
NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

Pravděpodobnostní rozdělení a pořádkové statistiky

Teoretické cvičenie #1 | 12.10.2023

Nechť je X_1, \dots, X_n náhodný výběr z nějakého rozdělení s distribuční funkcí F . Definujme náhodné veličiny $X_{(1)}$ a $X_{(n)}$ jako

$$X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\} \quad \text{a} \quad X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

(t.j., nejmenší a největší pozorování ve výběru).

Označme $W_n = X_{(n)} - X_{(1)}$ rozmezí dat (*range*) a $M_n = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$ prostředek dat (*midpoint*). Takhle zavedené značení uvažujte při počítání následujících příkladů.

A Příklady na cvičení

A1. Nechť X_i má distribuční funkci F pro všechna $i = 1, \dots, n$.

- Určete distribuční funkce $X_{(1)}$ a $X_{(n)}$.
- Nechť X_i má hustotu f vzhledem k Lebesguově míře. Najděte hustoty $X_{(1)}$ a $X_{(n)}$.
- Uveďte hustoty $X_{(1)}$ a $X_{(n)}$, když X_i má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda > 0$.

A2. Nechť X_i má distribuční funkci F pro všechna $i = 1, \dots, n$.

- Určete sdruženou distribuční funkci $X_{(1)}$ a $X_{(n)}$.
- Nechť X_i má hustotu f vzhledem k Lebesguově míře. Najděte sdruženou hustotu $X_{(1)}$ a $X_{(n)}$.

A3. Nechť X_i má spojitě rozdělení s distribuční funkcí F a hustotou f .

- Určete sdruženou hustotu rozmezí W_n a minima $X_{(1)}$.
- Nechť X_i má exponenciální rozdělení. Ukažte, že W_n a $X_{(1)}$ jsou nezávislé. Určete rozdělení náhodné veličny $\exp\{-\lambda W_n\}$.

A4. Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozdělení $R(0, 1)$. Spočítejte hustotu W_n , $E W_n$ a $\text{var } W_n$.

A5. Náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé. X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[-1, 1]$ a Y má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 1]$. Spočtete podmíněné střední hodnoty

$$E[X^2 + Y|Y], \quad E[X|X + Y] \quad \text{and} \quad E[X^2 + Y|X + Y].$$

B Doplnující příklady (nahrazování, samostatné procvičování)

Z následujících příkladů je potřebné samostatně spočítat **aspoň dva** příklady a řešení zaslat emailom na adresu maciak@karlin.mff.cuni.cz, případně doručit v papírové verzi—v oboch případech **najneskôr** před začátkem druhého cvičenia.

B1. Pro nezávislé veličiny $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ a $Y \sim \text{Exp}(\nu)$

- (a) určete rozdělení $Z = \min\{X, Y\}$,
- (b) spočtěte $\mathbf{E} Z$,
- (c) spočtěte $\mathbf{P}[X < Y]$.

B2. Nechť $F_{X,Y}$ je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru $(X, Y)^T$. Určete distribuční funkci $Z = \max(X, Y)$.

B3. Pro nezávislé stejně rozdělené veličiny $X, Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ určete hustotu

$$U = \frac{\min\{X, Y\}}{\max\{X, Y\}}.$$

B4. Pro náhodný výběr X_1, \dots, X_n z rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0, 1)$ definujme rozsah výběru

$$V = \max\{X_1, \dots, X_n\} - \min\{X_1, \dots, X_n\}.$$

Spočtěte střední hodnotu rozsahu V .

B5. Uvažme funkci $F(x, y) = \max\{x, y\}$ pro $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Doplňme F na \mathbb{R}^2 tak, aby splňovala základní vlastnost distribuční funkce ($0 \leq F(x, y) \leq 1$). To lze udělat např. takto:

$$F(x, y) = \min\left[\max\{\max(x, y), 0\}, 1\right], \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Nyní tedy máme funkci $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$. Zjistěte, zda je F distribuční funkcí nějakého náhodného vektoru.

B6. Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z $R(0, \theta)$, kde $\theta > 0$. Ukažte, že W_n/θ má beta rozdělení a určete jeho parametry.

B7. Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z libovolného spojitého rozdělení s distribuční funkcí F a hustotou f . Dokažte, že prostředek dat M_n má distribuční funkci

$$H(x) = n \int_{-\infty}^x [F(2x - y) - F(y)]^{n-1} f(y) dy.$$

B8. Nechť $X_i \sim N(0, 1)$, $i = 1, \dots, n$, jsou nezávislé. Ukažte, že pro $n = 2$ jest $\mathbf{E} W_n = \pi^{-1/2}$ a pro $n = 3$ jest $\mathbf{E} W_n = \frac{3}{2}\pi^{-1/2}$.

B9. Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr nezáporných spojitých náhodných veličin s distribuční funkcí F . Dokažte, že

$$\mathbf{E} W_n = \int_0^\infty \{1 - F^n(x) - [1 - F(x)]^n\} dx.$$

[Návod: Použijte vztah $\mathbf{E} X = \int_0^\infty [1 - F(x)] dx$, který platí pro libovolnou spojitou náhodnou veličinu takovou, že $\mathbf{P}[X \geq 0] = 1$.]

B10. [Obtížnější] Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z $R(0, \theta)$, kde $\theta > 0$. Ukažte, že

$$n \left[1 - \frac{W_n}{\theta} \right] \xrightarrow{D} Y, \quad n \rightarrow \infty,$$

kde Y má gama rozdělení.