
NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

Pořádkové statistiky. Nestrannost a konsistence odhadů

Podrobné riešenie príkladov z 2. cvičenia

A Vzorové příklady s podrobným řešením

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr ze spojitého rozdělení s distribuční funkcí F a hustotou f .

A1. Nechť $n = 2k + 1$.

- Najděte hustotu prostředního pozorování $X_{(k+1)}$. [Tato statistika se nazývá výběrový medián.]

Řešení:

Obecně (podľa Vety 1.9 z prednášky) platí, že hustota k -tej pořadovej statistiky vzhľadom k Lebesgueovej miere je

$$f_{(k)}(x) = n \binom{n-1}{k-1} f(x) F^{k-1}(x) [1 - F(x)]^{n-k}, \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}.$$

Pre nepárny (lichý) rozsah náhodného výberu (keďže $n = 2k + 1$) je výberový medián ($k + 1$) poradová štatistika s príslušnou hustotou

$$f_{(k+1)}(x) = n \binom{2k}{k} f(x) F^k(x) [1 - F(x)]^k,$$

opäť pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- Nechť X_i má rovnomerné rozdelení na intervale $(0, 1)$. Spočítejte $E X_{(k+1)}$ a $\text{var } X_{(k+1)}$.

Řešení:

Keďže náhodné veličiny X_1, \dots, X_n pochádzajú z rovnomerného rozdelenia na intervale $(0, 1)$, t.j., $X_i \sim R(0, 1)$, tak hustota výberového mediánu, t.j., náhodnej veličiny $X_{(k+1)}$ je

$$f_{(k+1)} = n \binom{2k}{k} x^k (1-x)^k, \quad x \in (0, 1)$$

a $f_{(k+1)}(x) = 0$ pre $x \notin (0, 1)$. To je hustota náhodnej veličiny s Beta rozdelením s parametrami $\alpha = k + 1$ a $\beta = k + 1$. To znamená, že výberový medián náhodných veličín X_1, \dots, X_n z rovnomerného rozdelenia na intervale $(0, 1)$ (pre $n = 2k + 1$) má Beta rozdelenie, t.j., $X_{(k+1)} \sim \text{Beta}(k + 1, k + 1)$. Pre strednú hodnotu a rozptyl zároveň platí, že

$$E X_{(k+1)} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{k + 1}{2(k + 1)} = \frac{1}{2},$$
$$\text{var } X_{(k+1)} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} = \frac{(k + 1)^2}{4(\alpha + \beta)^2(2k + 3)} = \frac{1}{4(2k + 3)} = \frac{1}{4(n + 2)}.$$

- Nechť $X_i \sim R(0, \theta)$. Je $X_{(k+1)}$ nestranným a/nebo konsistentním odhadem mediánu rozdělení $R(0, \theta)$? [Použijte tvrzení P.7.5]

Řešení:

V prvom rade je nutné si uvedomiť jednoduchý fakt, že ak $X_i \sim R(0, 1)$, tak potom platí, že $\theta X_i \sim R(0, \theta)$, pro libovolné $\theta > 0$. Pokud teda $X_i \sim R(0, \theta)$, pre nejaké $\theta > 0$, tak potom

$$EX_{(k+1)} = \frac{\theta}{2} \quad \text{a tiež} \quad \text{var } X_{(k+1)} = \frac{\theta^2}{4(n+2)}.$$

Keďže medián náhodnej veličiny s rovnomerným rozdelením na intervale $(0, \theta) \subset \mathbb{R}$ je $\theta/2$, tak náhodná veličina $X_{(k+1)}$ je nestranným odhadom teoretického mediánu. Keďže navyše platí aj

$$\text{var } X_{(k+1)} = \frac{\theta^2}{4(n+2)} \rightarrow 0, \quad \text{pre } n \rightarrow \infty,$$

tak $X_{(k+1)}$ je zároveň aj konsistentným odhadom teoretického mediánu, t.j., parametru $\tilde{\theta} = \frac{\theta}{2}$.

A2. Nechť X_i má exponenciální rozdělení s parametrem 1.

- Definujte

$$Z_1 = nX_{(1)}, \quad Z_k = (n - k + 1)(X_{(k)} - X_{(k-1)}), \quad k = 2, \dots, n.$$

Ukažte, že Z_1, \dots, Z_n jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením $\text{Exp}(1)$.

Řešení:

Z prednášky už vieme, že združená hustota náhodného vektoru $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})^\top$ je

$$f(y_1, \dots, y_n) = n! f(y_1) \cdots f(y_n), \quad \text{pre } y_1 < \cdots < y_n$$

a $f(y_1, \dots, y_n) = 0$ inak (Veta 1.7 z prednášky). Keďže náhodné veličiny X_1, \dots, X_n majú exponenciálne rozdelenie s parametrom $\lambda = 1$, tak zároveň vieme, že pre hustotu X_i platí

$$f(x) = e^{-x} \cdot \mathbb{I}_{\{x>0\}}$$

a $EX_i = \text{var } X_i = 1$. Pre združenú hustotu $f(y_1, \dots, y_n)$ preto platí

$$f(y_1, \dots, y_n) = n! e^{-\sum_{i=1}^n y_i}, \quad \text{pre } y_1 < \cdots < y_n$$

a $f(y_1, \dots, y_n) = 0$ inak. Následne súčet v exponente zapíšeme iným spôsobom:

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n (n - i + 1)(y_i - y_{i-1}),$$

kde jsme dodefinovali počiatočnú hodnotu $y_0 = 0$.

Združenú hustotu teda môžeme teda zapísať ako

$$f(y_1, \dots, y_n) = n! e^{-\sum_{i=1}^n (n-i+1)(y_i - y_{i-1})}, \quad \text{opäť pre } y_1 < \dots < y_n$$

a $f(y_1, \dots, y_n) = 0$ inak. Použijeme transformáciu $t : (y_1, \dots, y_n) \rightarrow (z_1, \dots, z_n)$ definovanú (podľa zadania) následovne:

$$\begin{aligned} z_1 &= ny_1 \\ z_2 &= (n-1)(y_2 - y_1) \\ &\dots\dots \\ z_i &= (n-i+1)(y_i - y_{i-1}) \\ &\dots\dots \\ z_n &= 1 \cdot (y_n - y_{n-1}). \end{aligned}$$

Keďže $y_1 < \dots < y_n$ (resp. stačí nam riešiť tento prípad), tak zároveň dostávame, že $z_i > 0$ pre $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Pre inverznú transformáciu $t^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ platí:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{n} z_1 \\ y_2 &= \frac{z_2}{n-1} + y_1 = \sum_{j=1}^2 \frac{z_j}{n-j+1} \\ &\dots\dots \\ y_i &= \frac{z_i}{n-i+1} + y_{i-1} = \sum_{j=1}^i \frac{z_j}{n-j+1} \quad (\star) \\ &\dots\dots \\ y_n &= \sum_{j=1}^n \frac{z_j}{n-j+1}. \end{aligned}$$

Pre Jakobián tihto inverzného zorazenia platí, že

$$|J_{t^{-1}}(z_1, \dots, z_n)| = \left| \frac{\partial t^{-1}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}) \right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{n!},$$

kde jsme využili značenie $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^\top$.

Združené rozdelenie náhodného vektoru $(Z_1, \dots, Z_n)^\top$ (definovaného transformáciou t z náhodného vektoru $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})^\top$) získame pomocou vety o transformácii

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Z}}(z_1, \dots, z_n) &= f_{\mathbf{X}_{(\cdot)}}(t^{-1}(z_1, \dots, z_n)) \cdot \left| \frac{\partial t^{-1}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}) \right| \\ &= e^{-\sum_{i=1}^n z_i}, \quad \text{pre } z_i > 0, \end{aligned}$$

kde $f_{\mathbf{Z}}$ značí združenú hustotu náhodného vektoru $(Z_1, \dots, Z_n)^\top$ a $f_{\mathbf{X}_{(\cdot)}}$ je združená hustota usporiadaného náhodného vektoru $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})^\top$. Zároveň platí, že hustota je nulová pre ľubovoľné $z_i \leq 0$. Keďže navyiac je možné hustotu faktorizovať v zmysle

$$f_{\mathbf{Z}}(z_1, \dots, z_n) = f_{Z_1}(z_1) \cdots f_{Z_n}(z_n) = e^{-z_1} \cdots e^{-z_n},$$

pre všetky $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tak náhodné veličiny Z_1, \dots, Z_n sú nezávislé.

- Vyjádřete $X_{(r)}$ pomocí lineární kombinace veličin Z_1, \dots, Z_n a pomocí tohoto vztahu spočítejte $E X_{(r)}$ a $\text{var } X_{(r)}$ (pro libovolné $r = 1, \dots, n$).

Řešení:

Pro libovolné $r \in \{1, \dots, n\}$ už vieme z použitej transformácie – konkrétne z výrazu v (\star), že platí

$$X_{(r)} = g(Z_1, \dots, Z_n) = \sum_{j=1}^r \frac{Z_j}{n-j+1}.$$

Keďže platí, že $Z_1, \dots, Z_n \sim \text{Exp}(1)$ tak pre strednú hodnotu $X_{(r)}$ platí

$$E X_{(r)} = E \left[\sum_{j=1}^r \frac{Z_j}{n-j+1} \right] = \sum_{j=1}^r \frac{E Z_j}{n-j+1} = \sum_{j=1}^r \frac{1}{n-j+1}$$

a pre rozptyl platí

$$\text{var } X_{(r)} = \sum_{j=1}^r \frac{\text{var } Z_j}{(n-j+1)^2} = \sum_{j=1}^r \frac{1}{(n-j+1)^2},$$

pričom prvá rovnosť v poslednom riadku plynie z nezávislosti náhodných veličín Z_1, \dots, Z_n .

- Nechť $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ a $n = 2k + 1$. Je $X_{(k+1)}$ nestranným a/nebo konsistentním odhadem mediánu rozdění $\text{Exp}(\lambda)$?

Řešení:

Nechť $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, tak, že $E X_i = \frac{1}{\lambda}$, pre $\lambda > 0$. Potom nutne $\lambda X_i \sim \text{Exp}(1)$ a tudíž $E[\lambda X_i] = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} = 1$. Tým pádom dostaneme aj

$$E X_{(k+1)} = \frac{1}{\lambda} E[\lambda X_{(k+1)}] = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{E[\lambda X_j]}{n-j+1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{n-j+1}$$

a tiež

$$\text{var } X_{(k+1)} = \frac{1}{\lambda^2} \text{var} [\lambda X_{(k+1)}] = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\text{var} [\lambda X_j]}{(n-j+1)^2} = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{(n-j+1)^2},$$

kde druhá rovnosť predchádzajúceho výrazu plynie (opäť) z nezávislosti náhodných veličín X_1, \dots, X_n . Pre medián náhodných veličín $X_i \sim \text{Exp}\lambda$ platí, že je to hodnota $x_m \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 1 - e^{-\lambda x_m} \\ \frac{1}{2} &= e^{-\lambda x_m} \\ x_m &= \frac{1}{\lambda} \log 2. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že zároveň dostávame

$$E X_{(k+1)} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-k} \right) \neq \frac{1}{\lambda} \log 2,$$

takže náhodná veličina $X_{(k+1)}$ nie je nestranným odhadom pre teoretický medián $x_m = \frac{1}{\lambda} \log 2$. Ukážeme ale, že sa jedná o asymptoticky nestranný odhad (t.j., $E X_{(k+1)} \rightarrow \frac{1}{\lambda} \log 2$, pre $n \rightarrow \infty$, kde $k = \frac{n-1}{2}$).

Využijeme k tomu tzv. Euler–Mascheroni konštantu $C = 0.5772\dots$, ktorá je definovaná ako limita

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right).$$

Porovnáme dva čiastočné súčty pre ľubovoľné nepárne (liché) $n \in \mathbb{N}$ a $\frac{n+1}{2}$:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\frac{n-1}{2}} + \dots + \frac{1}{n} - \log n &\rightarrow C && \text{pre } n \rightarrow \infty; \\ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\frac{n-1}{2}} - \log \frac{n-1}{2} &\rightarrow C && \text{tiež pre } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Odčítaním hodnôt po stĺpcoch a uvedomením si faktu, že $\frac{1}{\frac{n-1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{n-k}$, dostaneme

$$\left(\frac{1}{n-k} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \left(\log n - \log \frac{n-1}{2} \right) \rightarrow (C - C) = 0 \quad \text{pre } n \rightarrow \infty$$

a preto tiež platí, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EX_{(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{n-k} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right] = \frac{1}{\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log n - \log \frac{n-1}{2} \right),$$

pričom platí, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log n - \log \frac{n-1}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log 2 - \log \frac{n}{n-1} \right) = \log 2.$$

Jedná sa teda o asymptotický nestranný odhad teoretického mediánu $x_m \in \mathbb{R}$. Pro konzistenciu ešte ukážeme, že $\text{var } X_{(k+1)} \rightarrow 0$. Platí, že

$$\text{var } X_{(k+1)} = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{(n-k)^2} \right),$$

a tiež, že $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{6}$ pre $n \rightarrow \infty$. Túto konvergentnú sumu ale môžeme rozpísať na dve časti

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{i^2} + \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^n \frac{1}{i^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{6},$$

pričom platí, že

$$\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{i^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{6},$$

pre n idúce do nekonečna a tým pádom druhá suma (zbytok) konverguje k nule, t.j.

$$\sum_{i=\frac{n+1}{2}}^n \frac{1}{i^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Konečne teda dostávame, že $\text{var } X_{(k+1)} \rightarrow 0$ a náhodná veličina $X_{(k+1)}$ (resp. $(k+1)$ -vá poradová štatistika) je konzistentným odhadom teoretického mediánu $x_m \in \mathbb{R}$.

A3. Nechť X_i má rozdění $R(\theta_1, \theta_2)$. Najděte nestranné odhady parametrů θ_1 a θ_2 založené na maximu $X_{(n)}$ a minimu $X_{(1)}$.

Řešení:

Je zřejmé, že transformované náhodné veličiny $X_i - \theta_1$ pre $i = 1, \dots, n$ mají rovnomerné rozdění na intervale $(0, \theta_2 - \theta_1)$, t.j., $X_1 - \theta_1, \dots, X_n - \theta_1 \sim R(0, \theta_2 - \theta_1)$. Zároveň ale náhodné veličiny $Z_i \equiv (X_i - \theta_1)/(\theta_2 - \theta_1)$ pre $i = 1, \dots, n$ mají rovnomerné rozdění na intervale $(0, 1)$.

Pre $Z_1, \dots, Z_n \sim R(0, 1)$ už vieme, že (opakovanie)

$$\begin{aligned} Z_{(n)} \text{ má hustotu } f_{(n)}(x) &= nx^{n-1} && \text{pre } x \in (0, 1) \text{ a nula inak;} \\ Z_{(1)} \text{ má hustotu } f_{(1)}(x) &= n(1-x)^{n-1} && \text{pre } x \in (0, 1) \text{ a nula inak.} \end{aligned}$$

To znamená, že pre strednú hodnotu dostaneme

$$EZ_{(n)} = E\left[\frac{X_{(n)} - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{(n)}(x) dx = \int_0^1 nx^n dx = \frac{n}{n+1};$$

a podobne aj

$$EZ_{(1)} = E\left[\frac{X_{(1)} - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{(1)}(x) dx = \int_0^1 nx(1-x)^{n-1} dx = \frac{1}{n+1}.$$

(resp. je možné priamo využiť Beta rozdění—vid' riešenie príkladu A1(b))

Vďaka linearite strednej hodnoty ale z tohto dokážeme vyjadriť aj stredné hodnoty $EX_{(n)}$ a $EX_{(1)}$ ako funkcie neznámych parametrov $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, takých, že $\theta_1 < \theta_2$. Dostávame

$$EX_{(n)} = \frac{n}{n+1}\theta_2 + \frac{1}{n+1}\theta_1$$

a tiež

$$EX_{(1)} = \frac{n}{n+1}\theta_1 + \frac{1}{n+1}\theta_2.$$

To je ale sústava dvoch rovníc pre dve nezáme (θ_1 a θ_2). Riešením sústavy rovníc dostaneme riešenie:

$$\theta_1 = \frac{n+1}{n^2+1}(nEX_{(1)} - EX_{(n)}) \quad \text{a} \quad \theta_2 = \frac{n+1}{n^2+1}(nEX_{(n)} - EX_{(1)}).$$

Príslušné nestranné odhady pre parametre $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ sú

$$\hat{\theta}_1 = \frac{n+1}{n^2+1}(nX_{(1)} - X_{(n)}) \quad \text{a} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n^2+1}(nX_{(n)} - X_{(1)}).$$

(pretože $E\hat{\theta}_1 = \frac{n+1}{n^2+1}(nEX_{(1)} - EX_{(n)}) = \theta_1$ a $E\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n^2+1}(nEX_{(n)} - EX_{(1)}) = \theta_2$)

A4. Pro náhodný výběr X_1, \dots, X_n z Poissonova rozdění s parametrem $\lambda > 0$ ukažte, že $\hat{p}_0 = (1 - \frac{1}{n})^{nX_n}$ je nestranným a konzistentním odhadem $p_0 = \mathbb{P}[X_1 = 0]$.

Řešení:

V prvom rade je nutné si uvedomiť tzv. generickú vlastnosť Poissonovho rozdění. To znamená, že pre X_1 a X_2 nezávislé náhodné veličiny s Poissonovým rozděním s parametrom $\lambda > 0$ platí,

že $(X_1 + X_2)$ je náhodná veličina, ktorá má opäť Poissonové rozdelenie, tentokrát s parametrom 2λ (samostatne odvodiť pomocou vety o konvolúcii). Rekurzívne teda dostaneme, že

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim Poiss(n\lambda).$$

Túto vlastnosť využijeme pre dôkaz konzistencie, t.j. výpočet strednej hodnoty odhadu \hat{p}_0 .

$$\begin{aligned} E\hat{p}_0 &= E \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n\bar{X}_n} \right] = E \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \cdot P \left[\sum_{i=1}^n X_i = k \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \cdot e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!} \\ &= e^{-n\lambda} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)n\lambda \right]^k \cdot \frac{1}{k!} = e^{-n\lambda} \cdot e^{(1-1/n)\lambda n} = e^{-n\lambda} \cdot e^{n\lambda - \lambda} \\ &= e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} = P[X_1 = 0] = p_0. \end{aligned}$$

Tretia rovnosť plynie z definície strednej hodnoty diskkrétnej náhodnej veličiny, štvrtá rovnosť z faktu, že $\sum X_i \sim Poiss(n\lambda)$. Odhad \hat{p}_0 pro neznámy parameter $p_0 = P[X_1 = 0]$ je teda ne-stranným odhadom.

Pre vyšetrenie konzistencie postačí ukázať, že $\hat{p}_0 \xrightarrow{P} p_0$ v pravdepodobnosti pre $n \rightarrow \infty$, resp. platí

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n\bar{X}_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} p_0.$$

Ľavú stranu rovnosti môžeme upraviť následovne:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n\bar{X}_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i} = \left(1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n X_i}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i} = \left(1 - \frac{\bar{X}_n}{\sum_{i=1}^n X_i}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i},$$

kde sme využili rozšírenie zlomku (vynásobenie) hodnotou jedna vo vhodnom tvare. Následne si stačí uvedomiť že

$$\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \infty, \quad \text{zároveň} \quad \bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \lambda,$$

a tiež

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{m}\right)^m = e^{-a}.$$

Prvé dve konvergenzie sú pritom konvergenzie v pravdepodobnosti (t.j. celočíselná nahodná veličina $\sum X_i$ diverguje v pravdepodobnosti do nekonečna a analogicky náhodná veličina \bar{X}_n konverguje (slabě/silně)—použitím silného/slabého zákona veľkých čísel—ku svojej strednej hodnote) a posledná konvergenzia je deterministická (t.j. reálna postupnosť konverguje ku svojej limite). Použitím vety o zloženej limite (resp. vety o limite zloženej funkcie) dostávame, že

$$\left[\left(1 - \frac{\bar{X}_n}{\sum_{i=1}^n X_i}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i} \right] \xrightarrow[\sum X_i \rightarrow \infty]{P} e^{-\lambda}, \quad \text{pre } n \rightarrow \infty \text{ a } \sum X_i \rightarrow \infty \text{ v pravdepodobnosti.}$$

Odhad \hat{p}_0 je teda silně/slabě konzistentným odhadom neznámeho parametru $p_0 = P[X_1 = 0]$.