
NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

Metoda maximální věrohodnosti a momentová metoda.

Teoretické cvičenie #4 | 24.10.2022 & 26.10.2022

Nech X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f_\theta(x)$ (vzhledem k Lebesgueově míře, alebo vzhledem k čítačej míře), ktorá závisí na neznámom parametri $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ (prípadne na mnohorozmernom parametri $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p$, pre nejaké $p \in \mathbb{N}$). Viero hodnostná funkcia (funkcia neznámeho parametru $\theta \in \Theta$) je definovaná ako

$$L(\theta, X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(X_i), \quad \text{pre } \theta \in \Theta$$

a v stručnosti sa často označuje aj ako $L(\theta, \mathbb{X})$, kde $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$. Logaritmicá vierohodnostná funkcia je potom definovaná ako

$$l(\theta, X_1, \dots, X_n) = l(\theta, \mathbb{X}) = \log L(\theta, \mathbb{X}) = \sum_{i=1}^n \log(f_\theta(X_i)).$$

Odhad neznámeho parametru $\theta \in \Theta$ pomocou metódy maximálnej vierohodnosti je definovaný ako

$$\hat{\theta}_n = \operatorname{Argmax}_{\theta \in \Theta} l(\theta, \mathbb{X})$$

a za platnosti podmienok regularity platí, že

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \stackrel{as}{\approx} N(0, I^{-1}(\theta)), \quad \text{kde } I(\theta) = \frac{1}{n} E \left[-\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l(\theta, \mathbb{X}) \right]$$

je tzv. Fisherová informácia o parametru $\theta \in \Theta$, obsiahnutá v jednom porozovaní $X_i \sim f_\theta(x)$.

A Příklady na cvičení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x|\theta_X) \in \mathcal{F} = \{f(x|\theta), \theta \in \Theta\}$.

A1. [Procvičovací] Momentovou metodou najděte odhad $\tilde{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu \mathcal{F} , kde

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}} \mathbb{I}_{(1,\infty)}(x), \quad \theta > 2 \quad (\text{Paretovo rozdělení}).$$

Určete asymptotické rozdělení $\tilde{\theta}_n$.

[Použijte vztahy $E X_i = \frac{\theta_X}{\theta_X - 1}$, $\operatorname{var} X_i = \frac{\theta_X}{(\theta_X - 1)^2(\theta_X - 2)}$.]

A2. [Procvičovací] Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu z předchozího příkladu. Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$ a porovnejte asymptotický rozptyl maximálně věrohodného odhadu $\hat{\theta}_n$ a momentového odhadu $\tilde{\theta}_n$.

A3. [Procvičovací] Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu \mathcal{F} , kde

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{1-\theta} x^{(2\theta-1)/(1-\theta)} \mathbb{I}_{(0,1)}(x), \quad \theta \in (0, 1).$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.

A4. [Procvičovací] Momentovou metodou najděte odhad $\tilde{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu z předchozího příkladu. Určete asymptotické rozdělení $\tilde{\theta}_n$ a porovnejte asymptotický rozptyl maximálně věrohodného odhadu $\hat{\theta}_n$ a momentového odhadu $\tilde{\theta}_n$.

B Doplnující příklady (nahrazování, procvičování)

Z následujících příkladů je potřebné samostatně spočítat aspoň dva příklady a vypracované řešení zaslat emailom na adresu maciak@karlin.mff.cuni.cz, případně doručit v papírové verzi—v obou případech nejneskôr před začátkem piateho cvičenia..

V nasledujících příkladoch obecně předpokládame, že X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x|\theta_X) \in \mathcal{F} = \{f(x|\theta), \theta \in \Theta\}$.

B1. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x; \theta) = \theta(\theta + 1)x^{\theta-1}(1-x)\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.

B2. Momentovou metodou najděte odhad $\tilde{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu \mathcal{F} , kde

$$f(x; \theta) = \theta(\theta + 1)x^{\theta-1}(1-x)\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\tilde{\theta}_n$.

B3. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x; \theta) = \frac{2x}{\theta^2} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^2\right\} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.

B4. Momentovou metodou najděte odhad $\tilde{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu \mathcal{F} , kde

$$f(x; \theta) = \frac{2x}{\theta^2} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^2\right\} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\tilde{\theta}_n$.

B5. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\theta^2}\right\}, \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.

B6. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x|\theta) = \frac{x}{\theta^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\theta^2}\right\} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0 \quad (\text{Rayleighovo rozdělení}).$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.

[Použijte vztah $E X_i^2 = 2\theta_X^2$.]

B7. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x|\theta) = \sqrt{\frac{\theta}{2\pi x^3}} \exp\left\{-\frac{\theta(x-1)^2}{2x}\right\} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.

B8. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x|\theta) = \sqrt{\frac{1}{\pi x^3}} \exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{\theta^2 x}\right\} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.

B9. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\hat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{x^2} \exp\left\{-\frac{\theta}{x}\right\} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\hat{\theta}_n$.