

---

# NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

Pořádkové statistiky. Konstrukce intervalových odhadů

Teoretické cvičenie #3 | 17.10.2022 & 19.10.2022

---

Pro náhodný výběr  $X_1, \dots, X_n \sim F_\theta$  z rozdělení, které závisí na neznámém parametru  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p$  (jednorozměrný parametr pro  $p = 1$ , ale lze zobecnit) definujeme odhad neznámého parametru  $\theta \in \Theta$  jako měřitelné zobrazení  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \Theta$  a příslušný odhad značíme jako  $\hat{\theta}_n = T(X_1, \dots, X_n)$ .

Odhad  $\hat{\theta}_n$  je nestranným odhadem neznámého parametru  $\theta \in \Theta$ , pokud platí, že

$$E_\theta \hat{\theta}_n = \int_{\mathbb{R}} T(X_1, \dots, X_n) dF_\theta(x) = \theta,$$

co mus platit pro všechny  $\theta \in \Theta$ . Odhad  $\hat{\theta}_n$  je silně/slabě konzistentný, pokud platí, že

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta \quad \text{v pravděpodobnosti/skoro jistě,}$$

opět pro všechny  $\theta \in \Theta$ . Intervalovým odhadem na hladině  $\alpha \in (0, 1)$  rozumíme dvojici měřitelných zobrazení  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \Theta$  (lower bound) a  $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \Theta$  (upper bound) takových, že

$$P_\theta \left[ \theta \in (L(X_1, \dots, X_n); U(X_1, \dots, X_n)) \right] = 1 - \alpha,$$

opět pro všechny  $\theta \in \Theta$ . V případě konstrukce asymptotického intervalu spolehlivosti platí poslední rovnost pouze asymptoticky, t.j. pro  $n \rightarrow \infty$ .

## A Příklady na cvičení

### A1. [Procvičovací]

Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení na intervalu  $(0, \theta_X)$ , pro  $\theta_X > 0$ . Sestrojte přesný interval spolehlivosti pro  $\theta_X$  založený na pořadové statistice  $X_{(n)}$ .

### A2. [Procvičovací]

Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s parametrem  $\lambda_X > 0$ . Sestrojte přesný interval spolehlivosti pro  $E X_i = 1/\lambda_X$  založený na náhodné veličině  $\sum_{i=1}^n X_i$ .

### A3. [Procvičovací]

Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s neznámým parametrem  $\lambda_X > 0$ .

- (a) Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro  $\lambda_X$ .
- (b) Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro  $\log \lambda_X$  a z něho odvoďte přibližný interval spolehlivosti pro  $\lambda_X$ .

### A4. [Procvičovací]

Máme-li dva nezávislé náhodné výběry  $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda_X)$  a  $Y_1, \dots, Y_m \sim \text{Exp}(\lambda_Y)$ . Odvoďte přesný interval spolehlivosti pro parametr  $\varrho = \lambda_X/\lambda_Y$ .

## B Doplnující příklady (opakování, nahrazování, procvičování)

Z následujících příkladů je potřebné samostatně spočítat aspoň dva příklady (jeden z příkladů označených B1 – B5 a jeden z B6 – B10) a řešení zaslat emailom na adresu [maciak\[AT\]karlin.mff.cuni.cz](mailto:maciak[AT]karlin.mff.cuni.cz), případně doručit v papírové verzi—v oboch případech nejneskôr před začátkem štvrtého cvičenia.

**B1.** Uvažujte náhodný výběr o rozsahu  $n \in \mathbb{N}$  z exponenciálního rozdělení s parametrem  $\lambda > 0$  a příslušnou hustotou  $f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \cdot \mathbb{I}_{\{x>0\}}$ . Odhadněte neznámý parametr  $\lambda > 0$  pomocí momentové metody. Vyšetřete nestrannost a konzistenci.

**B2.** Uvažujte náhodný výběr  $X_1, \dots, X_n$  z rozdělení, které je definované hustotou

$$f(x; \theta) = 2 \frac{\theta - x}{\theta} \mathbb{1}_{(0, \theta)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde  $\theta > 0$  je neznámý parametr. Najděte odhad  $\theta$  metodou momentů a vyšetřete jeho konzistenci.

**B3.** Uvažujte náhodný výběr  $X_1, \dots, X_n$  z rozdělení s hustotou

$$f(x; \theta) = \frac{1}{2\theta} \exp \left\{ -\frac{|x|}{\theta} \right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde  $\theta > 0$  je neznámý parametr. Najděte odhad  $\theta$  metodou momentů a vyšetřete jeho konzistenci.

**B4.**  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z diskrétního rovnoměrného rozdělení na množině  $\{1, 2, \dots, \theta\}$ , kde  $\theta \in \mathbb{N}$ . Najděte odhad parametru  $\theta$  metodou momentů.

**B5.** Je-li  $X_1, \dots, X_n$  náhodný výběr z  $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$  rozdělení, najděte odhad vektorového parametru  $[\mu, \sigma^2]^\top$  metodou momentů.

**B6.** Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení na intervalu  $(0, \theta_X)$ . Nechť  $n = 2k + 1$ . Použijte  $X_{(k+1)}$  jako bodový odhad mediánu  $m_X$  rozdělení  $X_i$  a sestrojte přesný interval spolehlivosti pro  $m_X$ .

**B7.** Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s parametrem  $\lambda_X$ .

(a) Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro  $\lambda_X$ .

(b) Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro  $\sqrt{\lambda_X}$  a z něho odvoďte přibližný interval spolehlivosti pro  $\lambda_X$ .

**B8.** Uvažujme náhodný výběr  $X_1, \dots, X_n$  z rozdělení s hustotou  $f(x; \theta_X)$ , kde

$$f(x; \theta) = \frac{x}{\theta^2} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\theta^2} \right\} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

(a) Najděte rozdělení náhodných veličin  $X_i^2$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

(b) Sestrojte přesný interval spolehlivosti pro parametr  $\theta_X$ .

(c) Sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro parametr  $\theta_X$ .

**B9.** Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z alternativního rozdělení s parametrem  $p_X$ . Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro  $\theta_X = \log[p_X/(1 - p_X)]$  a z něho odvoďte přibližný interval spolehlivosti pro  $p_X$ .

**B10.** Uvažujme náhodný výběr  $X_1, \dots, X_n$  z rozdělení s hustotou  $f(x; \theta_X)$ , kde

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} \mathbb{I}_{(0,1)}(x), \quad \theta > 0.$$

(a) Sestrojte přesný interval spolehlivosti pro parametr  $\theta_X$ .

(b) Pomocí centrální limitní věty sestrojte přibližný interval spolehlivosti pro parametr  $\theta_X$ .

[Návod: Uvažujte transformaci  $Y_i = -\log X_i$ ]