

---

# NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

Pravděpodobnostní rozdělení a pořádkové statistiky

Teoretické cvičenie #1 | 03.10.2022 & 05.10.2022

---

Nechť je  $X_1, \dots, X_n$  náhodný výběr z nějakého rozdělení. Definujme náhodné veličiny  $X_{(1)}$  a  $X_{(n)}$  jako

$$X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\} \quad \text{a} \quad X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

(nejmenší a největší pozorování ve výběru).

Označme  $W_n = X_{(n)} - X_{(1)}$  rozmezí dat (*range*) a  $M_n = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$  prostředek dat (*midpoint*). S takhle zavedeným značením spočítejte následující příklady.

## A Příklady na cvičení

**A1.** Nechť  $X_i$  má distribuční funkci  $F$  pro všechna  $i = 1, \dots, n$ .

- Určete distribuční funkce  $X_{(1)}$  a  $X_{(n)}$ .
- Nechť  $X_i$  má hustotu  $f$  vzhledem k Lebesguově míře. Najděte hustoty  $X_{(1)}$  a  $X_{(n)}$ .

**A2.** Nechť  $X_i$  má distribuční funkci  $F$  pro všechna  $i = 1, \dots, n$ .

- Určete sdruženou distribuční funkci  $X_{(1)}$  a  $X_{(n)}$ .
- Nechť  $X_i$  má hustotu  $f$  vzhledem k Lebesguově míře. Najděte sdruženou hustotu  $X_{(1)}$  a  $X_{(n)}$ .

**A3.** Nechť  $X_i$  má spojitě rozdělení s distribuční funkcí  $F$  a hustotou  $f$ .

- Určete sdruženou hustotu rozmezí  $W_n$  a minima  $X_{(1)}$ .
- Nechť  $X_i$  má exponenciální rozdělení. Ukažte, že  $W_n$  a  $X_{(1)}$  jsou nezávislé. Určete rozdělení náhodné veličny  $\exp\{-\lambda W_n\}$ .

**A4.** Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z rozdělení  $R(0, 1)$ . Spočítejte hustotu  $W_n$ ,  $E W_n$  a  $\text{var } W_n$ .

**A5.** Náhodné veličiny  $X, Y$  jsou nezávislé.  $X$  má rovnoměrné rozdělení na intervalu  $[-1, 1]$  a  $Y$  má rovnoměrné rozdělení na intervalu  $[0, 1]$ . Spočítejte podmíněné střední hodnoty

$$E [X^2 + Y|Y], \quad E [X|X + Y] \quad \text{and} \quad E [X^2 + Y|X + Y].$$

## B Doplnující příklady (nahrazování, samostatné procvičování)

Z následujících příkladů je potřebné samostatně spočítat **aspoň dva** příklady a řešení zaslat emailom na adresu [maciak@karlin.mff.cuni.cz](mailto:maciak@karlin.mff.cuni.cz), případně doručit v papírové verzi—v oboch případech **najneskôr před začátkem druhého cvičenia**.

**B1.** Pro nezávislé veličiny  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  a  $Y \sim \text{Exp}(\nu)$

- (a) určete rozdělení  $Z = \min\{X, Y\}$ ,
- (b) spočtěte  $\mathbf{E} Z$ ,
- (c) spočtěte  $\mathbf{P}[X < Y]$ .

**B2.** Nechť  $F_{X,Y}$  je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru  $(X, Y)^T$ . Určete distribuční funkci  $Z = \max(X, Y)$ .

**B3.** Pro nezávislé stejně rozdělené veličiny  $X, Y \sim \text{Exp}(\lambda)$  určete hustotu

$$U = \frac{\min\{X, Y\}}{\max\{X, Y\}}.$$

**B4.** Pro náhodný výběr  $X_1, \dots, X_n$  z rovnoměrného rozdělení na intervalu  $(0, 1)$  definujme rozsah výběru

$$V = \max\{X_1, \dots, X_n\} - \min\{X_1, \dots, X_n\}.$$

Spočtěte střední hodnotu rozsahu  $V$ .

**B5.** Uvažme funkci  $F(x, y) = \max\{x, y\}$  pro  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ . Doplňme  $F$  na  $\mathbb{R}^2$  tak, aby splňovala základní vlastnost distribuční funkce ( $0 \leq F(x, y) \leq 1$ ). To lze udělat např. takto:

$$F(x, y) = \min\left[\max\{\max(x, y), 0\}, 1\right], \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Nyní tedy máme funkci  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ . Zjistěte, zda je  $F$  distribuční funkcí nějakého náhodného vektoru.

**B6.** Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z  $R(0, \theta)$ , kde  $\theta > 0$ . Ukažte, že  $W_n/\theta$  má beta rozdělení a určete jeho parametry.

**B7.** Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z libovolného spojitého rozdělení s distribuční funkcí  $F$  a hustotou  $f$ . Dokažte, že prostředek dat  $M_n$  má distribuční funkci

$$H(x) = n \int_{-\infty}^x [F(2x - y) - F(y)]^{n-1} f(y) dy.$$

**B8.** Nechť  $X_i \sim N(0, 1)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , jsou nezávislé. Ukažte, že pro  $n = 2$  jest  $\mathbf{E} W_n = \pi^{-1/2}$  a pro  $n = 3$  jest  $\mathbf{E} W_n = \frac{3}{2}\pi^{-1/2}$ .

**B9.** Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr nezáporných spojitých náhodných veličin s distribuční funkcí  $F$ . Dokažte, že

$$\mathbf{E} W_n = \int_0^\infty \{1 - F^n(x) - [1 - F(x)]^n\} dx.$$

[Návod: Použijte vztah  $\mathbf{E} X = \int_0^\infty [1 - F(x)] dx$ , který platí pro libovolnou spojitou náhodnou veličinu takovou, že  $\mathbf{P}[X \geq 0] = 1$ .]

**B10.** [Obtížnější] Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z  $R(0, \theta)$ , kde  $\theta > 0$ . Ukažte, že

$$n \left[ 1 - \frac{W_n}{\theta} \right] \xrightarrow{D} Y, \quad n \rightarrow \infty,$$

kde  $Y$  má gama rozdělení.