NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

Metoda maximální věrohodnosti a momentová metoda.

Podrobné riešenie príkladov zo 4. cvičenia

A Příklady na cvičení

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x|\theta_X) \in \mathcal{F} = \{f(x|\theta),\ \theta \in \Theta\}$.

A1. *[Procvičovací]* Momentovou metodou najděte odhad $\widetilde{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu $\mathcal{F}$, kde

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}} \mathbb{I}_{(1,\infty)}(x), \quad x > 1 \qquad \text{(Paretovo rozdělení)}.$$

Určete asymptotické rozdělení $\widetilde{\theta}_n$.
[Použijte vztahy $\mathsf{E}\, X_i = \frac{\theta_X}{\theta_X - 1}$, $\mathsf{var}\, X_i = \frac{\theta_X}{(\theta_X-1)^2(\theta_X-2)}$.]

Řešení:
Momentová metóda odhadovania je založena na existencii konkrétneho vzťahu (vzťahoch) ktorý(é) existuje(ú) medzi neznámym parametrom (resp. neznámymi parametrami) a niektorým teoretickým momentom (prípadne viacerými momentami). Stredná hodnota náhodnej veličiny je prvým momentom a spolu s druhým centrovaným momentom (t.j., rozptyl náhodnej veličiny) sa jedná o dva najčastejšie využívane momenty v momentovej metóde odhadovania (samozrejme nie jediné).

Využijeme nápovedu, že stredná hodnota a rozptyl náhodnej veličiny s Paretovým rozdelením s parametrom $\theta_X > 1$ (parametriácia hustoty ako v zadaní), sú určené vzťahmi

$$\mu_X = \mathsf{E}\, X_i = \frac{\theta_X}{\theta_X - 1} \qquad \text{a} \qquad \sigma_X^2 = \mathsf{var}\, X_i = \frac{\theta_X}{(\theta_X - 1)^2(\theta_X - 2)}.$$

Z prvého vzťahu jednoduchými úpravami vyjadríme neznámy parameter $\theta_X > 1$ ako

$$\theta_X = \frac{\mu_X}{\mu_X - 1}$$

a preto príslušný odhad $\widetilde{\theta}_n$ neznámeho parametru $\theta_X > 1$ získame nahradením teoretickej strednej hodnoty μ_X jej empirickým protejškem – výberovou strednou hodnotou, resp. priemerom $\overline{X}_n$. Momentový odhad neznámeho parametru $\theta_X > 1$ je

$$\widetilde{\theta}_n = \frac{\overline{X}_n}{\overline{X}_n - 1}.$$

Pre určenie asymptotického rozdelenia tohto odhadu použijeme centrálnu limitnú vetu (CLV) a vhodnú transformáciu. Vieme, že z CLV platí, že

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu_X) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma_X^2), \qquad \text{pre } n \to \infty.$$

Pripomeňme, že sa jedná o tzv. konvergenciu v distribúcii. Tento vzťah popisuje asymptotické rozdelenie výberového priemeru $\overline{X}_n$, t.j., odhadu neznámeho parametru strednej hodnoty μ_X. Nás ale zaujíma iný parameter, parameter θ_X, ktorý ale lze jedoducho vyjadriť pomocou μ_X.

Pripomeňme vťah $\theta_X = \mu_X/(\mu_X - 1)$. Príslušná transformácia, ktorá prevedie parameter μ_X na θ_X má tvar

$$h(x) = \frac{x}{x-1}, \text{pričom pre deriváciu zároveň platí } h'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Zároveň vieme, že pre transformovaný parameter (v zmysle obecnej transformácie h) môžeme vyjadriť asymptotické rozdelenie transformovaného parametru pomocou vzťahu

$$\sqrt{n}(h(\overline{X}_n) - h(\mu_X)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma_X^2 \cdot [h'(\mu_X)]^2), \qquad \text{opäť pre } n \to \infty.$$

Jednoduchým dostadením dostaneme, že $h(\mu_X) = \theta_X$ a tiež

$$|h'(\mu_X)| = \frac{1}{(\mu_X - 1)^2} = (\theta_X - 1)^2.$$

Z nápovedy v zadaní zároveň vieme, že

$$\sigma_X^2 = \mathsf{var}\, X_i = \frac{\theta_X}{(\theta_X - 1)^2(\theta_X - 2)}.$$

Dohromady dostaneme, že asymptotické rozdelenie momentového odhadu $\widetilde{\theta}_n$ je

$$\sqrt{n}(\widetilde{\theta}_n - \theta_X) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\Big(0, \underbrace{\frac{\theta_X(\theta_X - 1)^2}{\theta_X - 2}}_{\sigma^2_{MM}}\Big), \qquad \text{pre } n \to \infty.$$

A2. *[Procvičovací]* Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu z předchozího příkladu. Určete asymptotické rozdělení $\widehat{\theta}_n$ a porovnejte asymptotický rozptyl maximálně věrohodného odhadu $\widehat{\theta}_n$ a momentového odhadu $\widetilde{\theta}_n$.

<u>Řešení:</u>
Opäť nás zaujíma odhad toho istého parametru $\theta_X > 1$, ale príslušný odhad chcem skonštruovať metódou maximálnej vierohodnosti. Vierohodnostná funkcia pre paretovo rozdelenie a náhodný výber $X_1, \ldots, X_n$ z tohto rozdelenia, je daná predpisom

$$L(\theta_X, \boldsymbol{X}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta_X}{X_i^{\theta_X+1}} \cdot \mathbb{I}_{\{(1,\infty)\}}(X_i) = \theta_X^n \Big(\prod_{i=1}^{n} X_i\Big)^{-(\theta_X+1)},$$

pričom sa jedná o funkciu neznámeho parametru θ_X, vyčíslednú v náhodnom výbere $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Príslušnú logaritmickú vierohodnosť získame logaritmovaním:

$$l(\theta_X, \boldsymbol{X}) = \log\Big(L(\theta_X, \boldsymbol{X})\Big) = n \log \theta_X - (\theta_X + 1) \sum_{i=1}^{n} \log X_i.$$

Skórovú funkciu získame derivovaním logaritmickej vierohodnosti podľa argumentu θ_X:

$$U(\theta_X, \boldsymbol{X}) = \frac{\partial}{\partial \theta_X} l(\theta_X, \boldsymbol{X}) = \frac{n}{\theta_X} - \sum_{i=1}^{n} \log X_i.$$

Odhad metódou maximálnej vierohodnosti získame tak, že skórovú rovnicu položíme rovnú hodnote nula a hľadáme riešenie vzhľadom k $\theta > 1$. To znamená, že riešime rovnicu

$$\frac{n}{\theta_X} - \sum_{i=1}^{n} \log X_i = 0,$$

ktorej explicitné riešenie (a zároveň maximálne vierohodný odhad) je v tvare

$$\widehat{\theta}_n = \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log X_i\Big)^{-1}.$$

K overeniu, že sa naozaj jedná o maximum (a nie napr. lokálne minimum), je potrebné overiť, že v danom bode je funkcia konkávná. Zároveň potrebujeme spočítať asymptotické rozdelenie odhadu $\widehat{\theta}_n$, ktoré je dané predpisom

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta_X) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \boldsymbol{I}^{-1}(\theta_X)), \qquad \text{pre } n \to \infty,$$

kde $\boldsymbol{I}^{-1}(\theta_X)$ je Fisherova informácia o parametru θ_X obsažená v náhodnej veličine X_i. Fisherová informácia o parametru θ_X obsažená v celom náhodnom výbere $X_1, \ldots, X_n$ je definovaná výrazom

$$\boldsymbol{I}_n^{-1}(\theta_X) = -E\Big[\frac{\partial^2}{\partial\theta_X^2} l(\theta_X, \boldsymbol{X})\Big] = -E\Big[\frac{\partial}{\partial\theta_X} U(\theta_X, \boldsymbol{X})\Big] = -E\Big[\frac{-n}{\theta_X^2}\Big] = \frac{n}{\theta_X^2},$$

pričom zároveň vidíme, že druhá derivácia logaritmickej vierohodnosti je záporná a teda naozaj sa jedná o maximum. Zároveň platí (pretože náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ sú nezávislé), že

$$\boldsymbol{I}_n(\theta_X) = n \cdot \boldsymbol{I}(\theta_X).$$

Dosadením dostaneme, že asymtotické rozdelenie maximálne vierohodného odhadu $\widehat{\theta}_n$, neznámeho parametru $\theta_X > 1$ je

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta_X) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \underbrace{\theta_X^2}_{\sigma_{ML^2}}), \qquad \text{opäť pre } n \to \infty.$$

Nakoniec chceme porovnať asymptotické rozptyly oboch odhadov. Jednoduchou úpravou dostaneme, že

$$\sigma_{MM}^2 = \frac{\theta_X(\theta_X - 1)^2}{\theta_X - 2} = \theta_X^2 \cdot \frac{\theta_X^2 - 2\theta_X + 1}{\theta_X^2 - 2\theta_X} > \theta_X = \sigma_{ML}^2.$$

A3. *[Procvičovací]* Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ v modelu $\mathcal{F}$, kde

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{1-\theta}\, x^{(2\theta-1)/(1-\theta)} \mathbb{I}_{(0,1)}(x), \quad \theta \in (0,1).$$

Určete asymptotické rozdělení $\widehat{\theta}_n$.

<u>Řešení:</u>
Vierohodnostná funkcia je daná predpisom

$$L(\theta, \boldsymbol{X}) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i|\theta) = \Big(\frac{\theta}{1-\theta}\Big)^n \cdot \Big(\prod_{i=1}^{n} X_i\Big)^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}}.$$

Opäť sa jedná o funkciu argumentu $\theta \in (0,1)$, vyhodnotenú v náhodnom výbere $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$.Prslušná logaritmická vierohodnosť má tvar

$$l(\theta, \boldsymbol{X}) = \log(L(\theta, \boldsymbol{X})) = n[\log\theta - \log(1-\theta)] + \frac{2\theta - 1}{1-\theta}\sum_{i=1}^{n}\log X_i.$$

Skórovú funckciu získame derivovaním logaritmickej vierohodnosti podľa argumentu θ v tvare

$$U(\theta, \boldsymbol{X}) = \frac{\partial}{\partial \theta} l(\theta, \boldsymbol{X}) = \frac{n}{\theta} + \frac{n}{1-\theta} + \frac{1}{(1-\theta)^2} \sum_{i=1}^{n} \log X_i := 0.$$

Riešním skórovej rovnice (ktorú sme položili rovnú hodnote jedna) je maximálne vierohodný odhad:

$$\begin{aligned} \frac{n}{\theta(1-\theta)} + \frac{1}{(1-\theta)^2} \sum_{i=1}^{n} \log X_i = 0 \\ (1-\theta) + \theta_X \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log X_i = 0 \\ \theta(1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log X_i) = 1 \\ \widehat{\theta}_n = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log X_i}. \end{aligned}$$

Opäť je nutné overiť, že sa jedná o maximálne vierohodný odhad (maximum) – resp. že vierohodnostná funkcia je konkávna. Urobime to vrámci výpočtu Fisherovej informácie nutnej k asymptitickému rozdelniu.

Pre Fisherovu informáciu $\boldsymbol{I}_n(\theta)$ o parametre θ obsaženou v náhodnom výbere $X_1 \dots, X_n$ platí, že

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}_n(\theta) &= -E\Big[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l(\theta, \boldsymbol{X})\Big] = -E\Big[\frac{\partial}{\partial \theta} U(\theta, \boldsymbol{X})\Big] = -E\Big[\frac{-n}{\theta^2} + \frac{n}{(1-\theta)^2} + \frac{2}{(1-\theta)^2 \sum_{i=1}^{n} \log X_i}.\Big] \\ &= \frac{n}{\theta^2} - \frac{n}{(1-\theta)^2} - \frac{2}{(1-\theta)^2} \sum_{i=1}^{n} E[\log X_i]. \end{aligned} \tag{1}$$

Zostáva spočítať strednú hodnotu $E[\log X_i]$, k čomu využijeme vhodnú transformáciu. Definujme náhodnú veličinu Z_i pomocou transformácie t, ako $Z_i = t(X_i) = -\log X_i$, pre $i = 1, \dots, n$. Inverzná transformácia t^{-1} je definovaná ako $X_i = t^{-1}(Z_i) = e^{-Z_i}$.

Keďže pre hustotu transformovanej náhodnej veličiny platí, že

$$f_Z(z) = f_X(t^{-1}(z)) \cdot |(t^{-1})'(z)|,$$

kde f_Z a f_X sú hustoty náhodných veličín Z a X, tak po dostadení získame hustotu náhodnej veličiny $Z_i = -\log X_i$ v tvare

$$f_Z(z) = \frac{\theta}{1-\theta} e^{-z\frac{2\theta-1}{1-\theta}} = \frac{\theta}{1-\theta} e^{-z\frac{\theta}{1-\theta}}, \qquad \text{pre } \theta \in (0,1),$$

čo je vlastne hustota náhodnej veličiny s exponenciálnym rozdelením s parametrom $\lambda = \frac{\theta}{1-\theta} > 0$ (to znamená, že $EZ_i = \frac{1-\theta}{\theta}$). Po dosadení do Fisherovej informácie $\boldsymbol{I}_n(\theta)$ v (3) dostaneme

$$\boldsymbol{I}_n(\theta) = \frac{1}{\theta^2(1-\theta)^2}.$$

Asymptotické rozdelenie maximálne vierohodného odhadu je preto

$$\sqrt{x}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \underbrace{\theta^2(1-\theta)^2}_{\sigma^2_{ML}}), \qquad \text{pre } n \to \infty.$$

A4. *[Procvičovací]* Momentovou metodou najděte odhad $\widetilde{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu z předchozího příkladu. Určete asymptotické rozdělení $\widetilde{\theta}_n$ a porovnejte asymptotický rozptyl maximálně věrohodného odhadu $\widehat{\theta}_n$ a momentového odhadu $\widetilde{\theta}_n$.

Řešení:
Je dobré si uvedomiť, že v predchádzajúcom príklade sa jedná o hustotu Beta rozdelenia, ktoré má parametre $\alpha = \frac{\theta}{1-\theta}$ a $\beta = 1$. Obecne totíž pre beta rozdelenie s parametrami $\alpha, \beta > 1$ platí, že hustota má tvar

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \qquad \text{pre } x \in (0,1)$$

a stredná hodnota a rozptyl sú určené vzťahmi

$$EX_i = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad \text{a} \qquad \mathsf{var}\, X_i = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

Po dosadení dostaneme

$$EX_i = \frac{\frac{\theta}{1-\theta}}{\frac{\theta}{1-\theta}+1} = \theta$$

a tiež

$$\mathsf{var}\, X_i = \frac{\frac{\theta}{1-\theta}}{\left(\frac{1}{1-\theta}\right)^2\left(\frac{1}{1-\theta}+1\right)} = \frac{\theta(1-\theta)^2}{2-\theta}.$$

Na základe vzťahu pre strednú hodnotu je zrejmé, že momentový odhad pre parameter $\theta \in (0,1)$ je samotný výberový priemer $\overline{X}_n$ (t.j., $\widetilde{\theta}_n = \overline{X}_n$). Na základe centrálnej limitnej vety získame hneď asymptotické rozdelenie, ktoré je dané vzťahom

$$\sqrt{n}(\widetilde{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\Big(0, \underbrace{\frac{\theta(1-\theta)^2}{2-\theta}}_{\sigma^2_{MM}}\Big).$$

Na záver chceme porovnať asymptotický rozptyl maximálne vierohodného odhadu $\widehat{\theta}_n$ s asymptotickým rozptylom momentového odhadu $\widetilde{\theta}_n$.

$$\sigma^2_{MM} = \frac{\theta(1-\theta)^2}{2-\theta} = \theta^2(1-\theta)^2 \cdot \frac{1}{\theta(2-\theta)} > \theta^2(1-\theta)^2 = \sigma^2_{ML},$$

pretože funkcia $g(\theta) = \theta(2-\theta)$ je rastúca na intervale $(0,1)$ (derivácia $g'(\theta) = 2-2\theta = 2(1-\theta)$ je kladná pre všetky $\theta \in (0,1)$) a zároveň platí, že $g(0) = 0$ a $g(1) = 1$. Preto platí, že $\frac{1}{g(\theta)} > 1$ pre všetky $\theta \in (0,1)$.

Pre malé hodnoty $\theta \in (0,1)$ je momentový odhad dokonca hodne špatny (príliš veľká variabilita), pretože $\frac{1}{g(\theta)} \to \infty$ pre $\theta \to_+ 0$.

B Doplňující příklady (nahrazování, procvičování)

Z nasledujúcich doplňujúcich príkladov je potrebné samostatne spočítať samostatne aspoň tri príklady podľa vlastného výberu. Riešenie vybraných príkladov **zaslať najneskôr v nedeľu, 01.11.2020, na email** `maciak[AT]karlin.mff.cuni.cz`.

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x|\theta_X) \in \mathcal{F} = \{f(x|\theta),\ \theta \in \Theta\}$.

B1. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x;\theta) = \theta(\theta+1)x^{\theta-1}(1-x)1_{(0,1)}(x), \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\widehat{\theta}_n$.

B2. Momentovou metodou najděte odhad $\widetilde{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu $\mathcal{F}$, kde

$$f(x;\theta) = \theta(\theta+1)x^{\theta-1}(1-x)1_{(0,1)}(x), \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\widetilde{\theta}_n$.

B3. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x;\theta) = \frac{2x}{\theta^2}\exp\Big\{-\Big(\frac{x}{\theta}\Big)^2\Big\}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\widehat{\theta}_n$.

B4. Momentovou metodou najděte odhad $\widetilde{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu $\mathcal{F}$, kde

$$f(x;\theta) = \frac{2x}{\theta^2}\exp\Big\{-\Big(\frac{x}{\theta}\Big)^2\Big\}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\widetilde{\theta}_n$.

B5. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta}\exp\Big\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\theta^2}\Big\}, \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\widehat{\theta}_n$.

B6. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x|\theta) = \frac{x}{\theta^2}\exp\Big\{-\frac{x^2}{2\theta^2}\Big\}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0 \qquad \text{(Rayleighovo rozdělení)}.$$

Určete asymptotické rozdělení $\widehat{\theta}_n$.

[Použijte vztah $\mathsf{E}\,X_i^2 = 2\theta_X^2$.]

B7. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x|\theta) = \sqrt{\frac{\theta}{2\pi x^3}}\exp\Big\{-\frac{\theta(x-1)^2}{2x}\Big\}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\widehat{\theta}_n$.

B8. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x|\theta) = \sqrt{\frac{1}{\pi x^3}}\exp\Big\{-\frac{(x-\theta)^2}{\theta^2 x}\Big\}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\widehat{\theta}_n$.

B9. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad $\widehat{\theta}_n$ parametru θ_X v modelu

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{x^2}\exp\Big\{-\frac{\theta}{x}\Big\}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

Určete asymptotické rozdělení $\widehat{\theta}_n$.