ-aditivity λ je nejtěžší, musíme vlastně dokázat jakousi "zeslabenou" Fubiniovu větu, obdobnou lemmatu 15.10),

(C_4): λ je σ-konečná (to je triviální).

(D) Nyní podle věty 13.43 lze λ jednoznačně rozšířit na míru (kterou označíme) $\mu \otimes \nu$ na $\mathcal{S} \otimes \mathcal{M} = \sigma(\mathcal{Y}) = \sigma(\mathcal{D})$ a tuto dále zúplnit na míru $\mu \hat{\otimes} \nu$ na $\mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{M}$. Podle 13.47 dají metody (α), (β) tentýž výsledek.

15.18 Závěr. Buďte μ a ν σ-konečné (úplné) míry na $\mathcal{S}$ a $\mathcal{M}$. Označme $\mathcal{Y} = \{ A \times B \,;\, A \in \mathcal{S} \,,\, B \in \mathcal{M} \}$ a nechť $\mathcal{S} \otimes \mathcal{M}$ je σ-okruh generovaný systémem $\mathcal{Y}$. Potom existuje právě jedna míra $\mu \otimes \nu$ na $\mathcal{S} \otimes \mathcal{M}$ taková, že

$$A \in \mathcal{S} \;,\; B \in \mathcal{M} \Longrightarrow \mu \otimes \nu \,(A \times B) = \mu A \cdot \nu B \,.$$

Míra $\mu \otimes \nu$ není obecně úplná. Označme proto $\mu \hat{\otimes} \nu$ míru na $\mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{M}$, která ji zúplňuje.

D. CVIČENÍ A PROBLÉMY

(V dalším φ je neklesající funkce v E_1, λ^*_φ je vnější LS-míra a $\lambda_\varphi = \lambda^*_\varphi / \mathcal{m}_\varphi$.)

15.A **Cvičení.**

(A) Nechť $\varphi = 0$ na $(-\infty, 0)$, $\varphi = 1$ na $\langle 0, +\infty)$. Spočtěte $\lambda_\varphi(-1,0)$, $\lambda_\varphi(\{0\})$.

(B) Nalezněte φ tak, aby

$$\lambda_\varphi(a,b) < \varphi(b) - \varphi(a) < \lambda_\varphi(\langle a,b \rangle) \,.$$

15.B **Problém.** Nechť $\mathcal{Y}$ sestává z otevřených intervalů, dále položme $\mu_\varphi(a,b) = \varphi(b) - \varphi(a)$ a vytvořme vnější míru μ^*_φ z pokrývacího systému $(\mathcal{Y}, \mu_\varphi)$. Je pravda, že $\mu^*_\varphi = \lambda^*_\varphi$? Platí, že $\mu_\varphi = \mu^*_\varphi$ na $\mathcal{Y}$?

$\boxed{15.C}$ Problém. Každá neklesající funkce φ určuje jistý systém množin $\mathcal{M}_\varphi$. Víme, že vždy $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{M}_\varphi$ (každá borelovská množina je φ-měřitelná). Lze volit funkci φ tak, aby $\mathcal{B}_1 = \mathcal{M}_\varphi$? Lze volit φ tak, aby $\mathcal{M}_\varphi = \exp E_1$? (Viz též cvičení 12.E.)

$\boxed{15.D}$ Problém. Buď μ^* vnější míra v E_1. Ptáme se, zda existuje taková neklesající funkce φ, aby $\mu^* = \lambda^*_\varphi$.

(A) Nechť $\mathcal{U}$ sestává z otevřených intervalů v E_1, nechť μ je nezáporná funkce na $\mathcal{U}$ ($\mu\, \emptyset = 0$) a nechť vnější míra μ^* vytvořená z pokrývacího systému ($\mathcal{U}$, μ) je metrická a nechť $\mu^*(\langle a,b)) < +\infty$ pro každé $-\infty < a < b < +\infty$. Potom existuje neklesající (a spojitá zleva) funkce φ tak, že $\mu^* = \lambda^*_\varphi$. Dokažte!

(B) Ukažte, že vnější míra z 13.F.f není tvaru λ^*_φ !

(C) Viz též 14.C, poznámka (g).

$\boxed{15.E}$ Cvičení. Buď $G \subset E_1$ otevřená, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$, kde poslední intervaly jsou po dvou disjunktní a položme

$$\lambda_\varphi G = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(b_n-) - \varphi(a_n+)) .$$

Dále uspořádejme systém všech otevřených množin pomocí relace $\supset$. Je-li $A \subset E_1$, je systém všech otevřených nadmnožin množiny A usměrněný (viz cvičení 1.K) a

$$\lambda^*_\varphi A = \lim \lambda_\varphi G$$

(jedná se o zobecněnou limitu). Dokažte !

$\boxed{15.F}$ Cvičení. Ukažte, že

$$\mu^*_p A = \sup_{\varepsilon>0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} [d(A_i)]^p ;\ A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i ,\quad d(A_i) < \varepsilon \quad \text{pro každé } i \right\}$$

pro každou množinu $A \subset P$.

$\boxed{15.G}$ Cvičení. Co by se stalo, kdybychom při definici Hausdorffovy vnější míry vzali za systém $\mathcal{U}$ systém <u>všech</u> podmnožin prostoru P ?

$\boxed{15.H}$ Cvičení. Buď $H(x)$ nezáporná spojitá, neklesající funkce, definovaná na $\langle 0, +\infty\rangle$ ($= \langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$), $H(0) = 0$. Definujme systém $\mathcal{U}_n$ stejně jako v 15.5, pro $G \in \mathcal{U}$ položme $\lambda G = H(d(G))$ a vytvořme vnější míru λ^*_n z pokrývacího systému ($\mathcal{U}_n$, λ). Konečně položme

$$\mu^*_H(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda^*_n A .$$

Studujte vlastnosti funkce μ^*_H (je to vnější míra ?, je metrická, regulární ?).

(Poznamenejme, že Hausdorffovu míru obdržíme speciální volbou $H(x) = x^p$.) Lze vynechat předpoklady spojitosti či monotonie funkce H ?

15.I Cvičení. 1. Úvahy odstavců 14.7, 15.6 a předchozího cvičení nás vedou k následujícímu zobecnění.

Buď (P, ρ) metrický prostor, nechť $(\mathcal{V}, \lambda)$ je jeho nějaký pokrývací systém.

Pro $n \in N$ položme $\mathcal{V}_n = \left\{ G \in \mathcal{V} \; ; \; d(G) \le \frac{1}{n} \right\}$. Nechť λ^* je vnější míra vytvořená z pokrývacího systému $(\mathcal{V}, \lambda)$ a λ^*_n buďte vnější míry vytvořené z $(\mathcal{V}_n, \lambda)$.

Nechť konečně

$$\mu^* A = \lim_{n \to \infty} \lambda^*_n A \quad \text{pro } A \subset P .$$

(Proč existuje tato limita?) Ukažte (obdobně jako v 15.6), že

(A) μ^* je vnější míra,

(B) μ^* je metrická.

2. Jestliže každá množina ze systému $\mathcal{V}$ je borelovská (tj. $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}(P)$), potom

(C) μ^* je regulární vnější míra.

(Naleznete příklad, aby μ^* nebyla regulární?)

3. Jaký je vztah vnějších měr λ^* a μ^* ? Musí platit $\mu^* = \lambda^*$?

4.* Předpokládejme, že každá množina ze systému $\mathcal{V}$ je otevřená a že

$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, kde A_n jsou otevřené a $\mu^* A_n < +\infty$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) $A \in \mathcal{M}(\mu^*)$ (množina A je μ^*-měřitelná),

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists G$, G otevřená, $G \supset A$, $\mu^*(G - A) < \varepsilon$,

(iii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists F$, F uzavřená, $F \subset A$, $\mu^*(A - F) < \varepsilon$,

dokažte! Ukažte, že toto tvrzení zůstane v platnosti, píšeme-li všude λ^* místo μ^* !

5. Nechť ke každému $\varepsilon > 0$, ke každé množině $A \in \mathcal{V}$ a ke každému $n \in N$ existuje posloupnost $\left\{ A_n^k \right\}$, $A_n^k \in \mathcal{V}_n$ tak, že

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n^k \supset A , \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda (A_n^k) \le \lambda A + \varepsilon .$$

Potom $\lambda^* = \lambda^*_n = \mu^*$, dokažte ! (Aplikujte kupř. na Lebesgueovu míru, viz 14.6).

6. Jako netriviální ilustrující příklad můžete použít následující:

$P = E_1$, $\mathcal{V}$ = jednobodové množiny a otevřené intervaly v E_1 , $\lambda \emptyset = 0$,
$\lambda \{x\} = 1$, $\lambda (a,b) = \infty$.

Jak vypadá λ^* , μ^* , $\mathcal{M}(\mu^*)$?

7. Ukažte, že podmínky (i) - (iii) ve 4. nejsou ekvivalentní, volíme-li $P = E_2$, $\mu^* = \mu^*_1$ (viz 15.5).

15.J Příklady.

1. Je-li $P = E_1$, potom μ^*_1 je rovna vnější Lebesgueově míře.
2. Je-li $P = E_2$, $G \subset E_2$ otevřená a neprázdná, potom $\mu^*_1 G = \infty$.
3. Je-li $P = E_n$, $A \subset E_n$, potom $\mu^*_n A = 0$, právě když A má Lebesgueovu míru nula ($\lambda_n A = 0$).
4. Je-li $P = E_2$, $I \subset E_2$ otevřený čtverec, potom

$$\mu^*_2 I \leq 2\,\lambda_2 I \leq 2\,\mu^*_2 I \ .$$

15.K Cvičení. Je-li $\mu^*_p A < +\infty$, $q > p$, potom $\mu^*_p A = 0$. Dokažte !

15.L Hausdorffova dimense.

Na základě předchozího cvičení položme pro $A \subset P$

$$\dim A = \sup \left\{ p > 0 \ ; \ \mu^*_p A = +\infty \right\}$$

(výjimečně $\sup \emptyset = 0$) a číslo $\dim A$ nazvěme Hausdorffovou dimensí množiny A.
Ukažte, že

(1) $q > \dim A \implies \mu^*_q A = 0$,
$q < \dim A \implies \mu^*_q A = +\infty$,

(2) $U \subset E_1$ otevřená a neprázdná $\implies \dim U = 1$,

(3) je-li $A \subset E_1$ jednobodová, potom $\dim A = 0$; každá spočetná podmnožina E_1 má dimensi 0,

(4) je-li $A \subset E_1$, $\dim A = 0$, potom množina A má Lebesgueovu míru nula,

(5) $\dim A_k = p$ pro každé $k \implies \dim \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = p$,

(6) je-li $C \subset \langle 0,1 \rangle$ Cantorovo diskontinuum, potom

$$\dim C = \frac{\log 2}{\log 3} ,$$

(7) existují nespočetné podmnožiny E_1 dimense nula.

15.M Cvičení. Buďte $\mathcal{S}$, resp. $\mathcal{M}$ σ-okruhy v X, resp. Y. Označme, jako dříve, $\mathcal{S} \otimes \mathcal{M}$ σ-okruh v $X \times Y$, generovaný systémem $\mathcal{W} = \left\{ A \times B ; \ A \in \mathcal{S} , B \in \mathcal{M} \right\}$.
Nechť σ-okruhy $\mathcal{S}$, $\mathcal{M}$ jsou generovány systémy $\mathcal{Y}$, $\mathcal{W}$, tj.

$$\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{Y}) , \quad \mathcal{M} = \sigma(\mathcal{W}) .$$

Nechť dále $\mathcal{L} = \left\{ A \times B ; A \in \mathcal{Y} , B \in \mathcal{W} \right\}$.

Potom $\mathcal{S} \otimes \mathcal{M} = \sigma(\mathcal{L})$, dokažte !

Návod. Zřejmě $\mathcal{L} \subset \mathcal{S} \otimes \mathcal{M}$, tedy i $\sigma(\mathcal{L}) \subset \mathcal{S} \otimes \mathcal{M}$.

Pro důkaz obrácené inkluse uvažujte systém

$$\{T \subset Y ; E \times T \in \sigma(\mathcal{L})\} \quad \text{pro } E \in \mathcal{Y}.$$

15.N Cvičení. Buď $M \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{M}$. Pro $x \in X$, $y \in Y$ označme

$$M^{x,*} = \{y \in Y ; [x,y] \in M\},$$

$$M^{*,y} = \{x \in X ; [x,y] \in M\} \text{ (viz též 11.5).}$$

Potom $M^{x,*} \in \mathcal{M}$ a $M^{*,y} \in \mathcal{S}$ (pro každé $x \in X$, $y \in Y$).
Dokažte !

Návod. Uvažujte systém $\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{M} ; E^{x,*} \in \mathcal{M}$ pro všechna $x \in X\}$

a ukažte, že $\mathcal{A}$ je σ-okruh obsahující systém

$$\mathcal{Y} = \{A \times B ; A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{M}\}.$$

15.O Součin Lebesgueových měr.

Nechť λ_n znamená Lebesgueovu míru v E_n, $\mathfrak{M}_n$ systém všech lebesgueovsky měřitelných množin.

(A) Ukažte, že $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$

Návod. Ukažte, že $\{A \times B ; A,B \in \mathfrak{M}_1\} \subset \mathfrak{M}_2$.

(B) Ukažte, že $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$

Návod. Buď $x \in E_1$, $A \subset E_1$ neměřitelná množina.
Potom $\{x\} \times A \in \mathfrak{M}_2$ (neboť $\{x\} \times A \subset \{x\} \times E_1$ a poslední množina je je λ_2-nulová), zatímco $\{x\} \times A \notin \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$ podle 15.N.

(C) Ukažte, že $\mathfrak{M}_1 \widehat{\otimes} \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$.

Návod. Podle předchozího a podle 13.U je $\mathfrak{M}_1 \widehat{\otimes} \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$.
Stačí ukázat, že $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1 \widehat{\otimes} \mathfrak{M}_1$. Zřejmě každý otevřený interval v E_2 leží v $\mathfrak{M}_1 \widehat{\otimes} \mathfrak{M}_1$ (dokonce v $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$), tudíž též každá otevřená množina (jakožto sjednocení spočetně mnoha otevřených intervalů) leží v $\mathfrak{M}_1 \widehat{\otimes} \mathfrak{M}_1$, tedy $\mathcal{B}_2 \subset \mathfrak{M}_1 \widehat{\otimes} \mathfrak{M}_1$. Odtud, z 13.V a z 14.11(VI) plyne, že $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1 \widehat{\otimes} \mathfrak{M}_1$.

(D) Ukažte, že $\lambda_2 = \lambda_1 \widehat{\otimes} \lambda_1$.

Návod. Použijte větu o jednoznačnosti a vlastnosti λ_2.

(E) Problém. Platí rovnost $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$?

(F) Problém. Platí rovnost $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 = \mathcal{B}_2$?

15.P **Cvičení.** Předpokládejte, že existuje množina $A \subset X$, $A \notin \mathcal{S}$ a $\emptyset \neq B \in \mathcal{M}$, $\nu B = 0$. Ukažte, že míra $\mu \otimes \nu$ je na $\mathcal{S} \otimes \mathcal{M}$ neúplná.

Návod. Postupujte obdobně jako v 15.O.B.

15.Q **Cvičení.** Nechť μ_1, μ_2 jsou konečné míry na $\mathcal{S}$, ν_1, ν_2 konečné míry na $\mathcal{M}$, nechť $\mu_1 \leq \mu_2$ (tj. $\mu_1 A \leq \mu_2 A$ pro každé $A \in \mathcal{S}$), $\nu_1 \leq \nu_2$. Potom $\mu_1 \hat{\otimes} \nu_1 \leq \mu_2 \hat{\otimes} \nu_2$. Dokažte!

Návod. Uvažujte systém $\left\{ A \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{M} \; ; \mu_1 \hat{\otimes} \nu_1 \; (A) \leq \mu_2 \hat{\otimes} \nu_2 \; (A) \right\}$.
Lze předpoklad konečnosti měr nahradit předpokladem σ-konečnosti ?

VI. MĚŘITELNÉ FUNKCE

16. Teorie měřitelných funkcí

A. $\mathcal{S}$ - MĚŘITELNÉ FUNKCE

Přečtěte si upozornění na str. 191 (ohledně značení $\S$ po straně textu). Tuto kapitolu lze studovat bez znalosti kapitoly IV a pouze se znalostí několika základních definic z kapitoly V.

16.1 Definice. Řekneme, že dvojice $(X, \mathcal{S})$ je <u>měřitelný prostor</u>, jestliže $\mathcal{S}$ je <u>σ-algebra</u> podmnožin množiny X. <u>Množinám</u> ze systému $\mathcal{S}$ říkejme $\mathcal{S}$-měřitelné, či krátce měřitelné.

Častým příkladem měřitelného prostoru je dvojice $(X, \mathcal{M}(\mu^*))$, kde $\mathcal{M}(\mu^*)$ je systém všech μ^*-měřitelných podmnožin množiny X (viz 13.22).

V dalším předpokládejme, že je pevně zadán měřitelný prostor $(X, \mathcal{S})$.

16.2 Definice. Řekneme, že <u>funkce</u> $f : X \to E_1^*$ je <u>$\mathcal{S}$-měřitelná</u>, jestliže $\{x \in X;\ f(x) > c\} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1$. Systém všech $\mathcal{S}$-měřitelných funkcí značme symbolem $\Lambda(\mathcal{S})$.

16.3 Příklady.

(A) Buď $A \subset X$. Potom

$$c_A \text{ je } \mathcal{S}\text{-měřitelná, právě když } A \in \mathcal{S} .$$

Dokažte!

(B) Vybudujeme-li teorii Daniellova integrálu a je-li $P \in \mathcal{M}$, potom

$$f \in \Lambda \text{ , právě když } f \text{ je } \mathcal{M}\text{-měřitelná (viz 9.57).}$$

(C) Nechť f je konstantní zobrazení na X (tj. existuje $K \in E_1^*$ tak, že $f : x \to K$). Potom F je $\mathcal{S}$-měřitelná, dokažte !

(D) Nechť (X, ρ) je metrický prostor, nechť $\mathcal{S}$ obsahuje systém všech otevřených podmnožin prostoru X. Potom každá spojitá funkce na X je $\mathcal{S}$-měřitelná. Dokažte !

(E) Nechť (X, ρ) je metrický prostor, nechť $\mathcal{S} = \mathcal{B}(X)$ je systém všech borelovských množin (viz 13.7, 13.B). Potom funkcím $\mathcal{S}$-měřitelným říkejme borelovsky měřitelné či krátce borelovské (upozorňuji, že terminologie je zde značně rozkolísaná, viz též [Re-Pr], praktikum 6).

(F) Je-li $X = E_n$ a volíme-li za $\mathcal{S}$ systém všech lebesgueovsky měřitelných podmnožin E_n, říkáme funkcím $\mathcal{S}$-měřitelným lebesgueovsky měřitelné.

16.4 Věta. Následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) f je $\mathcal{S}$-měřitelná,

(ii) $\{x \in X;\ f(x) < c\} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1$,

(iii) $\{x \in X;\ f(x) \geq c\} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1$,

(iv) $\{x \in X;\ f(x) \leq c\} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1$.

Důkaz. (i) $\Longrightarrow$ (iii) : Buď $c \in E_1$. Potom

$$\{x \in X\ ;\ f(x) \geq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X\ ;\ f(x) > c - \frac{1}{n}\right\} \quad \text{a}$$

odtud již lehko plyne tvrzení (nezapomeňte, že $\mathcal{S}$ je σ-algebra).

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) : Pro každé $c \in E_1$ platí

$$\{x \in X\ ;\ f(x) < c\} = X - \{x \in X\ ;\ f(x) \geq c\}.$$

Ostatní implikace jsou obdobné.

16.5 Věta. Následující výroky jsou ekvivalentní:

(i) f je $\mathcal{S}$-měřitelná,

(ii) $f^{-1}(+\infty)$, $f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{S}$ a $f^{-1}(G) \in \mathcal{S}$ pro každou otevřenou množinu $G \subset E_1$,

(iii) $f^{-1}(+\infty)$, $f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{S}$ a $f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$ pro každou borelovskou množinu $B \subset E_1$.

[Uvědomte si, že

$$\{x \in X;\ f(x) > c\} = f^{-1}(+\infty) \cup \{x \in X;\ +\infty > f(x) > c\}\ !]$$

Důkaz. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Nechť f je $\mathcal{S}$-měřitelná. Potom

$$f^{-1}(+\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X\ ;\ f(x) > n\},$$

tedy $f^{-1}(+\infty) \in \mathcal{S}$. Obdobně $f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{S}$. Buď nyní $G \subset E_1$ otevřená množina. Existuje spočetný systém $\{(a_n, b_n)\}$ po dvou disjunktních intervalů tak, že $G = \bigcup_n (a_n, b_n)$. Potom

$$f^{-1}(G) = f^{-1}\left(\bigcup_n (a_n,b_n)\right) = \bigcup_n f^{-1}((a_n,b_n)) =$$

$$= \bigcup_n \left[\left\{ x \in X ; f(x) < b_n \right\} \cap \left\{ x \in X ; f(x) > a_n \right\}\right] ,$$

tedy $f^{-1}(G) \in \mathcal{S}$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii): Označme $\mathcal{L} = \left\{ A \subset E_1 ; f^{-1}(A) \in \mathcal{S} \right\}$. Podle předpokladu obsahuje systém $\mathcal{L}$ každou otevřenou podmnožinu v E_1 . Ukážeme-li, že $\mathcal{L}$ je σ-algebra, vyplyne odtud, že $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{L}$ (proč?), tj. $f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$ pro každou $B \in \mathcal{B}_1$. Buďte tedy $A_n \in \mathcal{L}$; ze vztahu

$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$ plyne, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$.

Obdobně se ukáže, že $A-B \in \mathcal{L}$, kdykoliv $A,B \in \mathcal{L}$.

(iii)$\Longrightarrow$(i): Buď $c \in E_1$, potom

$$\left\{x \in X ; f(x) > c\right\} = f^{-1}(+\infty) \cup f^{-1}((c,+\infty)),$$

tedy $f \in \Lambda(\mathcal{S})$ (uvědomte si, že libovolný interval je borelovská množina).

16.6 Poznámka. Z předchozího plyne, že v definici 16.2 a ve větě 16.4 jsme mohli výrok "pro každé $c \in E_1$" nahradit výrokem "pro každé $c \in E_1^*$ ".

16.7 Věta. Buďte $f,g \in \Lambda(\mathcal{S})$, buď $k \in E_1^*$. Potom množiny

$$\left\{x \in X ; f(x) > g(x)\right\}, \left\{x \in X ; f(x) \geq g(x)\right\}, \left\{x \in X ; f(x) = g(x)\right\},$$
$$\left\{x \in X ; f(x) = k\right\}, \left\{x \in X ; f(x) \in E_1\right\}$$

jsou $\mathcal{S}$-měřitelná.

Důkaz. Buďte $f,g \in \Lambda(\mathcal{S})$, potom

$$\left\{x \in X ; f(x) > g(x)\right\} = \bigcup_{r \text{ racionální}} \left[\left\{x ; f(x) > r\right\} \cap \left\{x ; g(x) < r\right\}\right] ,$$

$$\left\{x ; f(x) \geq g(x)\right\} = X - \left\{x ; f(x) < g(x)\right\} ,$$

$$\left\{x ; f(x) = g(x)\right\} = \left\{x ; f(x) \geq g(x)\right\} \cap \left\{x ; f(x) \leq g(x)\right\} ,$$

odkud postupně plyne, že uvedené množiny leží v $\mathcal{S}$.

Podle 16.3.C jsou konstantní funkce $\mathcal{S}$-měřitelné, tedy $\left\{x ; f(x) = k\right\} \in \mathcal{S}$ podle předešlého. Konečně podle 16.5 je množina $\left\{x ; f(x) \in E_1\right\} = f^{-1}(E_1)$ též $\mathcal{S}$-měřitelná.

16.8 Věta (vlastnosti $\mathcal{S}$-měřitelných funkcí)

(A) $f \in \Lambda(\mathcal{S})$, $c \in E_1 \Longrightarrow cf \in \Lambda(\mathcal{S})$,

(B) $f, g \in \Lambda(\varphi) \Longrightarrow f + g \in \Lambda(\varphi)$, přičemž chápeme funkci $f+g$ dodefinovanou v bodech, kde součet $f+g$ nemá smysl, pevnou (ale libovolnou) hodnotou z E_1^*,

(C) $f \in \Lambda(\varphi) \Longrightarrow |f| \in \Lambda(\varphi)$,

(D) $f, g \in \Lambda(\varphi) \Longrightarrow \max(f,g), \min(f,g) \in \Lambda(\varphi)$,

(E) $f, g \in \Lambda(\varphi) \Longrightarrow f.g \in \Lambda(\varphi)$,

(F) $f \in \Lambda(\varphi) \Longrightarrow \frac{1}{f} \in \Lambda(\varphi)$, přičemž funkci $\frac{1}{f}$ dodefinujeme v bodech, kde $f = 0$, jistou pevnou hodnotou z E_1^*.

Důkaz. (A) Proveďte sami.

(B) Nechť $f+g = B$ v bodech, kde součet $f+g$ nemá smysl.
Zvolme $c \in E_1$. Potom

$$\left\{x;\ f(x) + g(x) > c\right\} = \begin{cases} \left\{x;\ f(x) > c - g(x)\right\} & \text{pro } c \geq B, \\ \left\{x;\ f(x) > c - g(x)\right\} \cup \left[f^{-1}(+\infty) \cap g^{-1}(-\infty)\right] \cup \\ \cup \left[f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}(+\infty)\right] & \text{pro } c < B, \end{cases}$$

odkud podle 16.5 a 16.7 plyne tvrzení (uvědomte si, že funkce $c - g(x)$ je φ-měřitelná, neboť

$$\left\{x;\ c - g(x) > c'\right\} = \left\{x;\ g(x) < c - c'\right\}).$$

(C) Buď $c \in E_1$, potom

$$\left\{x;\ |f(x)| > c\right\} = \begin{cases} \left\{x;\ f(x) > c\right\} \cup \left\{x;\ f(x) < -c\right\} & \text{pro } c \geq 0, \\ X & \text{pro } c < 0. \end{cases}$$

(D) Plyne ihned z předchozího a ze vztahu

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g + |f-g|), \quad \min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g - |f-g|).$$

Můžete též použít rovnost

$$\left\{x;\ \max(f,g)(x) > c\right\} = \left\{x;\ f(x) > c\right\} \cup \left\{x;\ g(x) > c\right\}.$$

(E) Je-li $f \in \Lambda(\varphi)$, $f \geq 0$, je

$$\left\{x,\ f^2(x) > c\right\} = \begin{cases} X & \text{pro } c < 0, \\ \left\{x;\ f(x) > \sqrt{c}\right\} & \text{pro } c \geq 0, \end{cases}$$

tedy $f^2 \in \Lambda(\varphi)$.

Je-li $f \in \Lambda(\varphi)$, plyne $f^2 \in \Lambda(\varphi)$ podle předchozího s pomocí rovnosti $f^2 = |f|^2$. Jsou-li konečně $f, g \in \Lambda(\varphi)$, je
$f.g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$, tudíž $f.g \in \Lambda(\varphi)$.

(F) Opět dokažte sami.

16.9 **Věta** (posloupnosti $\mathcal{S}$ -měřitelných funkcí).

Buďte $f_n \in \Lambda(\mathcal{S})$ $(n=1,2,\ldots)$. Potom funkce

(a) $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$, $\liminf f_n$,

(b) $\lim f_n$ (pokud existuje)

jsou $\mathcal{S}$ -měřitelné.

Důkaz. Buď $c \in E_1$, potom

$$\left\{x;\ \sup f_n(x) > c\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x;\ f_n(x) > c\right\} .$$

Sami již lehko dokážete všechna tvrzení.

B. JEDNODUCHÉ FUNKCE

16.10 **Definice.** Řekneme, že funkce $f : X \to E_1$ (konečná !) je *jednoduchá*, jestliže je $\mathcal{S}$ -měřitelná a jestliže množina $f(X)$ je konečná (tj. nabývá-li f pouze konečně mnoha hodnot).

16.11 **Příklady.**

(A) Charakteristická funkce libovolné měřitelné množiny je jednoduchá.

(B) Jsou-li $E_1,\ldots,E_n \in \mathcal{S}$, $d_1,\ldots,d_n \in E_1$, $f = \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot c_{E_i}$, je f jednoduchá.

(C) Naopak, je-li f jednoduchá, $f(X) = \left\{d_1,\ldots,d_n\right\}$ (můžeme hned předpokládat, že $d_1,\ldots,d_n$ jsou navzájem různá), potom $f = \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot c_{E_i}$, kde $E_i = \left\{x \in X;\ f(x) = d_i\right\}$ jsou měřitelné, po dvou disjunktní množiny.

(D) Zvolíme-li $X = E_1$, $\mathcal{S} = \mathcal{B}_1$, je Dirichletova funkce jednoduchá. Dokažte!

16.12 **Věta** (vlastnosti jednoduchých funkcí).

Buďte f,g jednoduché funkce, $c \in E_1$. Potom funkce cf, $f+g$, $|f|$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$, f^+, f^-, $f.g$ jsou jednoduché.

Důkaz. Proveďte sami.

16.13 **Věta.** Buď $f \in \Lambda(\mathcal{S})$. Potom existuje posloupnost $\left\{s_n\right\}$ jednoduchých funkcí taková, že

(1) $|s_1| \leq |s_2| \leq |s_3| \leq \ldots$ na X ,

(2) $s_n \to f$ na X .

Je-li navíc $f \geq 0$, lze volit $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots$.

Důkaz. Nechť $f \geq 0$. Položme pro $n \in N$, $1 \leq i \leq n2^n$

$$E_n^i = \left\{ x \in X ; \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}, \quad F_n = \left\{ x \in X ; n \leq f(x) \right\} .$$

(Kreslete !)

Buď n pevné. Potom množiny E_n^i, F_n jsou po dvou disjunktní, měřitelné, $\bigcup_{i=1}^{n2^n} E_n^i \cup F_n = X$. Definujme funkci s_n

$$s_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n} & \text{pro } x \in E_n^i , \\ n & \text{pro } x \in F_n . \end{cases}$$

Potom $s_n \geq 0$ jsou jednoduché. Je-li $f(x) < n$, je $0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}$; je-li $f(x) = +\infty$, je $s_n(x) = n$. Tedy $s_n \to f$. Lehko dokážete, že $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots$.

Je-li nyní f libovolná $\mathcal{S}$-měřitelná, nalezneme posloupnost $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ jednoduchých funkcí tak, aby

$$0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots, \quad 0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \dots$$

$$p_n \to f^+ , \quad q_n \to f^- .$$

Položíme-li $s_n = p_n - q_n$, jsou funkce s_n jednoduché, $s_n \to f$. Zbývá dokázat monotonii. Buď tedy $x \in X$, nechť $f(x) \geq 0$. Potom $f^-(x) = 0$, tedy $q_n(x) = 0$ pro všechna n a

$$|s_n(x)| = |p_n(x) - q_n(x)| = p_n(x) \leq p_{n+1}(x) = |s_{n+1}(x)| .$$

C. CVIČENÍ A PROBLÉMY

$\boxed{16.A}$ Cvičení. Buď $(X, \mathcal{S})$ měřitelný prostor, $E \in \mathcal{S}$. Položíme-li $\mathcal{S}_E = \{ F \in \mathcal{S} ; F \subset E \}$, je $(E, \mathcal{S}_E)$ měřitelný prostor. Ukažte !

$\boxed{16.B}$ Cvičení.

(a) Buď X množina, $\mathcal{S} = \{ \emptyset, X \}$. Zkoumejte, které funkce na X jsou $\mathcal{S}$-měřitelné.

(b) Nechť $\mathcal{S} = \exp X$. Jak vypadá systém $\Lambda(\mathcal{S})$?

(c) Volte za měřitelný prostor dvojici $(X, \mathcal{M}(\mu^*))$, kde $\mathcal{M}(\mu^*)$ určíte podle 13.F. Podejte vždy charakteristiku $\mathcal{M}(\mu^*)$- měřitelných funkcí.

$\boxed{16.C}$ Cvičení.

(a) Nechť φ je borelovsky měřitelná reálná funkce (tj. $\varphi^{-1}((a, +\infty))$ je borelovská množina pro každé $a \in E_1$).

Buď f reálná, $\mathcal{S}$-měřitelná funkce na X. Potom $\varphi * f \in \Lambda(\mathcal{S})$, dokažte!

(b) Jak by bylo možné modifikovat (a) i pro funkce nabývající nekonečných hodnot ?

(c) Speciální volbou funkce φ ukažte, že funkce $f + k$, cf, $|f|^p$, f^2, $\frac{1}{f}$ $(k, c \in E_1,\ p > 0)$ jsou $\mathcal{S}$-měřitelné, je-li f $\mathcal{S}$-měřitelná.

$\boxed{16.D}$ Cvičení.

Volme $X = E_1$, $\mathcal{S}$-lebesgueovsky měřitelné množiny v E_1.

(a) Jsou-li f, φ lebesgueovsky měřitelné funkce, nemusí být funkce $\varphi * f$ měřitelná. Ukažte a porovnejte s 16.C.

Návod. Viz 10.F.h.

(b) Je-li h prostá a měřitelná, nemusí být h^{-1} měřitelná. Ukažte!

Návod. Uvažujte funkci f z 10.F.d a definujte

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in M, \\ 1+f(x) & \text{pro } x \in \langle 0,1\rangle - M, \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} h(x-1)+1, & \text{je-li } x - 1 \in M, \\ h(x-1)-1, & \text{je-li } x - 1 \in \langle 0,1\rangle - M. \end{cases}$$

$\boxed{16.E}$ Cvičení.

(a) Nechť f je konečná $\mathcal{S}$-měřitelná funkce na X. Pro $t \in E_1$ položte

$$B(t) = \{x \in X ;\ f(x) \le t\}$$

a ukažte, že

(1) $s < t \Rightarrow B(s) \subset B(t)$,

(2) $\bigcup_{t \in E_1} B(t) = X$, $\bigcap_{t \in E_1} B(t) = \emptyset$

(3) $\bigcap_{t > s} B(t) = B(s)$ pro každé $s \in E_1$

(využili jste vůbec předpoklad $f \in \Lambda(\varphi)$?).

(b) Nechť $\{B(t)\}_{t \in E_1}$ je systém podmnožin množiny X mající vlastnosti (1),(2),(3). Potom existuje právě jedna funkce f na X taková, že

$$B(t) = \left\{ x \in X \; ; \; f(x) \leq t \right\} \text{ pro každé } t \in E_1 .$$

Je f konečná ? Je f $\mathcal{S}$-měřitelná? Dokažte!

Návod. Položte $f(x) = \inf \left\{ t;\; x \in B(t) \right\}$.

16.F Cvičení. Buď $f \in \Lambda(\mathcal{S})$. Potom $\dfrac{|f|}{1 + |f|} \in \Lambda(\mathcal{S})$. Dokažte !

16.G Cvičení. Dokažte Luzinovu větu (viz 11.B), která udává charakteristiku lebesgueovsky měřitelných funkcí v E_n .

16.H Cvičení. Buďte $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{M})$ dva měřitelné prostory. Nechť $f \in \Lambda(\mathcal{S})$, $g \in \Lambda(\mathcal{M})$, $h(x,y) = f(x).g(y)$ pro $x \in X$, $y \in Y$. Potom $h \in \Lambda(\mathcal{S} \otimes \mathcal{M})$ (viz 15.15). Dokažte !

16.I Cvičení. V [Re-Pr] je celé praktikum 20 věnováno tzv. obecné $\mathfrak{M}$-měřitelnosti. Podívejte se na ně !

17. Prostory s mírou

A. PROSTOR S MÍROU

17.1 Definice. Trojici $(X, \mathcal{S}, \mu)$ nazveme prostorem s mírou, jestliže

(1) $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor,

(2) μ je úplná míra na $\mathcal{S}$.

Symbolem $\mathcal{N}(\mu)$ označme systém všech μ-nulových množin, tj.

$$\mathcal{N}(\mu) = \{ A \subset X ; A \in \mathcal{S} , \mu A = 0 \} .$$

Zřejmě systém $\mathcal{N}(\mu)$ je σ-ideál (viz 13.21).

17.2 Poznámky.

(A) Nejdůležitějším příkladem prostoru s mírou je trojice $(X, \mathcal{M}(\mu^*), \mu^*)$ (viz definice 13.22, 13.24, 13.25).

(B) Trojice $(P, \mathcal{M}, \mu)$ v případě $P \in \mathcal{M}$ z teorie Daniellova integrálu je prostor s mírou.

(C) Uvědomte si, že v tomto odstavci se již spojují pojmy míra - měřitelné funkce.

17.3 Definice (pojem skoro všude).

Nechť $V(x)$ je výrok, týkající se prvků množiny X.

Řekneme, že výrok $V(x)$ platí skoro všude (či přesněji μ-skoro všude), jestliže množina $A = \{ x \in X ; V(x) \text{ neplatí} \}$ leží v $\mathcal{S}$ a $\mu A = 0$.

17.4 Příklady.

(A) Buďte $f, g : X \longrightarrow E_1^*$. Potom "$f = g$ skoro všude", jestliže množina $\{ x \in X ; f(x) \neq g(x) \}$ je μ-nulová. V tomto případě též říkáme, že funkce f, g jsou ekvivalentní (viz dále 17.5) a píšeme $f \sim g$.

(B) Výrokem "funkce f je skoro všude konečná na X" rozumíme, že množina $\{ x \in X ; |f(x)| = +\infty \}$ je μ-nulová.

(C) Řekneme-li "$f_n \longrightarrow f$ skoro všude", rozumíme tím, že existuje μ-nulová množina N tak, že $f_n \longrightarrow f$ na $X - N$.

17.5 **Věta.** Vztah "$f = g$ skoro všude" je ekvivalence na množině všech funkcí v X.

Důkaz. Obtížnější je pouze důkaz transitivity. Nechť tedy $f \sim g$, $g \sim h$. Potom ze vztahu

$$\{x;\ f(x) \neq h(x)\} \subset \{x;\ f(x) \neq g(x)\} \cup \{x;\ g(x) \neq h(x)\}$$

a z úplnosti míry μ plyne tvrzení.

17.6 **Věta.** Nechť $f \in \Lambda(\mathcal{S})$, $g \sim f$. Potom $g \in \Lambda(\mathcal{S})$.

Důkaz. Označme $A = \{x \in X;\ f(x) \neq g(x)\}$ a zvolme $c \in E_1$. Potom

$$\{x \in X;\ g(x) > c\} = \{x \in A;\ g(x) > c\} \cup \{x \in X - A;\ g(x) > c\} =$$
$$= \{x \in A;\ g(x) > c\} \cup \{x \in X - A;\ f(x) > c\} =$$
$$= \{x \in A;\ g(x) > c\} \cup \left[\{x \in X;\ f(x) > c\} \cap (X-A)\right] \in \mathcal{S} .$$

17.7 **Poznámka** (přečtěte si též 9.33). Na základě předchozí věty učiníme následující úmluvu. Nechť f je funkce definovaná pouze skoro všude na X, tj. nechť existuje μ-nulová množina $N \subset X$, na které f není definovaná. Dodefinujeme-li funkci f na množině N, bude či nebude dodefinovaná funkce $\mathcal{S}$-měřitelná, nezávisle na tom, jakým způsobem f dodefinujeme. Přesněji, nechť F_1, F_2 jsou funkce na X, $F_1/X-N = F_2/X-N = f$. Je-li $F_1 \in \Lambda(\mathcal{S})$, je i $F_2 \in \Lambda(\mathcal{S})$ (vysvětlete!).

Říkejme tedy, že funkce f, definovaná pouze skoro všude na X, je $\mathcal{S}$-měřitelná, jestliže libovolným způsobem dodefinovaná funkce f na celém X je $\mathcal{S}$-měřitelná.

B. CVIČENÍ A PROBLÉMY

17.A **Cvičení.** Buď $(X, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s mírou, $E \in \mathcal{S}$. Položte

$$\mathcal{S}_E = \{A \in \mathcal{S};\ A \subset E\}, \quad \mu_E = \mu / \mathcal{S}_E$$

a ukažte, že $(E, \mathcal{S}_E, \mu_E)$ je prostor s mírou.

17.B **Cvičení.**

Dokazujte následující tvrzení:

(a) $f_n \to f$ sk.vš., $f_n \to g$ sk.vš. $\Longrightarrow f \sim g$,

(b) $f_n \to f$ sk.vš., $g \sim f \Longrightarrow f_n \to g$ sk.vš.,

(c) $f_n \to f$ sk.vš., $g_n \sim f_n \Longrightarrow g_n \to f$ sk.vš.,

(d) $f_n \to f$ sk.vš., $c \in E_1 \Longrightarrow cf_n \to cf$ sk.vš.,

(e) $f_n \to f$ sk.vš., $g_n \to g$ sk.vš., f_n, g_n, f, g konečné $\Longrightarrow$ $f_n + g_n \to f + g$ sk.vš.,

(f) $f_n \to f$ sk.vš., $A \subset X \Longrightarrow c_A f_n \to c_A f$ sk.vš.,

(g) $f_n \in \Lambda(\mathcal{S})$, $f_n \to f$ sk.vš. $\Longrightarrow f \in \Lambda(\mathcal{S})$,

(h) $f_n \to f$ sk.vš., $f_n \geq 0$ sk.vš. $\Longrightarrow f \geq 0$ sk.vš.

17.C Cvičení.

(a) Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, nechť $0 < \mu X < +\infty$ a nechť míra μ nabývá pouze konečně mnoha nezáporných hodnot. Potom existují po dvou disjunktní množiny $E_i, F \in \mathcal{S}$ a reálná kladná čísla $a_1, \dots, a_n$ tak, že

$$X = E_1 \cup \dots \cup E_n \cup F , \quad \mu E_i = a_i , \mu F = 0$$

a je-li $A \in \mathcal{S}$, $A \subset E_i$, pak $\mu A = 0$ anebo $\mu A = a_i$. Dokažte!

(b) Je rozklad prostoru X z (a) v nějakém smyslu jednoznačný ?

Návod. Zkuste volit X nespočetnou, $\mathcal{S} = \{A \subset X ;\ A$ spočetná či $X - A$ spočetná$\}$, $\mu A = 0$ pro A spočetnou, $\mu A = 1$ pro $X - A$ spočetnou.

17.D Jegorovova věta.

(1) Buď $(X, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s mírou, nechť $\mu X < +\infty$. Buďte f_n, f $\mathcal{S}$-měřitelné funkce na X, skoro všude konečné, nechť $f_n \to f$ sk.všude. Potom

$\forall \varepsilon > 0\ \exists E \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu E < \varepsilon$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $X - E$.

Dokažte!

Návod. Položte $X_0 = \{x \in X;\ f_n(x)$ nekonverguje k $f(x)\} \cup \{x \in X;$ některá z hodnot $f_n(x)$, $f(x)$ je nekonečná$\}$. Zřejmě $\mu X_0 = 0$. Nechť dále

$E_n^i = \left\{ x \in X - X_0;\ |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{i} \text{ pro } m \geq n \right\}$, $n, i \in N$.

Zřejmě $E_m^i \in \mathcal{S}$, $E_n^i \subset E_{n+1}^i$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^i = X - X_0$ pro každé i.

Tudíž $\lim_{n \to \infty} \mu E_n^i = \mu(X - X_0) = \mu X$. Zvolte $\varepsilon > 0$ a nalezněte $n(i)$

tak, aby $\mu E_{n(i)}^i > \mu X - \frac{\varepsilon}{2^i}$ a položte $E = X - \bigcap_{i=1}^{\infty} E_{n(i)}^i$.

Potom $E \in \mathcal{S}$,

$$\mu E \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(X - E_{n(i)}^i) \leq \varepsilon , \quad f_n \rightrightarrows f \text{ na } X - E$$

(pro $x \in X - E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_{n(i)}^i$, $m > n(i)$ je $|f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{i}$).

(2) Ukažte na příkladě, že předpoklad $\mu X < +\infty$ je v Jegorovově větě podstatný.

(3) Platila by Jegorovova věta, kdybychom vynechali předpoklad úplnosti míry μ ?

(4) Nechť jsou splněny předpoklady Jegorovovy věty, potom existují množiny $E_i \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu(X - \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 0$ a $f_n \rightrightarrows f$ na každé množině E_i. Dokažte !

Návod. Aplikujte Jegorovovu větu a nalezněte $E_i \in \mathcal{S}$ tak, aby

$$\mu(X - \bigcup_{i=1}^{n} E_i) < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad f_n \rightrightarrows f \quad \text{na } E_i .$$

(5) Ukažte, že předpoklad $\mu X < +\infty$ ze (4) lze nahradit předpokladem, že X má σ-konečnou míru.

(6) Nechť jsou splněny předpoklady Jegorovovy věty. Buď $\delta > 0$ a označme $A_n(\delta) = \{ x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| \geq \delta \}$. Potom $\lim_{n\to\infty} \mu A_n(\delta) = 0$, dokažte !

Poznámka. Platí-li pro posloupnost funkcí $\{f_n\}$, že $\lim \mu A_n(\delta) = 0$ pro každé $\delta > 0$, říkáme, že posloupnost f_n konverguje k f podle míry μ a píšeme $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Jaké tvrzení můžeme nyní získat z (1) a (6) ?

(7) Ukažte, že výrok " $\mu E < \varepsilon$ " v Jegorovově větě nelze nahradit " $\mu E = 0$ " .

(8) Je-li $X \subset E_r$ (a $\lambda_r X < +\infty$), lze volit v (1) množinu E otevřenou. Dokažte !

17.E Sjednocení prostorů s mírou.

(a) Nechť X je množina , $X_i \subset X$ ($i \in I$, kde I je libovolná množina), $\bigcup_{i\in I} X_i = X$, $X_i \cap X_j = \emptyset$ pro $i \neq j$. Předpokládejme dále, že $(X_i, \mathcal{S}_i, \mu_i)$ jsou prostory s mírou. Chceme najít σ-algebru $\mathcal{S} \subset \exp X$ a míru μ na $\mathcal{S}$ tak, aby $(X, \mathcal{S}, \mu)$ byl prostor s mírou a aby míra μ byla v nějakém přirozeném vztahu k mírám μ_i .

Položme tedy $\mathcal{S} = \{ E \subset X ;\ E \cap X_i \in \mathcal{S}_i \text{ pro každé } i \in I \}$

a $\mu E = \sum_{i\in I} \mu_i(E \cap X_i)$ pro $E \in \mathcal{S}$ (jedná se o zobecněný součet, viz cvičení 9.J).

Dokažte, že $\mathcal{S}$ je σ-algebra a μ míra na $\mathcal{S}$. Zkoumejte vlastnosti míry μ konečnost, σ-konečnost, úplnost) , případně v závislosti na vlastnostech měr μ_i a na mohutnosti množiny I .

(b) Porovnejte též se cvičením 13.X.a.

(c) Nechť I je množina přirozených čísel, zkuste též položit

$$\hat{\mu} E = \sum_{i\in I} \frac{1}{2^i} (E \cap X_i).$$

(d) Pokuste se odstranit předpoklad $X_i \cap X_j = \emptyset$.

VII. LEBESGUEŮV INTEGRÁL

18. Teorie integrálu (na základě míry)

Obsah: A. Základní prostor ($\mathcal{L}_\mu$, $\int_X f \, d\mu$).

B. Aplikace Daniellovy metody.

C. Teorie integrálu na základě míry.

D. Cvičení a problémy.

A. ZÁKLADNÍ PROSTOR ($\mathcal{L}_\mu$, $\int_X f \, d\mu$)

V celé kapitole 18 předpokládejme, že je dán prostor s mírou (X, $\mathcal{S}$, μ). Zopakujte si jeho základní vlastnosti, jakožto i vlastnosti $\mathcal{S}$ -měřitelných funkcí.

18.1 Definice. Pro libovolnou numerickou funkci f na X označme

$$N(f) = \{ x \in X \; ; \; f(x) \neq 0 \} \quad {}^{+)}$$

Dále označme symbolem $\mathcal{L}_\mu$ množinu všech jednoduchých funkcí na X (viz 16.10), pro něž $\mu N(f) < +\infty$ (podle 16.7 je $N(f) \in \mathcal{S}$ pro každou $\mathcal{S}$ -měřitelnou funkci f).

Je-li tedy $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_{B_i}$ (kde $\alpha_i \neq 0$, $B_i \in \mathcal{S}$ jsou po dvou disjunktní), potom

$$f \in \mathcal{L}_\mu \text{ , právě když } \mu \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) < +\infty .$$

18.2 Věta (vlastnosti systému $\mathcal{L}_\mu$).
Jsou-li $f, g \in \mathcal{L}_\mu$, $c \in E_1$, potom i funkce

$$cf, \; f+g, \; \max(f,g) , \; \min(f,g) , \; |f| , \; f^+, \; f^-, \; f.g$$

leží v systému $\mathcal{L}_\mu$.

Důkaz. Proveďte sami (viz též 16.12).

+) Nepleťte s nosičem funkce, který jsme zavedli v 8.2 a označili tam N_f . Podotýkáme však, že mnozí autoři říkají právě množině N(f) nosič funkce f .

18.3 Lemma. Nechť pro funkci $f \in \mathcal{Z}_\mu$ platí

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_{A_i} = \sum_{j=1}^{k} \beta_j c_{B_j} ,$$

kde $\alpha_i, \beta_j \in E_1$, $A_i \in \mathcal{S}$ jsou po dvou disjunktní a $B_j \in \mathcal{S}$ také (uvědomte si, že vyjádření f v uvedeném tvaru není jednoznačné !) .
Potom

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu A_i = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \mu B_j .$$

Důkaz. Předpokládejme, že $f(X) = \{ d_1, \ldots, d_p \}$ (a čísla d_i jsou po dvou různá), $E_i = \{ x \in X;\ f(x) = d_i \}$.
Potom $f = \sum_{i=1}^{p} d_i c_{E_i}$ a množiny E_i jsou po dvou disjunktní.
Uvědomte si nyní, že nemůže být $A_i \cap E_s \neq \emptyset \neq A_i \cap E_t$ pro $s \neq t$ (proč?).
Takže

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu A_i = \sum_{j=1}^{p} \Big(\sum_{\{i;\, A_i \subset E_j\}} \alpha_i \mu A_i \Big) = \sum_{j=1}^{p} d_j \mu E_j .$$

Obdobně

$$\sum_{j=1}^{k} \beta_j \mu B_j = \sum_{j=1}^{p} d_j \mu E_j .$$

18.4 Definice. Pro $f \in \mathcal{Z}_\mu$, $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_{A_i}$ ($\alpha_i \in E_1$, $A_i \in \mathcal{S}$ po dvou disjunktní) definujeme <u>integrál</u> $\int_X f\, d\mu$ funkce f přes množinu X předpisem

$$\int_X f\, d\mu \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu A_i .$$

Podle předešlého lemmatu nezávisí definice $\int_X f\, d\mu$ na "vyjádření" funkce f (vysvětlete !).

18.5 Poznámky.

(A) Kupříkladu tedy $\int_X c_A\, d\mu = \mu A$ pro $A \in \mathcal{S}$, $\mu A < +\infty$.

(B) Poslední vztah nás ostatně v kapitole o Daniellově rozšíření vedl k definici míry množiny. Nezapomeňte ovšem, že tam jsme měli nejdříve definován integrál a teprve potom jsme zavedli pojem míry; nyní jsme na tom přesně obráceně, známe míru a chceme definovat integrál.

(C) Různí autoři používají při definici integrálu z jednoduchých funkcí různé definice (které jsou, samozřejmě, ekvivalentní), z nichž každá má po stránce metodické jisté výhody i nevýhody. Upozorněme na ně.

1. Vyjádření $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_{A_i}$ je jednoznačné, uvažujeme-li "maximální" množiny A_i (tj. $A_i \in \mathcal{S}$ po dvou disjunktní, $\alpha_i \neq \alpha_j$ pro $i \neq j$). Pak ovšem můžeme definovat

$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu A_i$ a nemusíme se starat o korektnost definice (viz 18.3, při jehož důkazu jsme tuto definici použili). Přijmeme-li tuto definici, dá nám potom trochu více práce dokázat linearitu integrálu (viz 18.6).

2. Při vyjádření $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_{A_i}$ se nemusí požadovat, aby množiny A_i byly po dvou disjunktní. Můžeme opět stejně definovat integrál, musíme dát ovšem pozor, aby součet $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu A_i$ měl smysl. Tak tomu bude vždy v případě, kdy $\mu X < +\infty$. Není-li tomu tak, musíme se při definici integrálu omezit na taková vyjádření f , kde $\mu A_i < +\infty$ pro každé i .

3. Poznamenejme konečně, že se můžeme omezit pouze na případ $f \geq 0$.

$\boxed{18.6}$ Věta (vlastnosti $\mathcal{L}_\mu$ a $\int_X f \, d\mu$)

Systém $\mathcal{L}_\mu$ a integrál $\int_X f \, d\mu$ mají následující vlastnosti:

(1) $f \in \mathcal{L}_\mu \implies f$ konečná,

(2) $f, g \in \mathcal{L}_\mu$, $\alpha, \beta \in E_1 \implies \alpha f + \beta g \in \mathcal{L}_\mu$,

(3) $f \in \mathcal{L}_\mu \implies |f| \in \mathcal{L}_\mu$,

(4) $\int_X f \, d\mu$ je konečný pro $f \in \mathcal{L}_\mu$,

(5) $f \in \mathcal{L}_\mu$, $f \geq 0 \implies \int_X f \, d\mu \geq 0$,

(6) $f, g \in \mathcal{L}_\mu$, $\alpha, \beta \in E_1 \implies$

$$\implies \int_X (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu ,$$

(7) $f_n \in \mathcal{L}_\mu$, $f_n \searrow 0 \implies \int_X f_n \, d\mu \longrightarrow 0$

(**některé ze zde uvedených vlastností jsou triviální, jsou však uvedeny kvůli aplikaci Daniellovy metody**).

Důkaz. Tvrzení (1) - (5) jsou zřejmá.

(6) Nechť $f = \sum_{i=1}^{n} a_i c_{A_i}$, $g = \sum_{j=1}^{k} b_j c_{B_j}$

($A_i \in \mathscr{S}$ a $B_j \in \mathscr{S}$ vždy po dvou disjunktní).

Položme $C_i^j = A_i \cap B_j$. Potom $C_i^j \in \mathscr{S}$ a tyto množiny jsou po dvou disjunktní. Přitom na množině C_i^j jest $\alpha f + \beta g = \alpha a_i + \beta b_j$; tedy

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (\alpha a_i + \beta b_j)\, \mu C_i^j =$$

$$= \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X g\, d\mu$$ (proveďte podrobně!, uvědomte si, že může být $C_i^j = \emptyset$).

(7) Označme $Q = N(f_1) = \{ x \in X;\ f_1(x) \neq 0 \}$,

$K = \max \{ f_1(x);\ x \in X \}$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Položíme-li

$F_n = \{ x \in X;\ f_n(x) \geq \varepsilon \}$, jest $F_n \subset Q$, $F_{n+1} \subset F_n$,

$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$, tudíž $\mu F_n \longrightarrow 0$.

Protože dále

$$f_n = c_Q f_n = c_{Q-F_n} f_n + c_{F_n} f_n \leq \varepsilon c_{Q-F_n} + K c_{F_n} \leq \varepsilon c_Q + K c_{F_n}$$

(nezapomeňte, že $f_n < \varepsilon$ na $X - F_n$ a $f_n \leq K c_Q$), obdržíme

$$0 \leq \int_X f_n\, d\mu \leq \varepsilon \mu Q + K \mu F_n .$$

Odtud již lehko plyne tvrzení (jak?).

$\boxed{18.7}$ Cvičení. Ukažte dále, že platí :

(8) $f \in \mathscr{L}_\mu$, $f \geq 0$ μ-skoro všude (viz 17.3) $\Longrightarrow \int_X f\, d\mu \geq 0$,

je-li navíc $\int_X f\, d\mu = 0$, je $f = 0$ μ-skoro všude,

(9) $f, g \in \mathscr{L}_\mu$, $f = g$ μ-skoro všude $\Longrightarrow \int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu$,

(10) $f_n, f \in \mathscr{L}_\mu$, $f_n \nearrow f \Longrightarrow \int_X f_n\, d\mu \longrightarrow \int_X f\, d\mu$.

Návod. (8) Nechť $f = \sum_{i=1}^{n} a_i c_{A_i}$, kde $a_1, \dots, a_n$ jsou nenulové a navzájem různé. Je-li $a_i < 0$, je nutně $\mu A_i = 0$. Tedy $a_i \mu A_i \geq 0$ pro každé i .

(9) Položte $G = g - f$ a aplikujte předchozí.

(10) Položte $F_n = f - f_n$ a využijte (7) z 18.6.

B. APLIKACE DANIELLOVY METODY

Z předešlé věty vidíme, že dvojice $(\mathcal{Z}_\mu, \int_X f\, d\mu)$ má všechny vlastnosti základního prostoru (viz 9.1). Můžeme proto aplikovat Daniellovu metodu z kapitoly 9; obdržíme systémy funkcí $\mathcal{L}_\mu$, $\mathcal{L}^*_\mu$ a Λ_μ, systém měřitelných množin $\mathcal{M}_\mu$ a míru μ_μ. Platí o nich samozřejmě všechny příslušné věty oné kapitoly.

Podstatná je přitom následující věta.

18.8 Věta. Předpokládejme, že míra μ (z trojice $(X, \mathcal{S}, \mu)$) je **σ-konečná.** Potom

$$\Lambda_\mu = \Lambda(\mathcal{S}), \quad \mathcal{M}_\mu = \mathcal{S}, \quad \mu_\mu = \mu$$

Důkaz. Rozdělme důkaz do několika kroků.

1. $\Lambda(\mathcal{S}) \subset \Lambda_\mu$. Buď $f \in \Lambda(\mathcal{S})$. Potom existují $f_n \in \mathcal{Z}_\mu$, $f_n \to f$ (viz 16.13 a 18.10). Tedy $f_n \in \Lambda_\mu$ ($\mathcal{Z}_\mu \subset \Lambda_\mu$) a $f \in \Lambda_\mu$ (viz 9.42.g).

2. $M \in \mathcal{S} \Longrightarrow c_M \in \mathcal{Z}_\mu^R$ a $\mu M = \int_X c_M\, d\mu$. Tvrzení je zřejmé pro $\mu M < +\infty$ (neboť potom $c_M \in \mathcal{Z}_\mu$). Obecně nalezněte množiny $X_n \in \mathcal{S}$, $\mu X_n < +\infty$ tak, aby $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ a $X_1 \subset X_2 \subset \dots$. Potom $c_{M \cap X_n} \nearrow c_M$, tudíž $c_M \in \mathcal{Z}_\mu^R$ a

$$\int_X c_M\, d\mu = \lim \int_X c_{M \cap X_n}\, d\mu = \lim \mu(M \cap X_n) = \mu M .$$

3. $\widetilde{\int} c_M\, d\mu = 0 \Longrightarrow M \in \mathcal{S}, \mu M = 0$. Nalezněme $f_n \in \mathcal{Z}_\mu^R$, $f_n \geq c_M$ tak, aby $\int_X f_n\, d\mu \leq \frac{1}{n}$ a položme

$$M_n = \{ x \in X;\ f_n(x) \geq 1 \} .$$

Potom $M_n \in \mathcal{S}$ (neboť $\mathcal{Z}_\mu^R \subset \Lambda(\mathcal{S})$), $M \subset M_n$ a podle předešlého

$\mu M_n = \int_X c_{M_n} \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu \leq \frac{1}{n}$. Tím jsme ukázali, že

$M \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ a $\mu \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \right) = 0$. Stačí nyní využít úplnosti míry μ .

4. $\Lambda_\mu \subset \Lambda \, (\mathcal{S})$. Buď $f \in \Lambda_\mu$. Nalezněme posloupnost funkcí $f_n \in \mathcal{L}_\mu$ tak, aby $f_n \to f$ μ_μ-skoro všude (viz cvičení 9.D). Podle předešlého pak $f_n \to f$ μ-skoro všude a podle 17.B.g je $f \in \Lambda \, (\mathcal{S})$.

5. $\mathcal{M} = \mathcal{S}$. Plyne ihned z (1) a (4).

6. $\mu_\mu = \mu$. Plyne z (2) a (5).

18.9 Poznámka. V případě, že míra μ není σ-konečná, tvrzení předchozí věty neplatí. Víme totiž, že za předpokladu $P \in \mathcal{M}$ má celý prostor σ-konečnou míru (viz 9.60). Tato situace je způsobena mnoha příčinami - možná trochu úzkou definicí měřitelného prostoru (předpoklad $X \in \mathcal{S}$), a tudíž i definicí $\mathcal{S}$-měřitelných funkcí, možná ne právě nejlepší (k tomu účelu) definicí měřitelných funkcí podle Daniella - ovšem hlavní "zásluhu" na tom mají definice, při nichž se používá "spočetného" limitního přechodu. Trochu lépe a konkrétněji řečeno - kupříkladu při definici systému $\mathcal{L}^*$ jsme používali posloupnosti funkcí ze systému $\mathcal{L}$, takže funkce ze systému $\mathcal{L}^*$ nebyly "příliš vzdálené" od funkcí ze $\mathcal{L}$. Tato skutečnost není na závadu, pracujeme-li třeba v metrických prostorech; ovšem již v obecnějších prostorech (tzv. topologických) není například každá polospojitá funkce limitou monotonní posloupnosti spojitých funkcí. Tam musíme pracovat, zhruba řečeno, s tzv. zobecněnými posloupnostmi (viz cvičení 1.K.b).

Rovněž tak při definici systému měřitelných funkcí Λ jsme se nepříliš "daleko" vzdálili od funkcí z $\mathcal{L}$. Tím nám právě vyšla σ-konečnost míry .

O obecnějších teoriích (Radonův integrál, integrál ve smyslu Bourbakiho aj.), jakož i o odstranění všech těchto "nedostatků" , pojednáme však až v II.dílu. Podotkněme ještě na závěr, že uvažování pouze σ-konečných měr není na druhé straně tak příliš velkým omezením.

C. TEORIE INTEGRÁLU NA ZÁKLADĚ MÍRY

Prozatím máme definován integrál $\int_X f \, d\mu$ pouze pro funkce ze systému $\mathcal{L}_\mu$. Vcelku jednoduchým a přirozeným způsobem (bez použití Daniellovy metody, jejíž znalost v tomto odstavci nepředpokládáme) rozšíříme definici integrálu i na mnohem širší systém funkcí. Budeme postupovat zhruba takto:

(1) je-li $f \geq 0$ $\mathcal{S}$-měřitelná funkce, nalezneme posloupnost funkcí $f_n \in \mathcal{Z}_\mu$ tak, aby $f_n \nearrow f$ (musíme ovšem prodiskutovat otázku, zda vůbec taková posloupnost existuje a kolik jich může být) a definujeme

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$ (a opět prozkoumáme otázku korektnosti definice),

(2) je-li $f \in \Lambda(\mathcal{S})$ libovolná, definujeme $\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$, má-li rozdíl integrálů na pravé straně smysl.

Nejdříve si však ještě odvoďme některá potřebná tvrzení.

18.10 Lemma. Nechť μ je σ-konečná. Je-li $f \in \Lambda(\mathcal{S})$, $f \geq 0$, potom existuje posloupnost funkcí $f_n \in \mathcal{Z}_\mu$, $f_n \geq 0$ s vlastností $f_n \nearrow f$.

Důkaz. Podívejte se na důkaz věty 16.13. Tam jsme sestrojili posloupnost jednoduchých funkcí $\{s_n\}$ tak, že $s_n \nearrow f$. Píšeme-li ještě

$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, kde $X_n \in \mathcal{S}$, $\mu X_n < +\infty$, $X_1 \subset X_2 \subset \dots$ (σ-konečnost míry μ!) a položíme-li $f_n = s_n c_{X_n}$, má posloupnost $\{f_n\}$ požadované vlastnosti.

18.11 Poznámka. V předešlém lemmatu stačilo předpokládat, že množina $N(f) = \{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$ má σ-konečnou míru. Dokažte! Lze vyslovit též obrácenou větu - jsou-li $f_n \in \mathcal{Z}_\mu$, $f_n \to f$, potom množina $N(f)$ má σ-konečnou míru. Stačí si totiž uvědomit, že $N(f) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} N(f_n)$.

18.12 Lemma. Buďte $f_n, g_n \in \mathcal{Z}_\mu$, $f_n \nearrow f$, $g_n \nearrow f$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu .$$

Důkaz (porovnejte s důkazem (b) v 9.7). Zvolme $m \in N$ a pro každé n položme $h_n = \min(f_n, g_m)$. Potom $h_n \in \mathcal{Z}_\mu$, $h_n \nearrow \min(f, g_m) = g_m$ a

$\int_X h_n \, d\mu \nearrow \int_X g_m d\mu$ (viz 18.7). Ale $h_n \leq f_n$, čili $\lim \int_X h_n d\mu \leq \lim \int_X f_n d\mu$

(limity existují! proč?). Tím jsme ukázali, že pro každé m jest

$$\int_X g_m d\mu \leq \lim \int_X f_n d\mu \text{ , čili i } \lim \int_X g_m d\mu \leq \lim \int_X f_n d\mu .$$

Obdobně se dokáže obrácená nerovnost.

18.13 Definice. Označme

$$\mathcal{Z}_\mu^+ = \{ f;\ f \geq 0 \text{ , existují } f_n \in \mathcal{Z}_\mu , f_n \nearrow f \}$$

a pro $f \in \mathcal{Z}_\mu^+$ položme

$$\int_X f\, d\mu \overset{\text{def.}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu ,$$

kde $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí ze $\mathcal{Z}_\mu$ s vlastností $f_n \nearrow f$.
Poznamenejme, že

(i) $\lim \int_X f_n d\mu$ vždy existuje (proč?),

(ii) definice $\int_X f\, d\mu$ nezávisí na volbě posloupnosti $\{f_n\}$ (podle 18.12),

(iii) pro $f \in \mathcal{Z}_\mu$, $f \geq 0$ není "nová" definice $\int_X f\, d\mu$ ve sporu s "původní" definicí $\int_X f\, d\mu$ (vysvětlete a dokažte ! - opět použijte 18.12 a využijte poznatku,že $f,f,f,\ldots \nearrow f$; můžete též použít 18.7 - (10)).

Dále definujme systém $\mathcal{L}^*(\mu)$:

$$f \in \mathcal{L}^*(\mu) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} f^+, f^- \in \mathcal{Z}^+_\mu \text{ a rozdíl } \int_X f^+ d - \int_X f^- d \text{ má smysl.}$$

Pro $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$ položme

$$\int_X f\, d\mu \overset{\text{def.}}{=} \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

(ukažte, že pro $f \in \mathcal{Z}^+_\mu$ není tato definice ve sporu).

Dále označme

$$\mathcal{L}^R(\mu) = \left\{ f \in \mathcal{L}^*(\mu) ; \int_X f\, d\mu > -\infty \right\} ,$$

$$\mathcal{L}^K(\mu) = \left\{ f \in \mathcal{L}^*(\mu); \int_X f\, d\mu < +\infty \right\} ,$$

$$\mathcal{L}(\mu) = \mathcal{L}^R(\mu) \cap \mathcal{L}^K(\mu) .$$

Funkcím ze systému $\mathcal{L}(\mu)$ říkejme (lebesgueovsky) integrovatelné, číslu $\int_X f\, d\mu$ pak <u>abstraktní</u> (Lebesgueův) <u>integrál</u> funkce f .

18.14 <u>Poznámky</u>.

(A) Zřejmě $\mathcal{Z}^+_\mu \subset \Lambda(\mathcal{S})$, $\mathcal{L}^*(\mu) \subset \Lambda(\mathcal{S})$. Vysvětlete !

(B) Je-li míra μ σ-konečná, platí podle 18.10 implikace $f \geq 0$, $f \in \Lambda(\mathcal{S}) \Longrightarrow f \in \mathcal{L}^R(\mu)$ (dokonce $f \in \mathcal{Z}^+_\mu$!).
Dokažte !

(C) Buď $f \geq 0$. Uvědomte si, že potom $f \in \mathcal{L}(\mu)$ za těchto dvou předpokladů:

(i) existuje posloupnost $f_n \in \mathcal{Z}_\mu$, $f_n \nearrow f$,

(ii) posloupnost čísel $\left\{ \int_X f_n d\mu \right\}$ je shora omezená.

Ukažte !

(D) Uvědomte si, že

$$f \in \mathcal{L}(\mu) \Longleftrightarrow f^+, f^- \in \mathcal{L}(\mu),$$

což není nic jiného, než přepsaná definice systému $\mathcal{L}(\mu)$.

(E) Je-li míra μ σ-konečná a $B \in \mathcal{S}$, potom $c_B \in \mathcal{Z}^+_\mu$ a

$$\mu B = \int_X c_B \, d\mu$$

Ukažte !

Návod. Nechť $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, kde $X_1 \subset X_2 \subset \dots$, $X_n \in \mathcal{S}$, $\mu X_n < +\infty$.

Potom $c_{B \cap X_n} \nearrow c_B$, $c_{B \cap X_n} \in \mathcal{Z}_\mu$ a $\int_X c_{B \cap X_n} d\mu = \mu(X_n \cap B)$.

Odtud plyne, že $c_B \in \mathcal{Z}^+_\mu$ a

$$\int_X c_B \, d\mu = \lim \int_X c_{B \cap X_n} d\mu = \lim \mu(B \cap X_n) = \mu B .$$

(F) Nyní, obdobně jako v kapitole o Daniellově rozšíření, lze odvodit řadu vět o systémech $\mathcal{L}(\mu)$, $\mathcal{L}^*(\mu)$ a o integrálu $\int_X f \, d\mu$. Důkazy nebudeme provádět většinou podrobně, pouze naznačíme myšlenku. Někdy se též odvoláme na obdobné důkazy z kapitoly 9.

(G) Pro jednoduchost v dalším předpokládejme, že míra μ je σ-konečná. Lepší čtenář si může rozmyslet, které věty platí i bez tohoto předpokladu.

18.15 Věta. Buď $f \in \Lambda(\mathcal{S})$, $g \in \mathcal{L}(\mu)$, $0 \le f \le g$. Potom $f \in \mathcal{L}(\mu)$ a $\int_X f \, d\mu \le \int_X g \, d\mu$.

Důkaz. Buďte $g_n \in \mathcal{Z}_\mu$, $g_n \nearrow g$, f_n jednoduché, $f_n \nearrow f$.
Položme $h_n = \min(f_n, g_n)$. Zřejmě h_n jsou jednoduché a ze vztahu $N(h_n) \subset N(g_n)$ plyne, že $h_n \in \mathcal{Z}_\mu$. Přitom $h_n \nearrow f$, $h_n \le g_n$. Tedy

$$\lim \int_X h_n d\mu \le \lim \int_X g_n d\mu ,$$ odkud již plyne tvrzení.

18.16 Věta. Buď $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$, $g \sim f$. Potom $g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$$ (speciálně: je-li $f \in \mathcal{L}(\mu)$, je i $g \in \mathcal{L}(\mu)$).

Důkaz. Nechť zprvu $f \geq 0$, $g \geq 0$. Sestrojme posloupnosti $\{s_n\}$, $\{\sigma_n\}$ jednoduchých funkcí jako v 16.13 tak, aby $s_n \nearrow f$, $\sigma_n \nearrow g$. Zřejmě $s_n \sim \sigma_n$ (neboť $f(x) = g(x) \Longrightarrow s_n(x) = \sigma_n(x)$). Můžeme hned předpokládat, že $s_n, \sigma_n \in \mathcal{Z}_\mu$ (viz důkaz 18.10). Potom ovšem $g \in \mathcal{Z}_\mu^+$,

$$\int_X s_n \, d\mu = \int_X \sigma_n \, d\mu \text{ (viz 18.17) a tudíž i } \int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu .$$

Jsou-li f,g libovolné, potom $f^+ \sim g^+$, $f^- \sim g^-$ a aplikujeme právě dokázané.

18.17 **Úmluva.** Přečtěte si nyní úmluvu 9.33, v níž $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^R$, $\mathcal{L}^K$, $\mathcal{L}^*$, Λ nahradíte symboly $\mathcal{L}(\mu)$, $\mathcal{L}^R(\mu)$, $\mathcal{L}^K(\mu)$, $\mathcal{L}^*(\mu)$, $\Lambda(\mathcal{S})$. Viz též poznámku 17.7.

18.18 **Věta.** Buď $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$, $c \in E_1$. Potom $cf \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a

$$\int_X cf \, d\mu = c \int_X f \, d\mu \text{ (speciálně : } cf \in \mathcal{L}(\mu) \text{, jestliže } f \in \mathcal{L}(\mu)).$$

Důkaz. Proveďte podrobně sami!

18.19 **Věta.** Platí následující implikace:

$$f \in \mathcal{L}^K(\mu) \Longrightarrow f < +\infty \text{ skoro všude,}$$

$$f \in \mathcal{L}^R(\mu) \Longrightarrow f > -\infty \text{ skoro všude,}$$

$$f \in \mathcal{L}(\mu) \Longrightarrow f \text{ konečná skoro všude.}$$

Důkaz. Buď $f \in \mathcal{L}^K(\mu)$ a označme $B = \{ x \in X ; f(x) = +\infty \}$. Zvolme dále $n \in N$. Potom $B \in \mathcal{S}$ (viz 16.7), $0 \leq nc_B \leq f^+$. Z předpokladů plyne, že $f^+ \in \mathcal{L}(\mu)$, tudíž i $nc_B \in \mathcal{L}(\mu)$ podle 18.15 a

$$0 \leq \int_X nc_B \, d\mu = n \int_X c_B \, d\mu \leq \int_X f^+ \, d\mu .$$

Takže $\int_X c_B \, d\mu = 0$, čili podle 18.14.E je $\mu B = 0$.

Ostatní dokažte již sami.

18.20 **Věta.** Buďte $f,g \in \mathcal{L}(\mu)$, $h = f + g$ n definujme v bodech, kde součet $f+g$ nemá smysl, zcela libovolne). Potom

$$h \in \mathcal{L}(\mu) \text{ a } \int_X h \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

(můžete si též přečíst poznámku 9.32).

Důkaz. Buďte zprvu $f \geq 0$, $g \geq 0$. Nalezněme $s_n, \sigma_n \in \mathcal{Z}_\mu$ tak, aby $s_n \nearrow f$, $\sigma_n \nearrow g$. Potom $s_n + \sigma_n \in \mathcal{Z}_\mu$, $s_n + \sigma_n \nearrow h$,

27571 218

$$\int_X (s_n + \sigma_n)\, d\mu = \int_X s_n d\mu + \int_X \sigma_n d\mu\ ;$$ odtud snadno plyne tvrzení.

Buďte nyní $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$ libovolné. Potom $f^+, f^-, g^+, g^- \in \mathcal{L}(\mu)$, čili podle předchozího jest $f^+ + g^+ \in \mathcal{L}(\mu)$. Zřejmě $(f+g)^+ \in \Lambda(\mathcal{S})$ (odůvodněte pořádně!, použijte 18.19, 17.7 a 16.8), $0 \leq h^+ \leq f^+ + g^+$, odkud podle 18.15 plyne, že $h^+ \in \mathcal{L}(\mu)$. Obdobně $h^- \in \mathcal{L}(\mu)$.

Použitím rovnosti

$$f^+ + g^+ + h^- = f^- + g^- + h^+$$

(ověřte!) dostáváme opět podle první části důkazu, že

$$\int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu + \int_X h^- d\mu = \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu + \int_X h^+ d\mu ,$$

přičemž všechny tyto integrály jsou konečné. Nyní již lehko důkaz dokončíte.

18.21 Věta. Následující podmínky jsou ekvivalentní :

(a) $f \in \mathcal{L}(\mu)$,

(b) $f^+, f^- \in \mathcal{L}(\mu)$,

(c) $|f| \in \mathcal{L}(\mu)$, $f \in \Lambda(\mathcal{S})$.

V každém z těchto případů potom $\left| \int_X f\, d\mu \right| \leq \int_X |f|\, d\mu$.

Důkaz. (a)$\Longleftrightarrow$(b) podle definice (viz 18.14.D).

(b)$\Longrightarrow$(c) podle 18.20 pomocí vztahu $|f| = f^+ + f^-$.

(c)$\Longrightarrow$(b) podle 18.15 pomocí nerovností $0 \leq f^+ \leq |f|$, $0 \leq f^- \leq |f|$.

Dále

$$\left| \int_X f\, d\mu \right| = \left| \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right| \leq \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu =$$

$$= \int_X |f|\, d\mu .$$

18.22 Věta. Nechť $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$, $f \geq 0$ sk.všude. Potom $\int_X f\, d\mu \geq 0$.

Důkaz. Položme $F = f.c_{X-B}$, kde $B = \{ x \in X;\ f(x) < 0 \}$. Potom $F \sim f$, $F \geq 0$. Nyní stačí použít 18.16 a uvědomit si, že

$$\int_X F\, d\mu \geq 0 .$$

Shrňme nyní některé vlastnosti systémů $\mathcal{L}(\mu)$ a $\mathcal{L}^*(\mu)$.

18.23 Vlastnosti $\mathcal{L}(\mu)$.

(A) $f \in \mathcal{L}(\mu)$, $c \in E_1 \Longrightarrow cf \in \mathcal{L}(\mu)$ a $\int_X cf\, d\mu = c \int_X f\, d\mu$,

(B) $f, g \in \mathcal{L}(\mu) \Longrightarrow f + g \in \mathcal{L}(\mu)$ a

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu ,$$

(C) $f, g \in \mathcal{L}(\mu) \Longrightarrow \max(f,g)$, $\min(f,g) \in \mathcal{L}(\mu)$,

(D) $f \in \mathcal{L}(\mu) \Longrightarrow f^+, f^-, |f| \in \mathcal{L}(\mu)$ a $\left| \int_X f\, d\mu \right| \leq \int_X |f|\, d\mu$,

(E) $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$, $f \leq g$ sk.všude $\Longrightarrow \int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$,

(F) $f \in \Lambda(\mathcal{S})$, $g \in \mathcal{L}(\mu)$, $|f| \leq g$ sk.všude $\Longrightarrow f \in \mathcal{L}(\mu)$,

(G) $f \in \mathcal{L}(\mu) \Longrightarrow f$ je konečná sk.všude.

Důkaz. Tvrzení (A), (B), (D), (G) jsme již dokázali.

(C) Dokažte sami pomocí (A), (B) a (D) (viz třeba 9.3 c).

(E) Položíme-li $h = g - f$, je $h \in \mathcal{L}(\mu)$ a

$\int_X h\, d\mu = \int_X g\, d\mu - \int_X f\, d\mu$. Stačí ukázat, že $\int_X h\, d\mu \geq 0$.

Ale $h \geq 0$ sk.všude (zdůvodněte podrobně!), a stačí použít 18.22.

(F) Použijte 18.15, 18.16 a 18.21.

18.24 Vlastnosti $\mathcal{L}^*(\mu)$.

(A) $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$, $c \in E_1 \Longrightarrow cf \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a $\int_X cf\, d\mu = c \int_X f\, d\mu$,

(B) $f, g \in \mathcal{L}^*(\mu)$, nechť má smysl součet $\int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu \Longrightarrow$ sk.všude má smysl součet $f+g$,

$$f+g \in \mathcal{L}^*(\mu) \text{ a } \int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu ,$$

(C) $f \in \Lambda(\mathcal{S}) - \mathcal{L}^*(\mu) \Longleftrightarrow f^+, f^- \in \mathcal{L}^+_\mu$

a $\int_X f^+\, d\mu = \int_X f^-\, d\mu = +\infty$,

(D) $f \in \mathcal{L}^*(\mu) \Longrightarrow |f| \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a $\left| \int_X f\, d\mu \right| \leq \int_X |f|\, d\mu$.

Důkaz. (A) Viz 18.18.

(B) Proveďte opatrně podle důkazu 18.20. (nejdříve pro $f, g \in \mathcal{Z}^+_\mu$, poté třeba pro $f, g \in \mathcal{L}^R(\mu)$).

(C) Tvrzení je vlastně definicí systému $\mathcal{L}^*(\mu)$.

(D) Dokažte sami.

$\boxed{18.25}$ Věta (Levi).

(a) $f_n \in \mathcal{L}^R(\mu)$, $f_n \nearrow f \implies f \in \mathcal{L}^R(\mu)$ a

$$\int_X f_n \, d\mu \longrightarrow \int_X f \, d\mu ,$$

(b) $f_n \in \mathcal{L}^K(\mu)$, $f_n \searrow f \implies f \in \mathcal{L}^K(\mu)$ a

$$\int_X f_n \, d\mu \longrightarrow \int_X f \, d\mu .$$

Důkaz. Nechť zprvu $f_n \geq 0$ pro každé n. Nalezněme posloupnosti funkcí $\left\{ g^n_k \right\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{Z}_\mu$ tak, aby $g^n_k \nearrow f_n$, $k \longrightarrow +\infty$, pro každé $n \in N$ a položme

$$h_n = \max \left\{ g^j_i \, ; \, 1 \leq i \leq n \, , \, 1 \leq j \leq n \right\} .$$

Zřejmě $h_n \in \mathcal{Z}_\mu$ a posloupnost $\left\{ h_n \right\}$ konverguje monotonně nahoru. Označme $h = \lim h_n$, tedy $h \in \mathcal{Z}^+_\mu$. Ze vztahu $h_n \leq f_n$ plyne, že $h \leq f$. Na druhé straně však $h_k \geq g^n_k$ pro $k \geq n$, čili i $h = f_n$ pro každé n. Tím jsme ukázali, že $f = h \in \mathcal{Z}^+_\mu$ a zbytek tvrzení plyne z nerovnosti $h_n \leq f_n \leq f$, neboť potom

$$\int_X h \, d\mu = \int_X f \, d\mu = \lim \int_X h_n d\mu \leq \lim \int_X f_n d\mu \leq \int_X f \, d\mu .$$

Jsou-li nyní $f_n \in \mathcal{L}^R(\mu)$, můžeme předpokládat, že $f_n > -\infty$ všude pro každé n (vysvětlete !, viz 18.19) a položme $F_n = f_n + (f_1)^-$.

Zřejmě $(f_1)^- \in \mathcal{L}(\mu)$, $F_n \in \mathcal{L}^R(\mu)$, $\int_X F_n d\mu =$

$$= \int_X f_n d\mu + \int_X (f_1)^- \, d\mu \, , \; F_n \geq 0, \; F_n \nearrow f + (f_1)^- .$$

Podle první části důkazu jest pak $f + (f_1)^- \in \mathcal{L}^R(\mu)$ a

$\int_X F_n d\mu \nearrow \int_X (f + (f_1)^-) d\mu$. Zbytek již dokončíte lehko sami.

18.26 Věta (Lebesgue).

Nechť $f_n \in \Lambda(\mathscr{S})$, $f_n \to f$ sk.všude, nechť existuje funkce $g \in \mathscr{L}(\mu)$ tak, že nerovnost $|f_n(x)| \leq g(x)$ je splněna pro všechna $n \in N$ a sk. všechna $x \in X$. Potom

$$f \in \mathscr{L}(\mu) \quad \text{a} \quad \int_X f_n d\mu \longrightarrow \int_X f\, d\mu .$$

Důkaz. Proveďte sami podle důkazu věty 9.38.

18.27 Cvičení. Vyslovte a dokažte Lebesgueovu i Leviho větu pro <u>řady</u> funkcí, obdobně jako v 9.39 a 9.40.

18.28 Věta. Nechť $f \in \mathscr{L}(\mu)$, $f \geq 0$, $\int_X f\, d\mu = 0$. Potom $f \sim 0$.

Důkaz. Pro $n \in N$ položme $E_n = \left\{ x \in X ; f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}$. Stačí ukázat, že každá množina E_n je nulová, neboť $\left\{ x \in X; f(x) > 0 \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Ale zřejmě $E_n \in \mathscr{S}$ (proč?) a

$$\mu E_n = \int_X c_{E_n} d\mu \leq \int_X nf\, d\mu = 0 .$$

V dalším ještě zavedeme integrál pro funkce, které jsou definovány pouze na jistých měřitelných podmnožinách množiny X. Připomeňme, že stále vycházíme z prostoru s mírou $(X, \mathscr{S}, \mu)$, kde μ je σ-konečná míra.

18.29 Lemma. Buď $f \in \Omega$ (kde Ω může znamenat kterýkoliv ze systémů $\mathscr{L}(\mu)$, $\mathscr{L}^*(\mu)$, $\mathscr{L}^R(\mu)$, $\mathscr{L}^K(\mu)$, $\Lambda(\mathscr{S})$, nechť $M \in \mathscr{S}$. Potom $fc_M \in \Omega$.

Důkaz. V každém případě je $fc_M \in \Lambda(\mathscr{S})$ (viz 16.8). Je-li $f \in L(\mu)$, vyplývá tvrzení z nerovnosti $0 \leq |c_M f| \leq |f|$ a z vět 18.21, 18.15. Tvrzení je též správné pro $f \in Z_\mu^+$ (odůvodněte!), další pak vyplývá již z rovnosti $fc_M = f^+ c_M - f^- c_M$.

18.30 Definice. Buď $M \in \mathscr{S}$, f funkce definovaná na množině M. Položme

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in M , \\ 0 & \text{pro } x \in X - M . \end{cases}$$

Nechť Ω znamená kterýkoliv ze systémů $\mathscr{L}(\mu)$, $\mathscr{L}^*(\mu)$, $\mathscr{L}^R(\mu)$, $\mathscr{L}^K(\mu)$, $\Lambda(\mathscr{S})$. Definujme systém funkcí Ω_M vztahem

$$\Omega_M = \left\{ f; f \text{ definovaná na } M , \bar{f} \in \Omega \right\} .$$

Je-li $f \in \mathcal{L}^*_M(\mu)$, definujme dále integrál funkce f <u>přes množinu M</u> rovností

$$\int_M f \, d\mu = \int_X \bar{f} \, d\mu \, .$$

18.31 **Poznámky.**

(A) V cvičení 17.A jsme ukázali, že trojice $(M, \mathcal{S}_M, \mu_M)$ je (v případě $M \in \mathcal{S}$) prostorem s mírou.

Ukažte, že

$$\Lambda(\mathcal{S}_M) = \Lambda_M(\mathcal{S}) \, , \quad \mathcal{L}(\mu_M) = \mathcal{L}_M(\mu) \, , \quad \mathcal{L}^*(\mu_M) = \mathcal{L}^*_M(\mu)$$

a

$$\int_M f \, d\mu_M = \int_M f \, d\mu$$

pro $f \in \mathcal{L}^*_M(\mu)$. Komentujte! (Uvědomte si, že již na <u>každém</u> prostoru s mírou je automaticky podle 18.13 definován integrál !).

(B) Nechť $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$. Potom $f/M \in \mathcal{L}^*_M(\mu)$ a

$$\int_M f/M \, d\mu = \int_X f c_M \, d\mu \, .$$

Dokažte pomocí 18.29 !

(C) Přečtěte si poznámku (B) z 9.53 a promyslete ji !

18.32 **Věta.** Buď $f \in \Omega_M$, $N \subset M$, $N \in \mathcal{S}$. Potom $f \in \Omega_N$ (korektněji $f/N \in \Omega_N$), kde Ω může opět znamenat kterýkoliv ze systémů $\mathcal{L}(\mu), \ldots, \Lambda(\mathcal{S})$.

Důkaz. Dokažte sami (viz třeba analogickou větu 9.54).

18.33 **Věta.** Vyslovte a dokažte (podrobně!) věty analogické větám z odstavce 9.56 (kde pochopitelně místo $A_M f$ píšeme $\int_M f \, d\mu$, místo $\mathcal{L}$ pak $\mathcal{L}(\mu)$ atd.).

D. CVIČENÍ A PROBLÉMY

V dalším vždy předpokládáme, že $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor se σ-konečnou mírou.

$\boxed{18.A}$ Cvičení. Ukažte, že Daniellova metoda popsaná v odstavci (B) a metoda z (C) dají "tytéž" systémy integrovatelných funkcí i tentýž integrál. (Formulujte lépe a přesněji!).

$\boxed{18.B}$ Cvičení. Buď $f \in \mathcal{L}^R(\mu)$. Potom existují $f_n \in \mathcal{L}(\mu)$ tak, že $f_n \nearrow f$. Dokažte!

Návod. Existují $f_n \in \mathcal{Z}_\mu$ tak, že $f_n \nearrow f^+$. Potom $f_n - f^- \nearrow f$.

$\boxed{18.C}$ Cvičení. Buď $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$. Potom

$$f \in \mathcal{L}^R(\mu) \Longleftrightarrow f^- \in \mathcal{L}(\mu).$$

Dokažte!

$\boxed{18.D}$ Cvičení. Nechť X je množina přirozených čísel, $\mathcal{S} = \exp X$, μA = počet prvků množiny $A \subset X$. Podejte charakteristiku systémů $\mathcal{L}(\mu)$, $\mathcal{L}^*(\mu)$! Čemu je roven integrál $\int_E f \, d\mu$?

$\boxed{18.E}$ Cvičení. Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor se σ-konečnou mírou, nechť míra μ nabývá pouze hodnot 0 anebo $+\infty$. (Je to vůbec možné?) Charakterisujte $\mathcal{L}(\mu)$, $\mathcal{L}^*(\mu)$, $\int_E f \, d\mu$!

$\boxed{18.F}$ Cvičení. Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou jako ve svičení 17.C. Charakterisujte systém $\Lambda(\mathcal{S})$ a integrál $\int_X f \, d\mu$!

$\boxed{18.G}$ Cvičení. Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, $\mu X < +\infty$ a nechť f je $\mathcal{S}$-měřitelná, nezáporná a omezená funkce na X. Buď $M \geqq \sup \left\{ f(x) \; ; \; x \in X \right\}$ přirozené. Ukažte, že

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{nM} \frac{i}{n} \mu \left\{ x \in X \; ; \; \frac{i}{n} \leq f(x) < \frac{i+1}{n} \right\}.$$

Pomocí tohoto vztahu lze též definovat integrál. Pokuste se o to! (Takto původně definoval integrál H. Lebesgue).)

$\boxed{18.H}$ Cvičení. Buď f nezáporná, $\mathcal{S}$-měřitelná funkce na X. Ukažte, že

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} \mu E_k \cdot \inf \left\{ f(x) ; \; x \in E_k \right\} \right\},$$

kde supremem se bere přes všechny systémy konečných tříd po dvou disjunktních množin $E_k \in \mathcal{S}$ s vlastností $\bigcup_{k=1}^{n} E_k = X$.

I pomocí tohoto vztahu lze zavést abstraktní integrál.

$\boxed{18.I}$ Cvičení. Nechť $E \in \mathcal{S}$, $f \in \mathcal{L}(\mu)$ a nechť $a,b \in E_1$ jsou taková, že $a \leq f(x) \leq b$ pro sk.vš. $x \in X$. Potom

$$a\mu E \leq \int_E f \, d\mu \leq b\mu E .$$

Dokažte !

$\boxed{18.J}$ Cvičení. Nechť $\mu X < +\infty$, $f \in \Lambda(\mathcal{S})$. Potom $\frac{f}{1+|f|} \in \mathcal{L}(\mu)$.

Ukažte! Je předpoklad konečnosti míry celého prostoru podstatný ?

$\boxed{18.K}$ Cvičení. Buď $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$, $f \geq 0$ μ-sk.vš. Potom funkce μ_f,

$$\mu_f A = \int_A f \, d\mu \quad \text{pro } A \in \mathcal{S} ,$$

je míra na $\mathcal{S}$. Dokažte ! Kdy bude míra μ_f konečná? Zkoumejte, za jakých podmínek na f,g bude $\mu_f = \mu_g$ na $\mathcal{S}$!

$\boxed{18.L}$ Cvičení. Nechť $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ je okruh, nechť $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{S}$. Je-li $f \in \mathcal{L}(\mu)$ taková funkce, že $\int_E f \, d\mu = 0$ pro každou množinu $E \in \mathcal{R}$, potom $f \sim 0$. Dokažte !

$\boxed{18.M}$ Cvičení. Buď $f \in \mathcal{L}(\mu)$, $f \geq 0$. Potom

$$\int_X f \, d\mu = \sup\left\{ \int_A f \, d\mu \; ; \; A \in \mathcal{S} , \; \mu A < +\infty \right\} .$$

Dokažte! Je tvrzení pravdivé i pro $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$?

19. Speciální prostory s mírou

Obsah: A. Integrály v E_n.

B. Fubiniova věta pro součin měr.

C. Cvičení a problémy.

A. INTEGRÁLY V E_n

Tak jako jsme v kapitole o Daniellově rozšíření, kromě vět platných pro abstraktní teorii, uvedli řadu tvrzení pro speciální teorie, tak i nyní lze konkrétní volbou prostorů s mírou odvodit jejich další specifické vlastnosti. Převážná část těchto vět má stejné důkazy jako příslušné věty v kapitolách 10 - 12, uvedeme je zde proto bez důkazu. Radím čtenáři, aby si je všechny provedl podrobně sám.

19.1 Lebesgueův integrál v E_1.

Zde volíme $X = E_1$, $\mathcal{S}$ = systém $\mathcal{M}_1$ všech lebesgueovsky měřitelných množin v E_1, μ = Lebesgueova míra λ_1 na systému $\mathcal{M}_1$ tak, jak jsme ji zavedli v kapitole 14.

Dokažte sami následující věty:

(A) Vztah Riemannova a Lebesgueova integrálu (věta 10.13, k ní si ovšem přečtěte též odstavec 10.12).

(B) Vztah Newtonova a Lebesgueova integrálu pro spojité funkce (viz 10.16 spolu s 10.14, 10.15, 10.17, 10.18).

19.2 Lebesgueův integrál v E_n.

Opět volte $X = E_n$, $\mathcal{S} = \mathcal{M}_n$, $\mu = \lambda_n$ (viz odstavec (C) v kapitole 14) a rozmyslete si následující věty.

(A) Vztah Riemannova a Lebesgueova integrálu.

(B) Fubiniova věta (viz 11.6 - její důkaz proveďte buď přímo, anebo raději až podle věty 19.8 v dalším odstavci s použitím cvičení 15.0.D).

(C) Věty 11.8 a 11.9 o míře grafu funkce a geometrickém významu integrálu.

(D) Věta o substituci pro Lebesgueův integrál (viz 11.12).

19.3 Lebesgue - Stieltjesův integrál v E_1.

Nechť φ je neklesající funkce v E_1. Volte $X = E_1$, $\mathcal{S} = \mathcal{M}_\varphi$ a $\mu = \lambda_\varphi$ (viz 15.1). Podívejte se na:

(A) Vztah LS-integrálu a RS-integrálu pro spojité funkce (věta 12.2.E).

(B) Poznámku 12.3 .

B. FUBINIOVA VĚTA PRO SOUČIN MĚR

Zopakujte si partii o zavedení součinu měr (odstavce 15.8 - 15.18). Pro přehlednost zde uvedeme pouze nejdůležitější výsledky.

Vycházíme ze dvou prostorů s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$, $(Y, \mathcal{M}, \nu)$, kde μ a ν jsou σ-konečné úplné míry na σ-okruzích $\mathcal{S}$ a $\mathcal{M}$. Sestrojíme σ-okruh $\mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{M}$ v $X \times Y$ a úplnou σ-konečnou míru $\mu \hat{\otimes} \nu$ na něm tak, že platí

$$A \in \mathcal{S}, \ B \in \mathcal{M} \Longrightarrow \mu \hat{\otimes} \nu\,(A \times B) = \mu A \,.\, \nu B \,.$$

Víme, že míra $\mu \hat{\otimes} \nu$ na $\mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{M}$ je touto poslední podmínkou jednoznačně určena.

$\boxed{19.4}$ Označení. Nechť h je funkce na $X \times Y$. Předpokládejme, že

(i) pro μ-skoro všechna $x \in X$ je $h(x,.) \in \mathcal{L}^*(\nu)$,

(ii) funkce $H : x \longmapsto \int_Y h(x,.)\, d\nu$ leží v systému $\mathcal{L}^*(\mu)$

(funkce H může být definována pouze μ-sk.všude v X !).

Potom symbolem $\int_X \left(\int_Y h \, d\nu \right) d\mu$ rozumíme integrál $\int_X H \, d\mu$ a $\int_X \left(\int_Y h \, d\nu \right) d\mu$ nazýváme dvojnásobným integrálem funkce h.

Obdobně definujeme $\int_Y \left(\int_X h \, d\mu \right) d\nu$ (s "příslušnými" podmínkami (i) a (ii)). Nezapomeňte, že k definici těchto dvojnásobných integrálů patří vždy splnění podmínek (i) a (ii) !

$\boxed{19.5}$ Problém. V dalším nás bude zajímat otázka, v jakém vztahu k sobě jsou integrály

$$\int_X \left(\int_Y h \, d\nu \right) d\mu \,,\ \int_Y \left(\int_X h \, d\mu \right) d\nu \,,\ \int_{X \times Y} h \, d\mu \hat{\otimes} \nu$$

(poslednímu integrálu se též říká dvojný integrál funkce h), zda z existence některého z nich plyne i existence ostatních, případně pak jejich rovnost.

19.6 Věta. Nechť $A \in \mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{M}$. Potom platí rovnost

$$\mu \hat{\otimes} \nu(A) = \int_X \left(\int_Y c_A \, d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X c_A \, d\mu \right) d\nu . \quad \circledast$$

Důkaz. Označme symbolem $\mathcal{K}$ systém všech množin $A \in \mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{M}$, pro něž platí rovnost $\circledast$.

1. Zřejmě $\mathcal{Y} \subset \mathcal{K}$ (kde $\mathcal{Y}$ je definováno v 15.9). Podrobně ovšem vysvětlete !
2. Dále $\mathcal{D} \subset \mathcal{K}$ (kde $\mathcal{D}$ je okruh generovaný systémem $\mathcal{Y}$). K tomu viz větu 15.13.
3. Dále sami ukažte (použitím Leviho věty), že platí:

   (a) $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots, \; A_n \in \mathcal{K} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$,

   (b) $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots, \; A_n \in \mathcal{K} \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$

   ((b) dokažte nejdříve v případě, kdy míry μ, ν jsou konečné a teprve potom využijte σ-konečnost).
4. Z (2) a (3) lehko odvodíte, že $\mathcal{S} \otimes \mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ (viz označení v 15.15 a cvičení 13.C.g).
5. Buď konečně $A \in \mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{M}$. Tedy $A = G \cup N$, kde $G \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{M}$ a $N \subset E$, $E \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{M}$, $\mu \otimes \nu(E) = 0$. Dále víme, že

$$\mu \hat{\otimes} \nu(A) = \mu \otimes \nu(G) = \int_X \left(\int_Y c_G \, d\nu \right) d\mu =$$

$$= \int_Y \left(\int_X c_G \, d\mu \right) d\nu .$$

A není těžké dokázat, že

$$\int_X \left(\int_Y c_G \, d\nu \right) d\mu = \int_X \left(\int_Y c_A \, d\nu \right) d\mu .$$

Tento důkaz jsem úmyslně psal stručně; domnívám se, že čtenář by si jej měl pořádně vypracovat do všech detailů a prokázat tak, že dobře porozuměl celé partii o abstraktním integrálu.

19.7 **Metodická poznámka. Obvykle se zavádí součin měr až po vybudování teorie integrálu. A právě rovnost $\circledast$ z předešlé věty poskytá metodu pro jeho zavedení. Naznačme stručně myšlenku tohoto postupu.**

(a) **Nejdříve se zavedou systémy $\mathcal{Y}$, $\mathcal{D}$ a $\mathcal{S} \otimes \mathcal{M}$.**

(b) **Dokáže se následující věta:**

"Pro $A \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{M}$ je funkce $x \longrightarrow \nu(A^{x,*}) \left(= \int_Y c_A \, d\nu \right)$

$\mathcal{S}$-měřitelná na X, funkce $y \longrightarrow \mu(A^{*,y}) \left(= \int_X c_A \, d\mu \right)$

$\mathcal{M}$ -měřitelná na Y a platí rovnost

$$\int_X \nu(A^{x,*}) \, d\mu = \int_Y \mu(A^{*,y}) \, d\nu$$

$$(\text{tj.} \int_X \left(\int_Y c_A \, d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X c_A \, d\mu \right) d\nu) .$$

Důkaz je zcela obdobný důkazu předešlé věty.

(c) Položí-li se pro $A \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{M}$

$$\omega A = \int_X \nu(A^{x,*}) \, d\mu = \int_Y \mu(A^{*,y}) \, d\nu \quad ,$$

není těžké dokázat, že ω je míra na $\mathcal{S} \otimes \mathcal{M}$,

$$\omega (C \times D) = \mu C \, . \, \nu D \quad \text{pro } C \in \mathcal{S}, \; D \in \mathcal{M}$$

a že ω je jednoznačně určena právě touto poslední podmínkou.

(d) Míra ω na $\mathcal{S} \otimes \mathcal{M}$ se pak dále ještě zúplní.

$\boxed{19.8}$ Fubiniova věta. Nechť $h \in \mathcal{L}^*(\mu \hat{\otimes} \nu)$. Potom

(i) pro μ -skoro všechna $x \in X$ je $h(x,.) \in \mathcal{L}^*(\nu)$,

(ii) pro funkci $H: x \longrightarrow \int_Y h(x, .) \, d\nu$ platí $H \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a

$$\int_{X \times Y} h \, d\mu \hat{\otimes} \nu = \int_X H \, d\mu \, ,$$

tj.

$$\int_{X \times Y} h \, d\mu \hat{\otimes} \nu = \int_X \left(\int_Y h \, d\nu \right) d\mu \, .$$

Obdobně pro "obrácené pořadí integrování" podle μ a ν .

Důkaz. Rozdělme jej opět do několika okroků.

1. Víme již z věty 19.6, že tvrzení platí pro případ, kdy funkce h je charakteristickou funkcí množiny ze $\mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{M}$.

(2) Z linearity integrálu lehko zjistíme, že tvrzení je pravdivé i pro funkce ze systému $Z_{\mu \hat{\otimes} \nu}$. Každá taková funkce je totiž lineární kombinací charakteristických funkcí množin z $\mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{M}$ konečné míry.

(3) Tvrzení je též správné pro každou funkci $h \in Z^+_{\mu \hat{\otimes} \nu}$, stačí totiž použít Leviho větu.

(4) Konečně pro funkci $h \in \mathcal{L}^*(\mu \hat{\otimes} \nu)$ získáme tvrzení pomocí rozkladu. Opět důkaz proveďte sami!

C. CVIČENÍ A PROBLÉMY

19.A Cvičení. Zkuste si rozmyslet některá ze cvičení ke kapitolám 10 - 12, zejména 10.D, 10.G, 12.A, 12.C, 12.D a též odstavce 3,4,5,6 z [$\mathcal{T}$].

19.B Cvičení. Vyslovte též Fubiniovu větu i pro případ, kdy neintegrujeme přes celý prostor $X \times Y$, ale pouze přes nějakou množinu $M \in \mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{M}$. K tomu viz třeba přechod od věty 11.4 k větě 11.6.

19.C Cvičení. Nechť $f \in \mathcal{L}(\mu)$, $g \in \mathcal{L}(\nu)$, $h(x,y) = f(x).g(y)$.

Potom $h \in \mathcal{L}(\mu \hat{\otimes} \nu)$ a $\int_{X \times Y} h \, d\, \mu \otimes \nu = \int_X f \, d\mu \, . \int_Y g \, d\nu$.

Dokažte !

19.D Cvičení. Nechť $A \subset X$, $B \subset Y$. Potom $\lambda^*(A \times B) = \mu^* A \, . \, \nu^* B$, kde λ^*, μ^*, ν^* jsou vnější míry příslušné mírám $\mu \hat{\otimes} \nu$, μ, ν (viz 15.9). Dokažte !

Návod. Buďte $A_1 \in \mathcal{S}$, $B_1 \in \mathcal{M}$ takové, že $A_1 \supset A$, $B_1 \supset B$, $\mu A_1 = \mu^* A$, $\nu B_1 = \nu^* B$ (viz 13.38.C). Potom $A \times B \subset A_1 \times B_1$ a $\lambda^*(A \times B) \leq \lambda^*(A_1 \times B_1) = \mu A_1 . \nu B_1 = \mu^* A \, . \, \nu^* B$. Víme, že vnější míra λ^* je regulární (viz 15.11, 13.S), nechť tedy je $G \in \mathcal{M}(\lambda^*)$, $G \supset A \times B$, $\lambda^* G = \lambda^*(A \times B)$. Lze předpokládat, že $G \subset A_1 \times B_1$ (jinak vezmeme množinu $G \cap (A_1 \times B_1)$). Nyní pomocí Fubiniovy věty obdržíte, že

$$\lambda^*(A \times B) = \lambda^* G \geq \mu^* A_1 \, . \, \nu^* B_1 = \mu^* A \, . \, \nu^* B \, .$$

19.E Cvičení. Buď $h \in \Lambda(\mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{M})$. Potom

$$h \in \mathcal{L}(\mu \hat{\otimes} \nu) \text{ , právě když } \int_X \left(\int_Y c_M \, h \, d\nu \right) d\mu$$

existuje a je konečný pro každou množinu $M \in \mathcal{S} \hat{\otimes} \mathcal{M}$.

Dokažte !

Přehled symbolů

A. Všeobecné.

E_1 ... množina reálných čísel

E_1^* ... množina reálných čísel s přidáním symbolů $+\infty$, $-\infty$ a obvyklými operacemi $(0 \cdot \pm\infty = \pm\infty \cdot 0 = 0)$

R nebo Q ...(obvykle) množina racionálních čísel

N ... (obvykle) množina přirozených čísel

$\langle a,b\rangle = \{x \in E_1;\ a \le x \le b\}$ ... uzavřený interval

(a,b), resp. $(a,b\rangle$, $\langle a,b)$ ... otevřený, resp. polootevřený interval

$f : X \to Y$ ... zobrazení f množiny X do množiny Y

$f : X \to E_1$ ... reálná funkce = zobrazení X do E_1, též používáme názvu konečná funkce

$f : X \to E_1^*$ ... funkce = zobrazení X do E_1^*, též používáme názvu numerická funkce

(v kapitolách I.-III. uvažujeme většinou pouze reálné funkce, od kapitoly IV mohou funkce nabývat i nekonečných hodnot)

$f_n \to f$ na M ... posloupnost funkcí f_n konverguje k funkci f na množině M

$f_n \nearrow f$ na M ... posloupnost funkcí f_n konverguje monotonně nahoru k funkci f na množině M

$f_n \searrow f$ na M ... monotonní konvergence dolů

$f_n \rightrightarrows f$ na M ... posloupnost funkcí f_n konverguje stejnoměrně k funkci f na množině M

$\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$ .... prostor všech spojitých funkcí na intervalu $\langle a,b\rangle$

exp X ... systém všech podmnožin množiny X

B. Zavedené v těchto skriptech.

$\mathcal{D}(\langle a,b\rangle)$	1.1
$S(f,D)$, $s(f,D)$	1.1, 7.1
$(R)\overline{\int_a^b} f$, $(R)\underline{\int_a^b} f$	1.1
$R(\langle a,b\rangle)$	1.1
$(R)\int_a^b f$	1.1, 1.20

R e j s t ř í k

L i t e r a t u r a

[Č - M] Ilja Černý - Jan Mařík, Integrální počet I, SPN Praha, 1960 (skripta)

[He-St] Edwin Hewitt - Karl Stromberg, Real and abstract analysis, Springer, 1965

[D II] Vojtěch Jarník, Diferenciální počet II, Praha, 1955

[J I] Vojtěch Jarník, Integrální počet I, Praha, 1956

[J II] Vojtěch Jarník, Integrální počet II, Praha, 1955

[π] Jaroslav Lukeš, Příklady k teorii Lebesgueova integrálu, SPN Praha, 1968 (skripta)

[Re - Pr] Jaroslav Lukeš a kolektiv, Referáty a praktika z matematické analýzy, Praha, 1970 (skripta)

Jaroslav Lukeš a kolektiv, Problémy z matematické analýzy, SPN Praha, 1972 (skripta)

Berberian S.K., Measure and integration, New York, 1965

Bourbaki N., Fonctions d'une variable réelle, Paříž (ruský překlad v roce 1965)

Fichtěngolc G.M., Kurs diferencialnovo i intěgralnovo isčislenija I, II, III, Moskva, 1959

Gelbaum B. - Olmsted J., Kontrpriměry v analize, Moskva, 1967

Halmos P.R., Measure theory, 1950 (existuje ruský překlad)

Hildebrandt T.H., Theory of integration, New York, 1963

Král J., Teorie potenciálu I, SPN Praha, 1965 (skripta)

Munroe M.E., Introduction to measure and integration, 1953

Natanson I.P., Těorija funkcij veščestvěnnoj pěremenoj, Moskva, 1957

Pěsin I.N., Razvitije ponjatija intěgrala, Moskva, 1966

Sikorski R., Funkcje rzeczywiste I, Warszawa, 1958

Šilov G.E. - Gurevič B.L., Integrál, míra a derivace, Praha, 1970 (překlad z ruštiny)

Taylor A.E., General theory of functions and integration, 1965

White A.J., Real analysis, an introduction, London, 1968

Williamson J.H., Lebesgue integration, New York, 1962

Zaanen A.C., An introduction to the theory of integration, Amsterdam, 1958

O B S A H

Strana

K o n e c 1. d í l u