

NMFM 310 | Základy matematického modelování

MFF UK | Letný semester 2020/2021 | Online výuka



Matúš Maciak | @K151

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~maciak>

Prednáška: Po: 17:20–18:50 @K2

Cvičenie: Ut: 12:20-13:50 @K8

Harmonogram výuky

- ❑ 13× prednáška | 6 tématických okruhov;
- ❑ **Korekvizita:** NMFM301 - Statistika pro finanční matematiky;
(NMFM301 musí být alespoň zapsán současně s předmětem NMFM310)

- ❑ **Deterministické modely**
 - ❑ Vyrovnávání dat, klouzavé průměry;
 - ❑ Diferenciální rovnice a modely růstu;
 - ❑ Lineární regulace a lineární soustavy;

- ❑ **Stochastické modely**
 - ❑ Markovovy řetězce s diskrétním časem a stavovým prostorem;
 - ❑ Časové řady, ARMA procesy;
 - ❑ Poissonův proces a příbuzné modely;

- ❑ **Ďalšie podrobnosti:** <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~maciak>

Doporučená literatúra

- ❑ Mandl, P.: **Pravděpodobnostní dynamické modely.**
Academia Praha, 1985.
- ❑ Prášková, Z., Lachout, P.: **Základy náhodných procesů I.**
Matfyzpress, Praha, 2012.
- ❑ Prášková, Z.: **Základy náhodných procesů II.**
Karolinum, Praha, 2004.

Doporučená literatúra

- ❑ Mandl, P.: **Pravděpodobnostní dynamické modely.**
Academia Praha, 1985.
 - ❑ Prášková, Z., Lachout, P.: **Základy náhodných procesů I.**
Matfyzpress, Praha, 2012.
 - ❑ Prášková, Z.: **Základy náhodných procesů II.**
Karolinum, Praha, 2004.
- + bibliografické odkazy a referencie uvedené v priebehu prednášky;
- (PDF súbor so slidami z prednášky není postačujúcim materiálom pre úspešné zloženie zkúšky. Súčasťou zkúšky sú aj teoretické odvodenia a dôkazy, ktoré nie sú explicitne uvedené v slidoch, ale budu odvodené na prednáške.)*

Kapitola 1

Vyrovnávání dat

Čo sú to data? Čo je to model? Big data?



Čo sú to data? Čo je to model? Big data?



- ❑ (Anglické) slovo "data" prvýkrát použité v roce 1640;
- ❑ V zmysle "transmittable and storable computer information" v roce 1946;
- ❑ Data – konkrétne hodnoty kvalitatívnych a kvantitatívnych premenných;
- ❑ Merané, zbierané, analyzované, reportované a interpretované hodnoty;
- ❑ Big data - objemné, rôznorodé a štruktúrované informácie (online);

Data v matematice a statistice

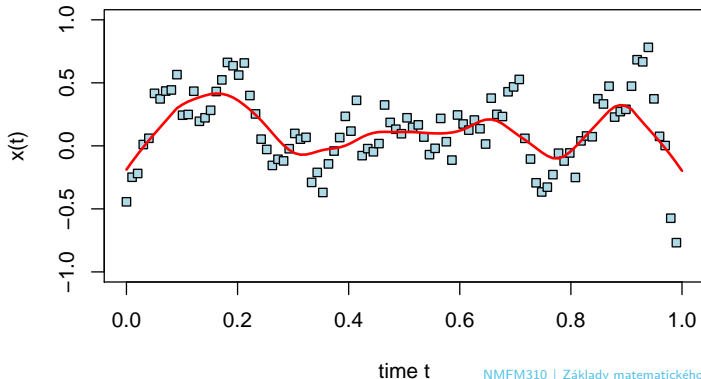
- ❑ Data (informace) můžeme kategorizovat podle různých kritérií, ale z hlediska matematiky/štatistiky je podstatné rozlišovat **deterministický** a **stochastický** charakter dat;
- ❑ V štatistike sa často využíva pojem **náhodný výběr**; (nezávisle, stejně rozdělené náhodné veličiny – *i.i.d.* z anglického "*Independent and Identically Distributed* random variables")
- ❑ V praxi často **časovo závislá štruktúra pozorovaní** – časové řady; (vývoj hodnot v čase – resp. v diskrétnych časových okamžikoch)
 - ❑ napr. hodnota kurzu $x(t)$ pro $t \in \{t_1, \dots, t_n\}$;
 - ❑ alebo vzájomne porovnanie, napr. $x(t)$ vs. $y(t)$;
 - ❑ alebo data $(x_1, y_1)^T, \dots, (x_n, y_n)^T$, pro uspořádané indexy;
- ❑ **Závislé** a často **nestejně rozdělené náhodné veličiny** – n.i.n.i.d; (jak takéto data analyzovat a jaké (vhodné) metody/modely používat?)

Vyrovnávání dat

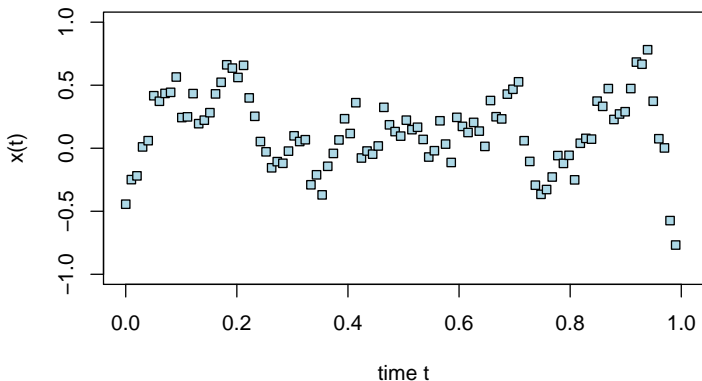
Vyrovnávání dat – proložení dat nějakou hladkou křivkou, která v určitém zmysle vystihuje nějakou základní vlastnost dat, ale nebere v potaz drobné chyby, nepřesnosti, fluktuace (charakterizace dat).

Vyrovnávání dat

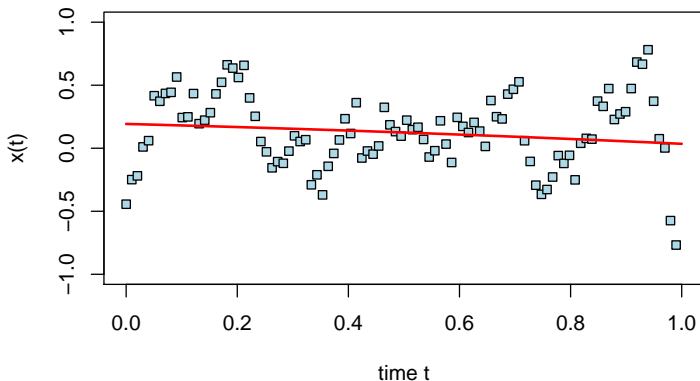
Vyrovnávání dat – proložení dat nějakou hladkou křivkou, která v určitém zmysle vystihuje nějakou základní vlastnost dat, ale nebere v potaz drobné chyby, nepřesnosti, fluktuace (charakterizace dat).



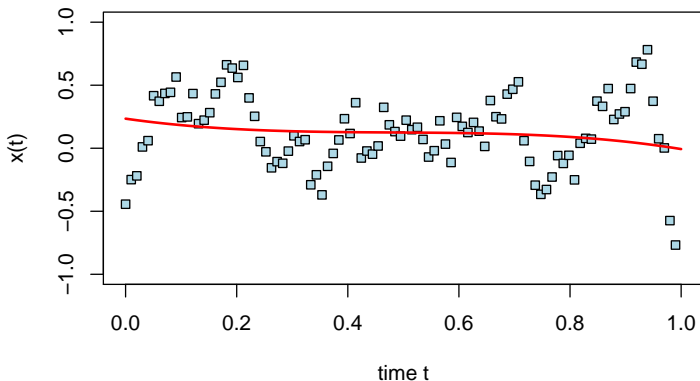
Jak volit "hladku křivku"? A musí být vždy hladká?



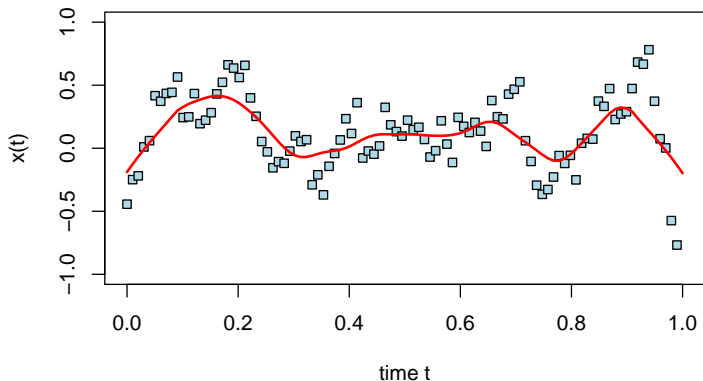
Jak volit "hladku křivku"? A musí být vždy hladká?



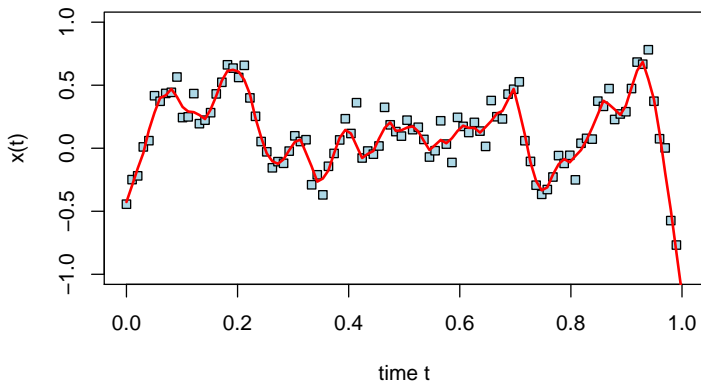
Jak volit "hladku křivku"? A musí být vždy hladká?



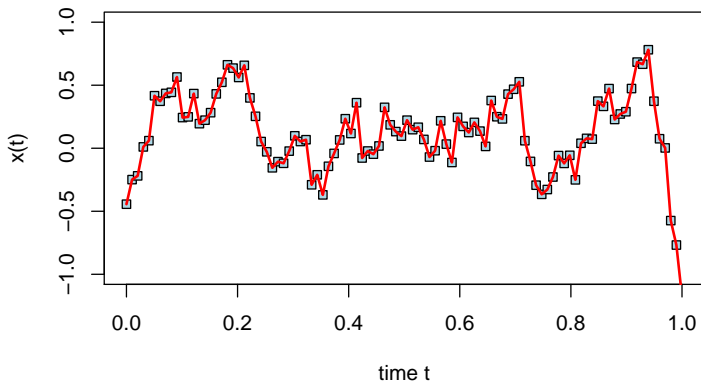
Jak volit "hladku křivku"? A musí být vždy hladká?



Jak volit "hladku křivku"? A musí být vždy hladká?



Jak volit "hladku křivku"? A musí být vždy hladká?



Od parametrických až po neparametrické postupy

V zásadě rozlišujeme **tri základné prístupy** pri modelovaní dat, resp. pri prekladaní dat (ne nutne hladkou) křivkou. Základný rozdíel je v celkové míře **flexibility a komplexity** výsledného modelu.

❑ Parametrický postup

❑ jednoduchost

(jednoduchý model, výpočet, aj interpretácia, priamočiare vlastnosti)

❑ málo flexibilný

(príliš triviálny model, ktorý často nedostatečne vystihuje podstatu dat)

❑ Neparametrický postup

❑ výborná flexibilita

(bez nutných predpokladov na konkrétny parametrický tvar křivky)

❑ príliš zložitý

(pomerne náročný na výpočet, vlastnosti a takmer nemožná interpretácia)

❑ Semiparametrický postup

❑ dostatečne flexibilný, akceptovateľná zložitost

(bez predpokladov na konkrétny tvar, ale pomocou (skrytých) parametrov)

❑ málo intuitívny

(kombinácia dobrých, ale aj zlých vlastnosti predchádzajúcich postupov)

Kde, kedy a ako to začalo?



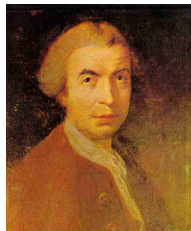
o Roger Cotes (1682 – 1716)



o Tobias Mayer (1723 – 1762)



o Pierre-Simon Laplace (1749–1827)



o Roger Joseph Boscovich (1711 – 1787)

Kde, kedy a ako to začalo?



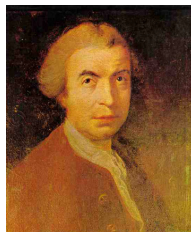
o Roger Cotes (1682 – 1716)



o Tobias Mayer (1723 – 1762)



o Pierre-Simon Laplace (1749–1827)



o Roger Joseph Boscovich (1711 – 1787)

- ❑ **1722** – kombinácia viacerých rôznych pozorovaní uskutočnených za stejných podmínek, namiesto presnej replikácie experimentu (**method of averages**);
- ❑ **1750** – štúdium pohybu Mesiaca kolem země v roce 1750 (Tobias Mayer) a sledovanie vzájomného pohybu Jupitera a Saturnu (Laplace);
- ❑ **1757** – kombinácia viacerých rôznych pozorovaní uskutočnených za rôznych (kontrolovaných) podmienok pri štúdiu tvaru Zeme Boscovichom (**least absolute deviations**);
- ❑ **1799** – chyba aproximácie meraná ako absolútna vzdialenosť vs. kvadrát vzdialenosti vs. metóda vedúca k jej minimalizácii (Laplace vs. Gauss);

Kalibrácia metódou najmenších štvorcov



Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833)



Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

- ❑ **Legendre** využil metódu najmenších štvorcov na **fitovanie lineárnych rovníc** na rovnaké data, ktoré využil Laplace na meranie veľkosti a tvaru Zeme. Metóda je popísaná ako algebraická procedúra.
- ❑ **Gauss** tvrdil, že metóda je mu známa už od roku 1795. Prepojil metódu najmenších štvorcov least s **princípami teórie pravdepodobnosti** a definoval metódu odhadovania, ktorá minimalizuje chybu – normálne rozdelenie.

Metóda najmenších čtverců

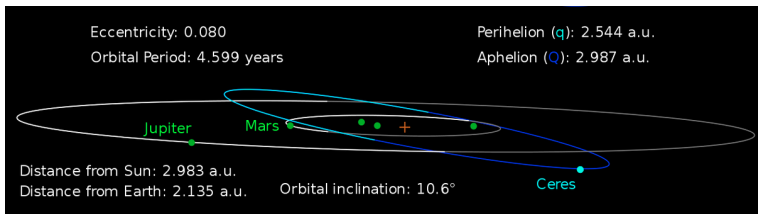


Charles Friedrich Gauss (1777 – 1855)

- ❑ metóda sa postupne vyvinula v súvislosti s **astronómiou** a **geodéziou** pri riešení problémov s **navigáciou lodí**;
- ❑ **P.S.Laplace** a **T. Mayer** využili tzv. **metodu priemerov** pre vysvetlenie pohybov nebeských telies již v roce **1750**;
- ❑ prvýkrát publikovaná (**Legendre, 1805**) ako algebraický nástroj na **fitovanie lineárnych rovníc** na data;
- ❑ **C.F. Gauss** v **1809** publikuje prácu o metode najmenších štvorcov a dáva ju súvislosti s **teóriou pravdepodobnosti** a **normálnym rozdelením**;

Dôkaz fungovania metódy: Znovuobjavenie Ceres

- ❑ Taliansky astronóm Giuseppe Piazzi objavil asteroid Ceres 1. Januára 1801 a sledoval ho 40 dní až kým sa asteroid nestratil za žiarou Slnka – posledné pozorovanie (z celkových 24) urobil 11. Februára, 1801.
- ❑ Na základe týchto data sa astronómia rozhodli určiť polohu Ceresu po následnom výstupe zpoza Slnka, ale bez nutnosti riešiť zložité Keplerové nelineárne rovnice planetárnych pohybov.
- ❑ Na základe článku a dat publikovaných v časopise *Monatliche Correspondenz* v Septembri 1801, J.C.F.Gauss (v tom čase 24 ročný) bol jediný, kto úspešne predikoval polohu pri znovuobjavení Ceresu.
- ❑ Maďarský astronóm Heinrich W. M. Olbers následne našiel Ceres na odhadnutej polohe 31. Decembra, 1801.



Parametrické vyrovnávanie dat

Křivka jednoznačne určená niekoľkými parametrami

- ❑ předem zvolíme tvar hladké křivky napr. parabola $x \rightarrow a + bx + cx^2$;
- ❑ neznáma křivka definovaná pomocou neznámých parametrov $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- ❑ parametre majú konkrétnu a často priamočiaru interpretáciu;
- ❑ odhady parametrov minimalizáciu súčtu štvorcov odchylek;
- ❑ volba počtu parametrov \implies konkrétny tvar a flexibilita křivky;
- ❑ rozhodnutí medzi celkovým počtom parametrov a velikosti součtu čtverců;

Parametrické vyrovnávanie dat

Křivka jednoznačne určená niekoľkými parametrami

- ❑ predem zvolíme tvar hladkej křivky napr. parabola $x \rightarrow a + bx + cx^2$;
- ❑ neznáma křivka definovaná pomocou neznámych parametrov $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- ❑ parametre majú konkrétnu a často priamočiaru interpretáciu;
- ❑ odhady parametrov minimalizáciu súčtu štvorcov odchylek;
- ❑ voľba počtu parametrov \implies konkrétny tvar a flexibilita křivky;
- ❑ rozhodnutí medzi celkovým počtom parametrov a veľkosti súčtu čtvrců;

There is no free lunch!

- ❑ pro dostatečně velký počet parametrov \implies interpolace dat;
- ❑ interpolace \implies nulový součet čtvrců \implies žádné vyhlazení dat;
- ❑ tzv. Bias-variance Trade-off (vychýlenie vs. variabilita);
(rozhodnutie vzhľadom k celkovej flexibilita a komplexite finálneho modelu)

Metóda nejmenších čtverců – algebraicky

- obecně předpokládáme tvar nějaké hladké křivky

$$x \longrightarrow a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_p f_p(x),$$

pro nějaké **neznáme parametry** $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$;

- označme **odhadnuté hodnoty parametrů** jako $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p \in \mathbb{R}$;
- pak vyrovnanú hodnotu v datech $\{(x_i, y_i); i = 1, \dots, n\}$ lze zapsat jako

$$\hat{y}_i = \hat{a}_1 f_1(x_i) + \hat{a}_2 f_2(x_i) + \cdots + \hat{a}_p f_p(x_i),$$

kde \hat{y}_i značí **vyrovnanú hodnotu** příslušnú hodnotě y_i ;

- pro skrácený zápis pomocou vektorov používame značení

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top, \quad \hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)^\top;$$

Metóda nejmenších čtverců – maticově

- explicitně po zložkách dostaneme **vyrovnané hodnoty** jako

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_p(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_p(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \dots & f_p(x_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{pmatrix}$$

- stručný/alternativný zápis v maticovém tvare jako

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbf{a}},$$

kde $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p)^\top$ je vektor odhadnutých parametrů;

- odhady neznámých parametrů $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ jsou definované tak, že **minimalizují nejmenší čtverce** (součet čtverců odchýlek)

$$\begin{aligned} S(\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^p \hat{a}_j f_j(x_i) \right)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|_2^2 \\ &= (\mathbf{y} - \mathbb{F}\hat{\mathbf{a}})^\top (\mathbf{y} - \mathbb{F}\hat{\mathbf{a}}) = SSe; \end{aligned}$$

Metóda najmenších čtverců – formálně

- formálně zapsané, odhady parametrov a_1, \dots, a_p jsou definované jako riešenie minimalizačného problému

$$\begin{aligned}
 (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p)^\top &= \underset{a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}}{\operatorname{Argmin}} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^p a_j f_j(x_i) \right)^2 \\
 &= \underset{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{Argmin}} \|\mathbf{y} - \mathbb{F}\mathbf{a}\|_2^2;
 \end{aligned} \tag{1}$$

- Ide o **konvexný problém** (minimalizácia konvexnej funkcie, cez konvexnú množinu) a teda **existuje globálne minimum**, ktoré je riešením **normálných rovníc**. Ak má \mathbb{F} **plnú hodnot'**, tak existuje **jednoznačné riešenie**;

Samostatný úkol

- Ukážte, že problém (1) je naozaj konvexný problém. Za akých podmienok má matica $\mathbb{F} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ plnú hodnot'?
- Dokážte, že dosažené riešenie je skutočne globálnim minimem.
- Jaké je riešenie úlohy (1), ak by \mathbb{F} neměla plnou hodnot'?

Metóda nejmenších čtverců – příklad

Příklad

Uvažujte data $(y_1, x_1)^T, \dots, (y_n, x_n)^T$, které chceme preložit jednoduchou přímkou, t.j. $x \rightarrow a + bx$, pro $a, b \in \mathbb{R}$ neznáme parametre. Nайдěte explicitné řešení pro rovnici vyhlazovací přímky.

Metóda nejmenších čtverců – příklad

Příklad

Uvažujte data $(y_1, x_1)^T, \dots, (y_n, x_n)^T$, které chceme preložit jednoduchou přímkou, t.j. $x \rightarrow a + bx$, pro $a, b \in \mathbb{R}$ neznáme parametre. Nайдěte explicitné řešení pro rovnici vyhlazovací přímky.

Pravděpodobnostní interpretace:

- ❑ náhodný vektor $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ a jeho realizace $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$;
- ❑ predpokládame, že platí model $\mathbf{Y} = \mathbb{F}\mathbf{a} + \boldsymbol{\varepsilon}$;
- ❑ vektor náhodných chýb $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T \sim (\mathbf{0}, \sigma^2\mathbb{I})$;
- ❑ z vlastnosti střední hodnoty a rozptylu lze přepsát jako

$$E\mathbf{Y} = \mathbb{F}\mathbf{a} \quad \text{Var}\mathbf{Y} = \sigma^2\mathbb{I},$$

pro jednotkovou matici $\mathbb{I} = \text{Diag}\{1, \dots, 1\}$, typu $n \times n$;

Regresní model – teoretické vlastnosti odhadu

Věta: Střední hodnota a rozptyl odhadu parametru v lineární regrese

Mějme lineární regresní model $\mathbf{Y} = \mathbb{F}\mathbf{a} + \boldsymbol{\varepsilon}$, pro vektor náhodných chýb se složkami s nulovou střední hodnotou $E\boldsymbol{\varepsilon} = (E\varepsilon_1, \dots, E\varepsilon_n)^\top = (0, \dots, 0)^\top$ a rozptylovou matici $\sigma^2\mathbb{I}$.

Pak platí, že

- ❑ odhad parametru $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$ metodou nejmenších čtverců je **nestranný** a jeho **rozptyl** je $\sigma^2(\mathbb{F}^\top\mathbb{F})^{-1}$;
- ❑ jsou-li navíc $(y_i, \varepsilon_i)^\top$, pro $i = 1, \dots, n$ nezávislé a stejně rozdělené (*i.i.d.*), pak je **$\hat{\mathbf{a}}$ konzistentní odhad vektoru \mathbf{a}** ;
- ❑ platí-li navíc $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ pak odhady parametrů a_1, \dots, a_p mají také normální rozdělení a platí, že **$\hat{\mathbf{a}} \sim N_p(\mathbf{a}, \sigma^2(\mathbb{F}^\top\mathbb{F})^{-1})$** ;

Gauss-Markovův věta říká, že odhad $\hat{\mathbf{a}}$ je **nejlepší, nestranný, lineární odhad vektoru parametrů $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$** (tzv. BLUE – Best Linear Unbiased Estimate)

Parametricky \Rightarrow Semiparametrický postup

Parametre, ktoré sa nachádzajú v modeli nemajú priamy vzťah na tvar neznámej křivky a taktiež **nemajú intuitívnu interpretáciu**, jako tomu bylo v případě parametrických modelov.

- ❑ **SPLINY - po částech (lokálně) parametrické vyhlazování;**
(neznáma křivka je pořád definovaná pomocí parametrů, ale parametre nedefinují přímo tvar dané křivky)
- ❑ **Vhlazování je proto mnohem flexibilnější a adaptivnější;**
(kromě samotných neznámých parametrů jsou ale potřebné dodatečné parametry – tzv. uzly a tiež množina tzv. základních funkcii, tzv. splinová báze)
- ❑ **uzly definují podintervaly definičního oboru křivky;**
(důležitá je pak otázka, jak uzly správně volit; v podintervalech jsou části křivky definované různě, ale celková křivka ma hezké, předem dané vlastnosti)

Lokální vyhlazování pomocí Splinů

Definice: Spline

Nechť $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k$ je posloupnost vnitřních uzlů (bodů) z definičního oboru $\mathcal{D} = [\xi_0, \xi_{k+1}]$. Pak splinem řádu $\ell \in \mathbb{N}$ nazveme libovolnou funkci f takovou, která je v každém intervalu $[\xi_j, \xi_{j+1}]$, pro $j = 0, \dots, k$ polynomem stupně ℓ a která má v celém definičním oboru $\mathcal{D} = \cup_{j=0}^k [\xi_j, \xi_{j+1}]$ spojitě derivace (jednostranné derivace v krajních bodech) až do řádu $(\ell - 1)$ (včetně).

Lokální vyhlazování pomocí Splinů

Definice: Spline

Nechť $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k$ je posloupnost vnitřních uzlů (bodů) z definičního oboru $\mathcal{D} = [\xi_0, \xi_{k+1}]$. Pak splinem řádu $\ell \in \mathbb{N}$ nazveme libovolnou funkci f takovou, která je v každém intervalu $[\xi_j, \xi_{j+1}]$, pro $j = 0, \dots, k$ polynomem stupně ℓ a která má v celém definičním oboru $\mathcal{D} = \cup_{j=0}^k [\xi_j, \xi_{j+1}]$ spojitě derivace (jednostranné derivace v krajních bodech) až do řádu $(\ell - 1)$ (včetně).

Příklad

Uvažujte interval $(0, 1)$ jako definičný obor \mathcal{D} . Definujte posloupnost uzlů $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$ a navrhnete spline třetího řádu ($\ell = 3$) na \mathcal{D} tak, aby splňoval definici.

Různe splinové bázy

Existuje celá řada různých způsobů, jak definovat splinovou bazu a sestavit spline. Některé metody jsou intuitivní a jednoduché, ale výpočetně náročné pro velké $n \in \mathbb{N}$. Jiné jsou poměrně složité a hodně špatně interpretovatelné, ale zase výpočetně stabilnější.

❑ Truncated Splines

- ❑ jednoduché, intuitivně, jednoduché na odvození;
- ❑ výpočetně nestabilné hlavně pro velké $n \in \mathbb{N}$;

❑ B-Splines

- ❑ výpočetně stabilné a jednoduché pro invertování \mathbb{F} ;
- ❑ pro obecný stupeň $\ell \in \mathbb{N}$ nelze jednoduše vyjádřit (napr. De Boor - rekurze);

❑ Ortogonálně spliny

- ❑ výpočetně velmi jednoduché, okamžitá invertibilita, numerická stabilita;
- ❑ netriviálně na vytvoření, náročné na interpretáciu;

Různé splinové bázy

Existuje celá řada různých způsobů, jak definovat splinovou bazu a sestavit spline. Některé metody jsou intuitivní a jednoduché, ale výpočetně náročné pro velké $n \in \mathbb{N}$. Jiné jsou poměrně složité a hodně špatně interpretovatelné, ale zase výpočetně stabilnější.

❑ Truncated Splines

- ❑ jednoduché, intuitivně, jednoduché na odvození;
- ❑ výpočetně nestabilné hlavně pro velké $n \in \mathbb{N}$;

❑ B-Splines

- ❑ výpočetně stabilné a jednoduché pro invertování \mathbb{F} ;
- ❑ pro obecný stupeň $\ell \in \mathbb{N}$ nelze jednoduše vyjádřit (napr. De Boor - rekurze);

❑ Ortogonální spliny

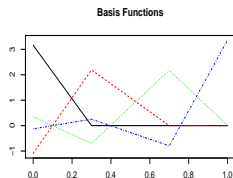
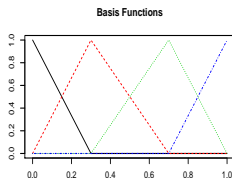
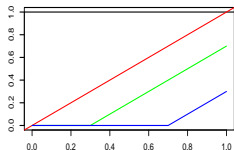
- ❑ výpočetně velmi jednoduché, okamžitá invertibilita, numerická stabilita;
- ❑ netriviálně na vytvoření, náročné na interpretáciu;

❑ Mnoho jiných ...

- ❑ Box spliny, M-Spliny, T-Spliny;
- ❑

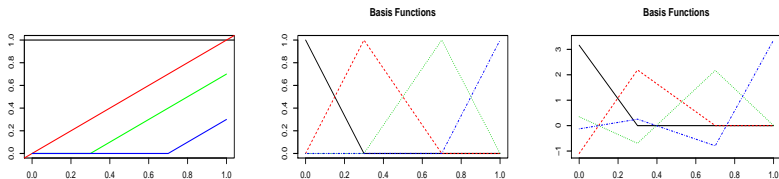
Porovnání: T-spliny, B-spliny, O-spliny

- Uzly: $\xi_1 = 0.3, \xi_2 = 0.7$; Stupeň $\ell = 1$ (lineární spliny (báze));

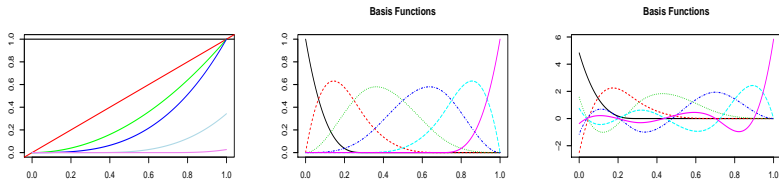


Porovnání: T-spliny, B-spliny, O-spliny

- Uzly: $\xi_1 = 0.3, \xi_2 = 0.7$; Stupeň $\ell = 1$ (lineární spliny (báze));



- Uzly: $\xi_1 = 0.3, \xi_2 = 0.7$; Stupeň $\ell = 3$ (kubické spliny (báze));



Truncated splines – "zkosené" spliny

Prříklad

- mějme uzly $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ uvnitř \mathcal{D} , a nechť $\ell = 1$ (lineární spliny);
 Pak příslušné funkce $f_1(x), \dots, f_p(x)$ mají následující tvar:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= 1, & f_2(x) &= x, & f_3(x) &= (x - \xi_1)_+, \\
 & & & & f_4(x) &= (x - \xi_2)_+, \\
 & & & & f_5(x) &= (x - \xi_3)_+
 \end{aligned}$$

- pro stejné uzly $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ uvnitř \mathcal{D} , a řád $\ell = 3$ (kubické spliny);
 Příslušné funkce $f_1(x), \dots, f_p(x)$ mají tvar:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= 1, & f_2(x) &= x, & f_5(x) &= (x - \xi_1)_+^3, \\
 f_3(x) &= x^2, & f_4(x) &= x^3, & f_6(x) &= (x - \xi_2)_+^3, \\
 & & & & f_7(x) &= (x - \xi_3)_+^3
 \end{aligned}$$

Pro splinové bázy obecně platí, že $p = \ell + k + 1$, kde $\ell \in \mathbb{N}$ je stupeň splinové bázy, resp. řád splinu a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je počet vnitřních uzlů $\xi_1 < \dots < \xi_k \in \mathcal{D}$.

Semiparametrický \Rightarrow Neparametrický postup

Bez parametrů - žádný konkrétní tvar neznáme křivky, ani zápis neznámej křivky pomoci lineárnej kombinace funkci bázy.

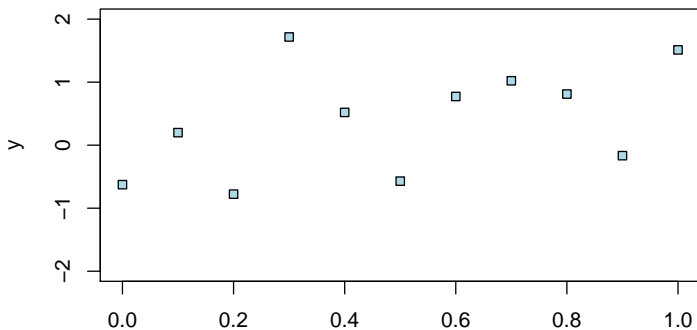
- ❑ **Klouzavé průměry (KP)** – lokální neparametrický postup vyhlazování; (*schopný zachytit trend – t.j. směr a míru pohybu pozorovaných hodnot*)
- ❑ nevystupují tady žádné neznáme parametre, které bychom odhadovali; (*výsledná vyhlazovací křivka je pouze funkci pozorovaných dat*)
- ❑ jedná se o lokální vyrovnávání pozorovaných dat; (*v daném bodě $x \in \mathcal{D}$ závisí vyrovnání pouze od několika susedů*)
- ❑ formálně zapsáno, pro pozorování y_i získame hodnotu \hat{y}_i jako

$$\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j} \quad \text{pro } i = r + 1, \dots, n - r;$$

- ❑ pro váhy w_j plátí, že $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$; (*číslo $r \in \mathbb{N}$ se nazýva délka klouzavého průměru*)

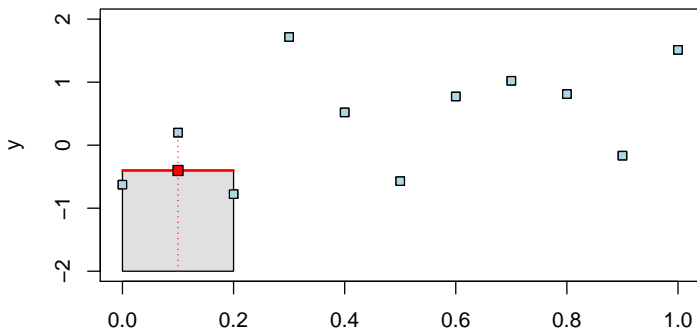
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r + 1, \dots, n - r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme \hat{y}_i pomocí y_i a dvou vedlejších sousedů;



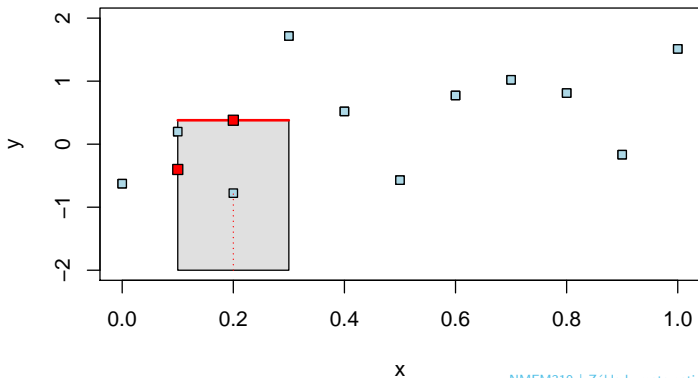
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r + 1, \dots, n - r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme \hat{y}_i pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



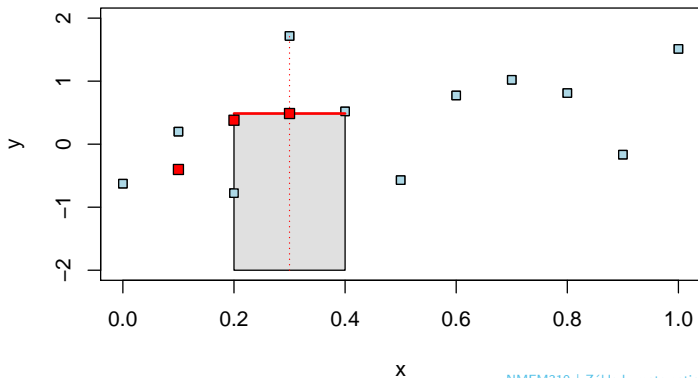
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r + 1, \dots, n - r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme \hat{y}_i pomocí y_i a dvou vedlejších sousedů;



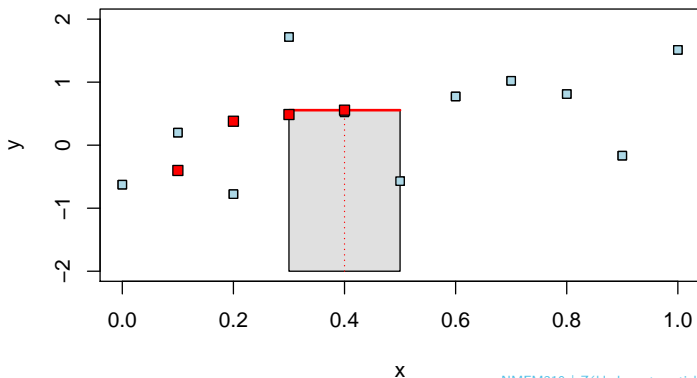
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r + 1, \dots, n - r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme \hat{y}_i pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



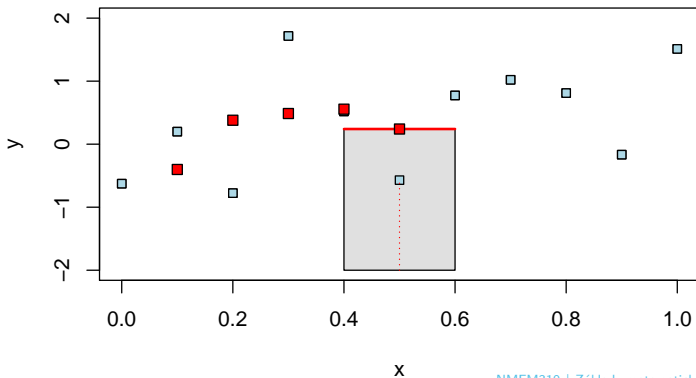
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r + 1, \dots, n - r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme \hat{y}_i pomocí y_i a dvou vedlejších sousedů;



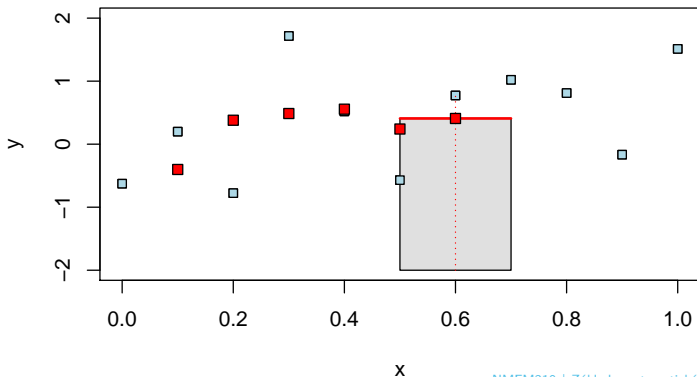
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r + 1, \dots, n - r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme \hat{y}_i pomocí y_i a dvou vedlejších sousedů;



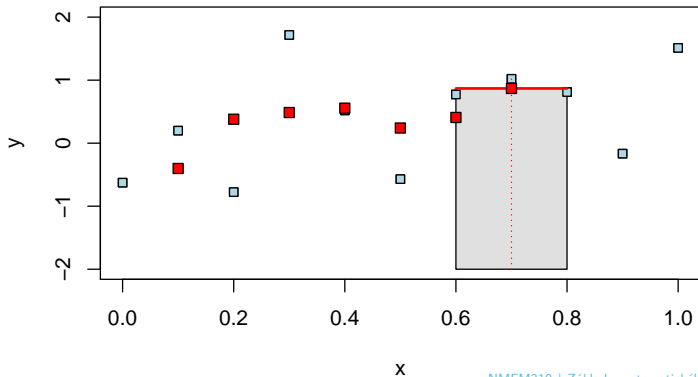
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r + 1, \dots, n - r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme \hat{y}_i pomocí y_i a dvou vedlejších sousedů;



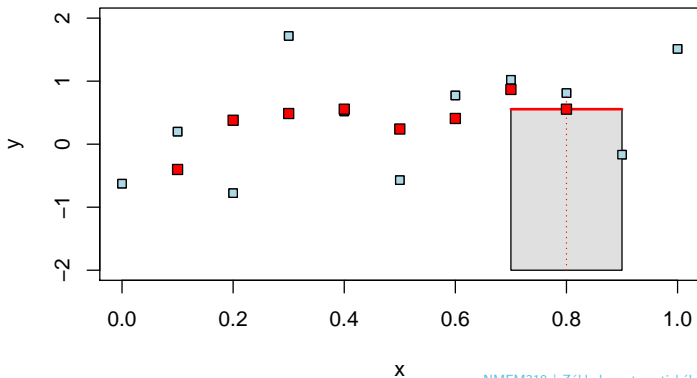
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r + 1, \dots, n - r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme \hat{y}_i pomocí y_i a dvou vedlejších sousedů;



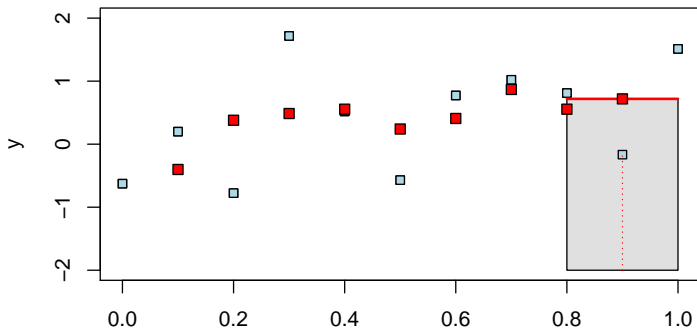
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r + 1, \dots, n - r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme \hat{y}_i pomocí y_i a dvou vedlejších sousedů;



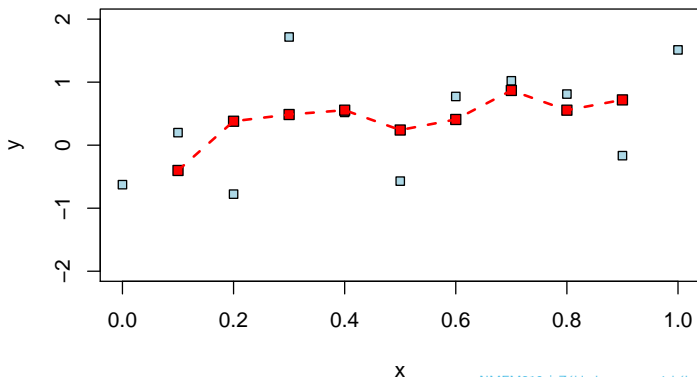
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r + 1, \dots, n - r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme \hat{y}_i pomocí y_i a dvou vedlejších sousedů;



Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r + 1, \dots, n - r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^r w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme \hat{y}_i pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



Jak definovat váhy w_j pro KP?

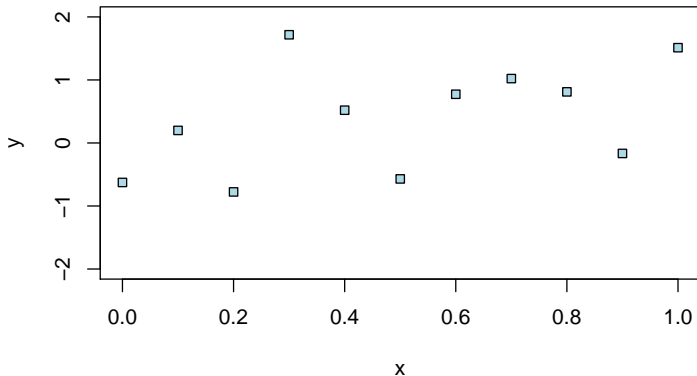
- ❑ **Stejné váhy pro všechny $j = -r, \dots, r$;**
 - ❑ jednoduchost, $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a vyrovnaná hodnota \hat{y}_i je pouze obyčejný aritmetický průměr z $2r + 1$ okolních hodnot, navíc nezáporné váhy;
 - ❑ není vyrovnán počáteční a koncový úsek dat (potřebná data nejsou k dispozici) a obecně se nejedná o hladkou křivku v \mathcal{D} ;

Jak definovat váhy w_j pro KP?

- ❑ **Stejné váhy pro všechny $j = -r, \dots, r$;**
 - ❑ jednoduchost, $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a vyrovnaná hodnota \hat{y}_i je pouze obyčejný aritmetický průměr z $2r + 1$ okolních hodnot, navíc nezáporné váhy;
 - ❑ není vyrovnán počáteční a koncový úsek dat (potřebná data nejsou k dispozici) a obecně se nejedná o hladkou křivku v \mathcal{D} ;
- ❑ **Obecně různé váhy pro $w_j, j = -r, \dots, r$;**
 - ❑ při správné volbě lze dosáhnout hladkou křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} a lze vyrovnat aj počátečné a koncové hodnoty;
 - ❑ nutnost dodatečných výpočtů, případně nějakých dodatečných parametrů;

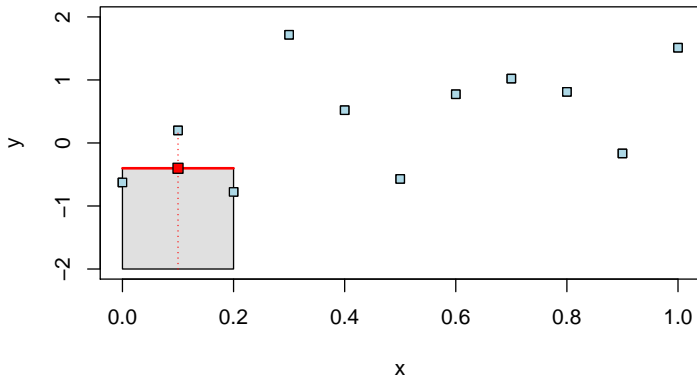
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



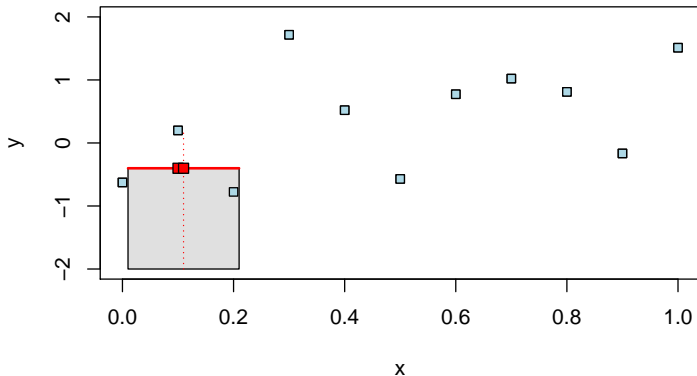
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



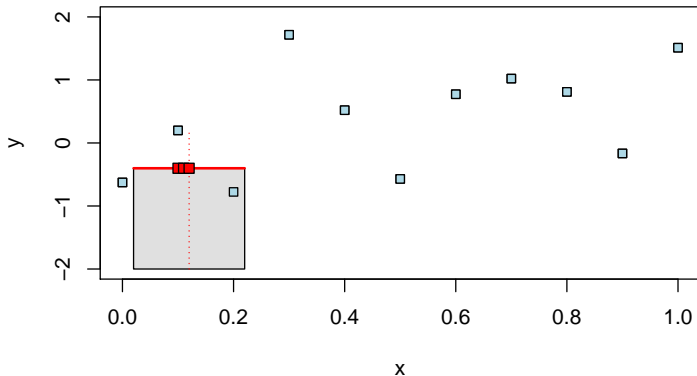
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



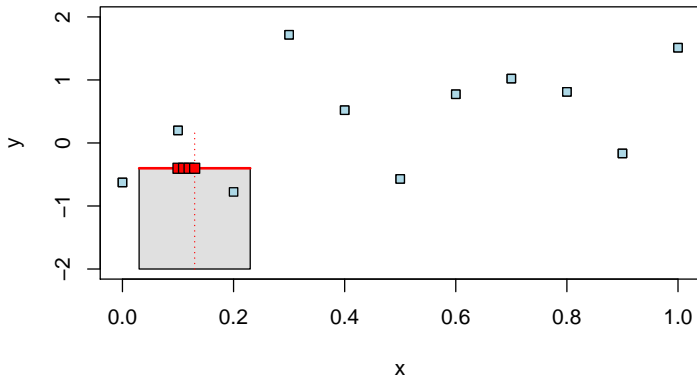
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



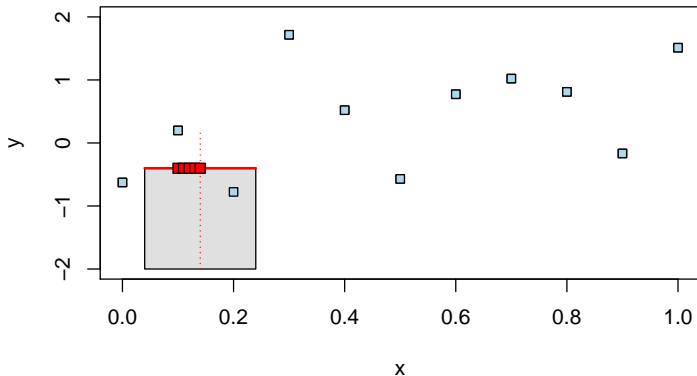
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



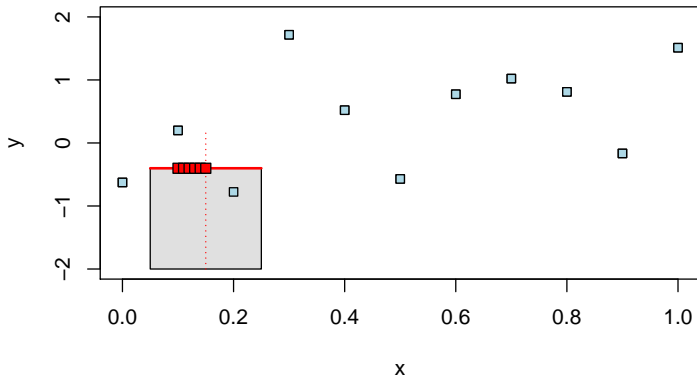
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



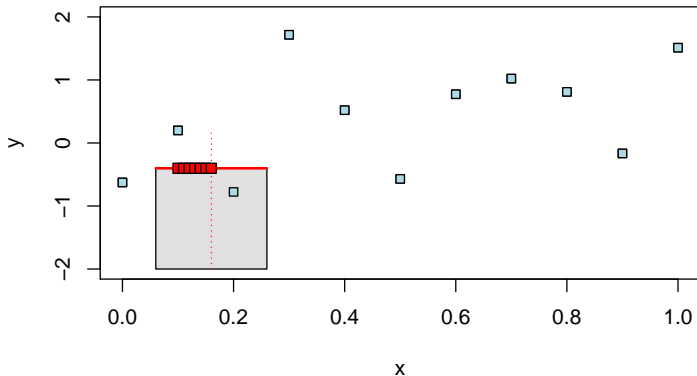
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



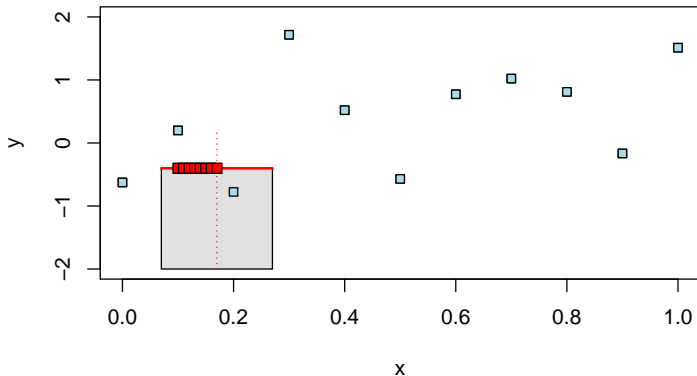
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



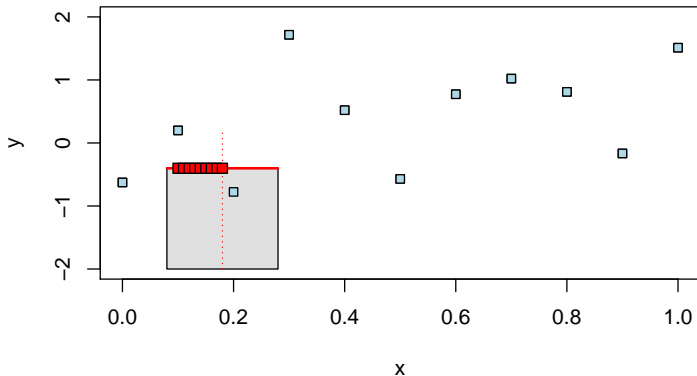
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



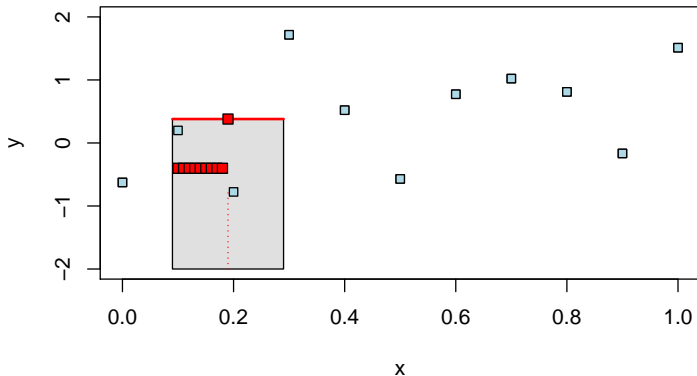
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



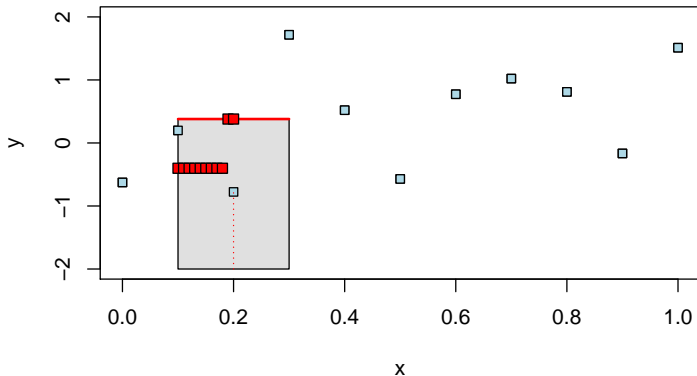
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



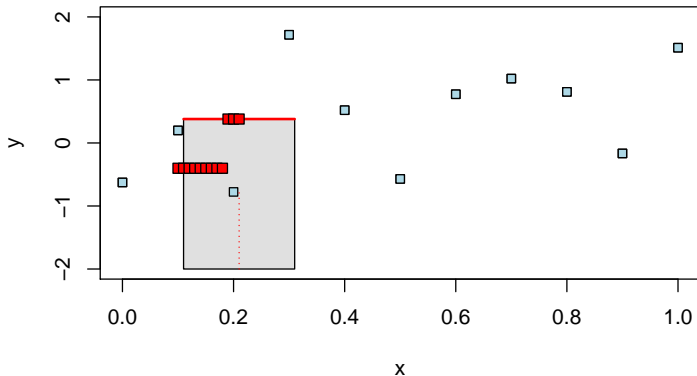
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



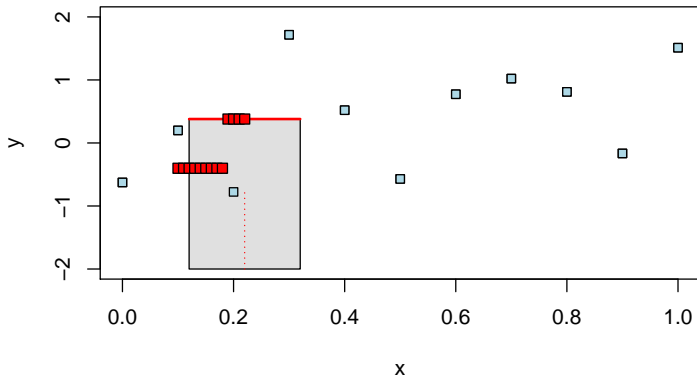
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



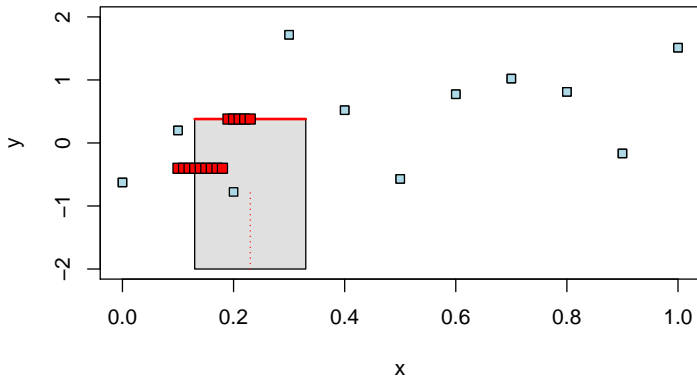
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



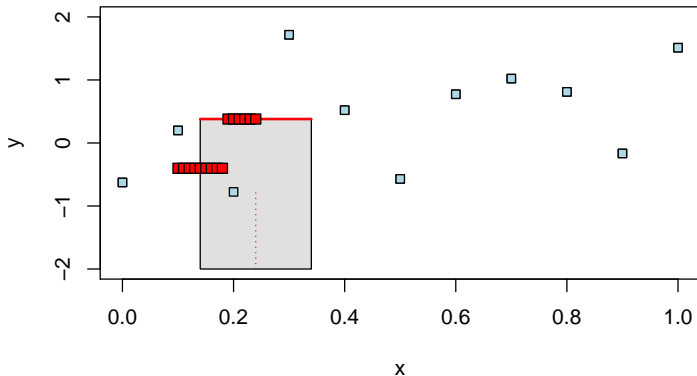
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



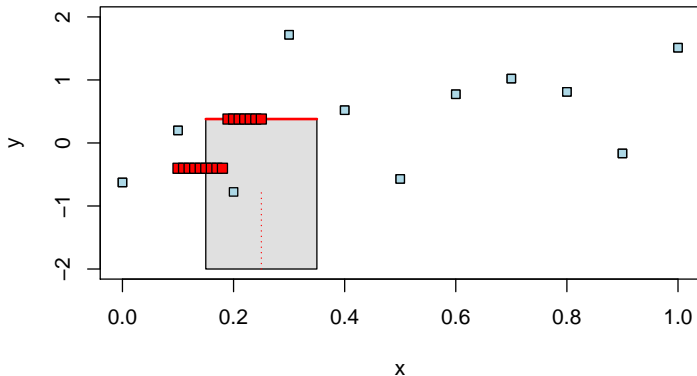
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



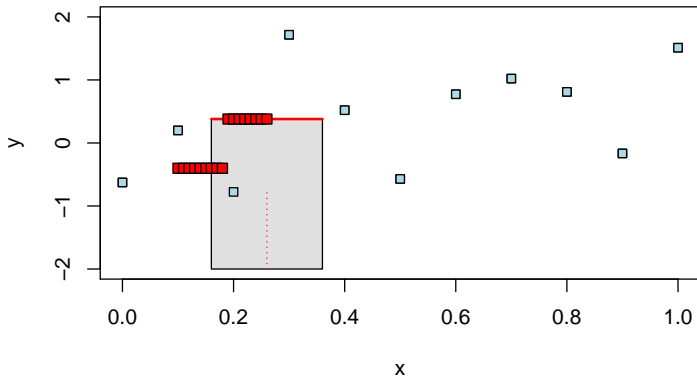
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



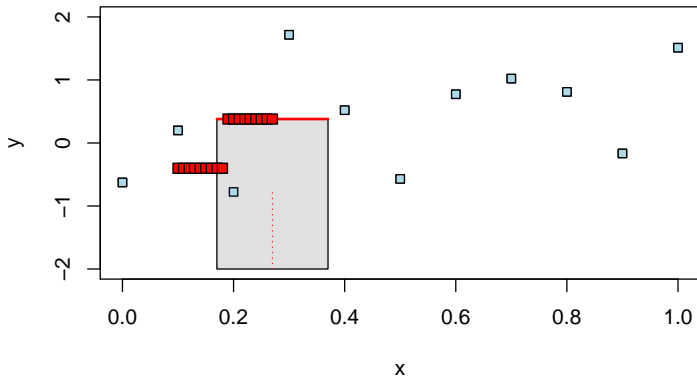
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



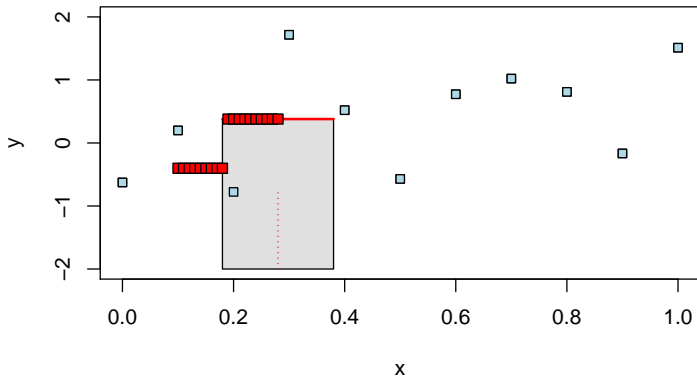
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



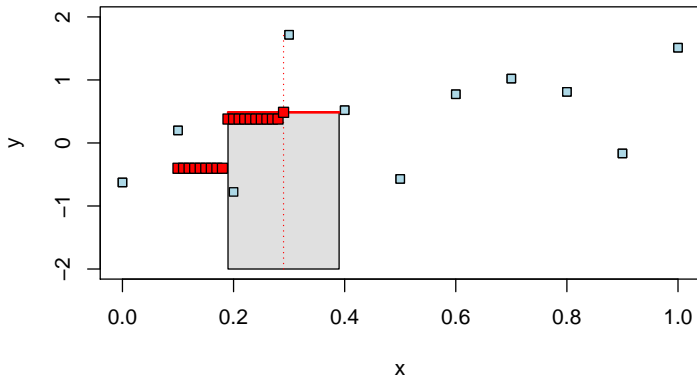
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



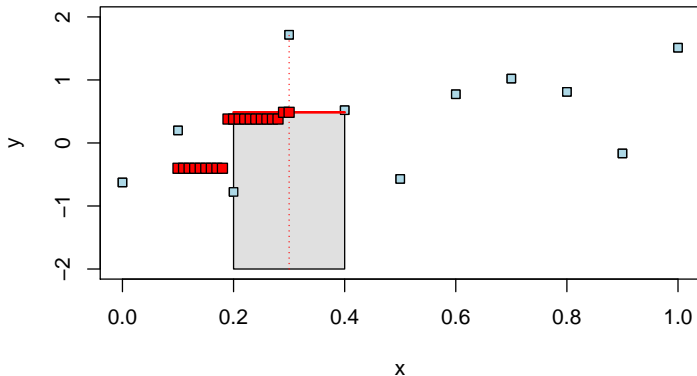
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



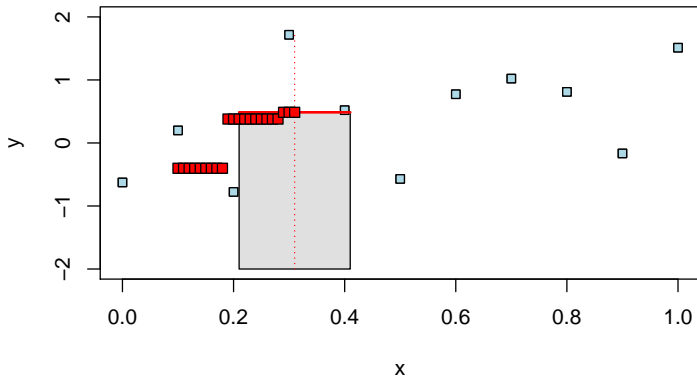
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



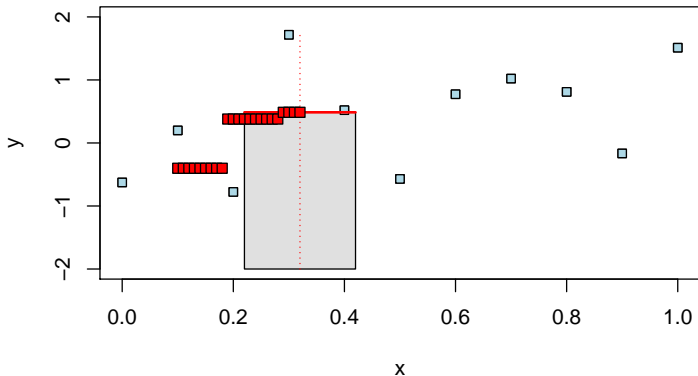
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



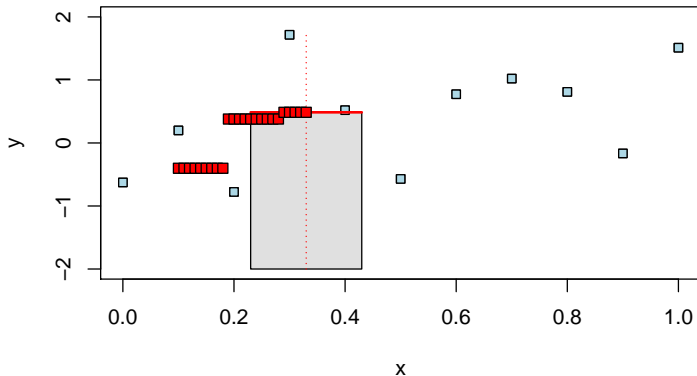
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



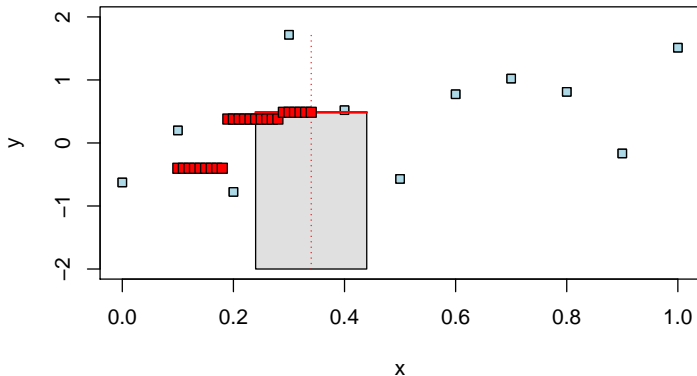
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



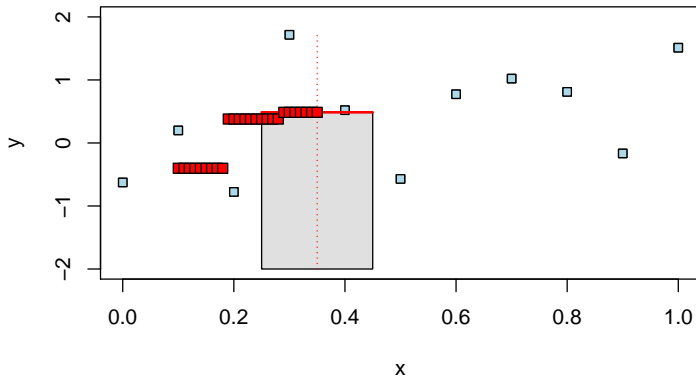
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



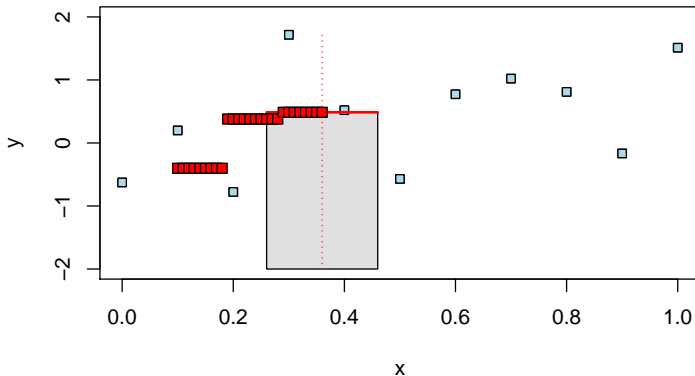
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobrazení pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



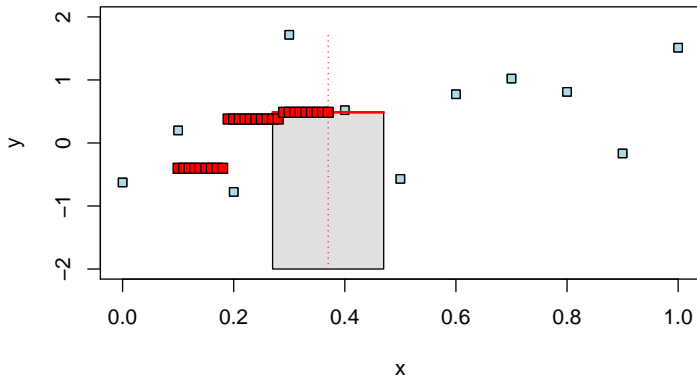
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



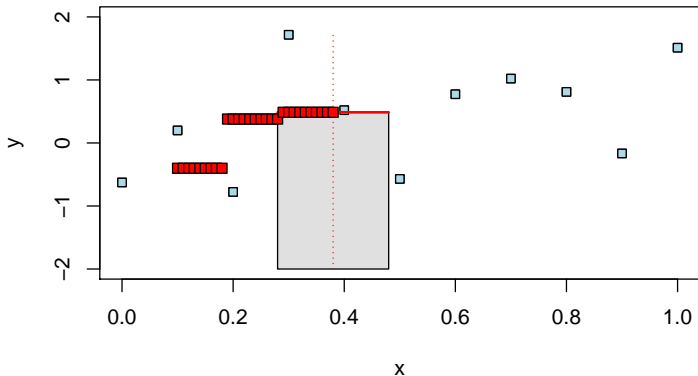
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



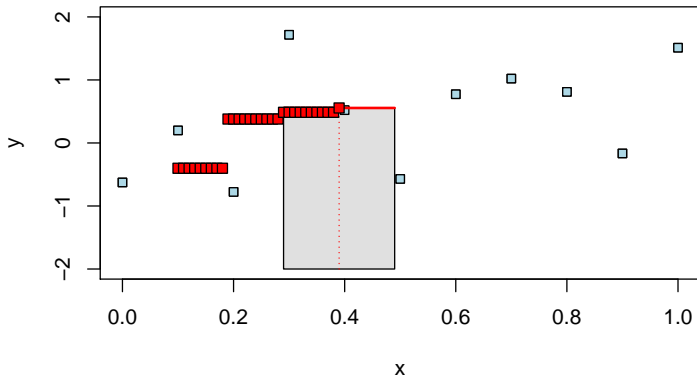
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobrazení pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



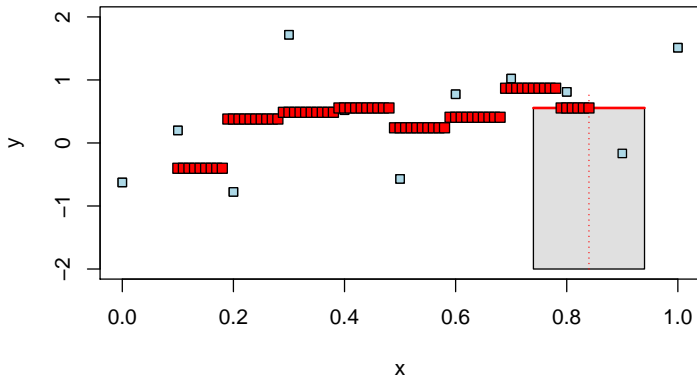
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



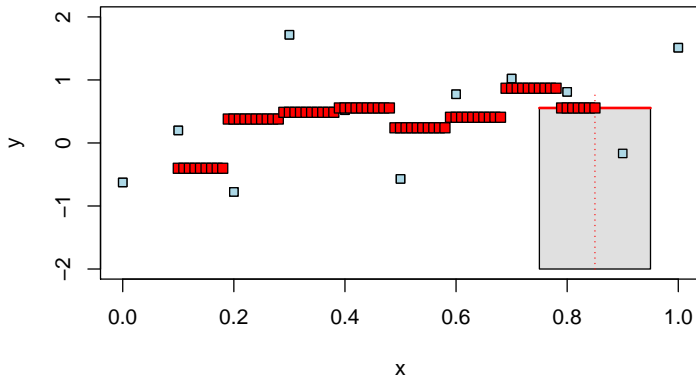
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



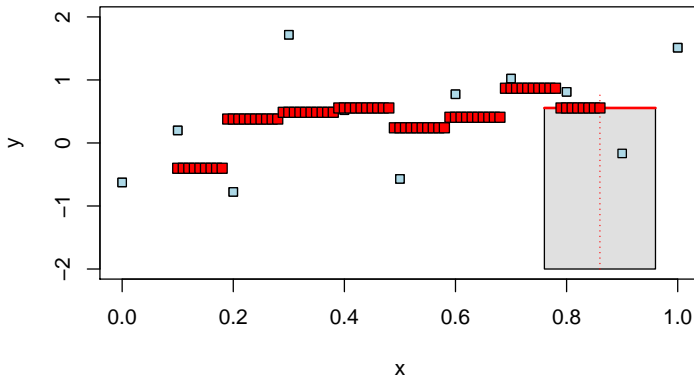
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



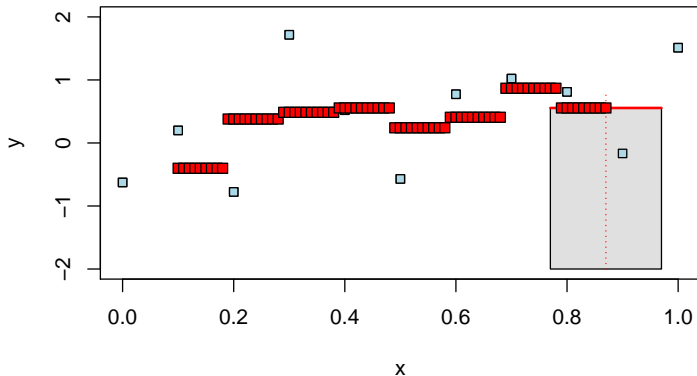
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



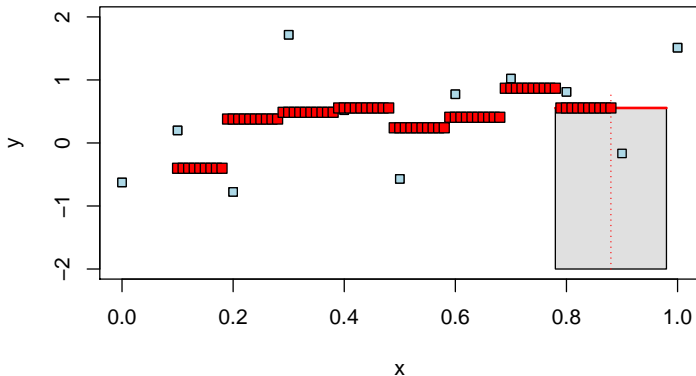
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



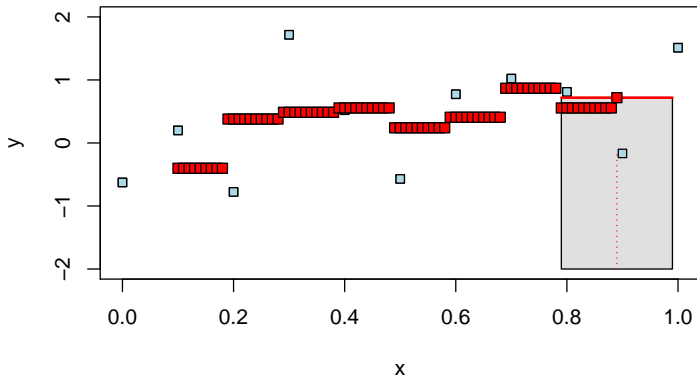
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



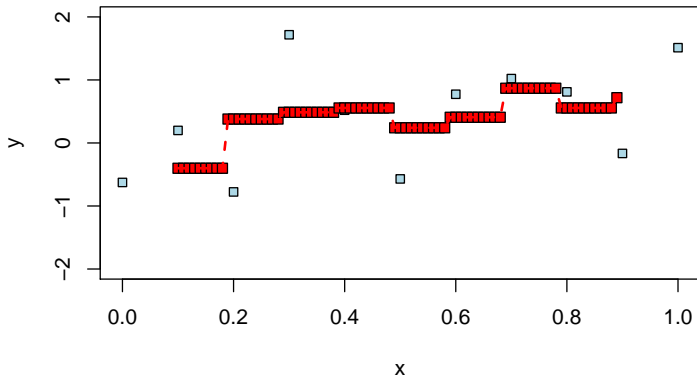
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Při určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



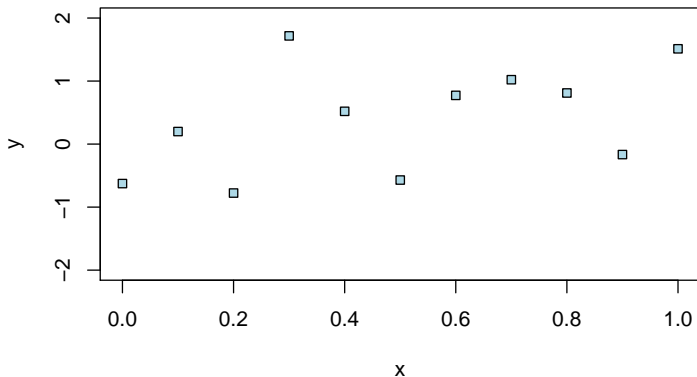
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



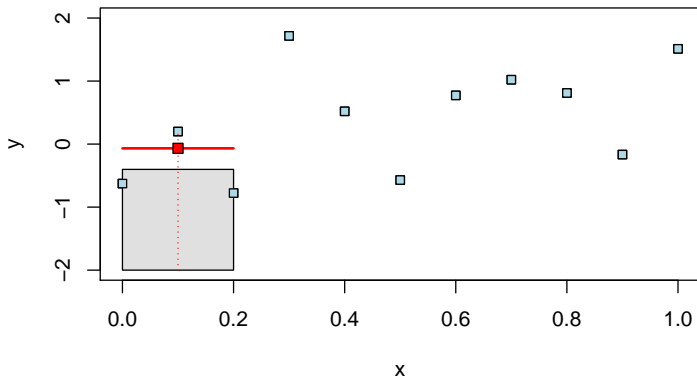
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



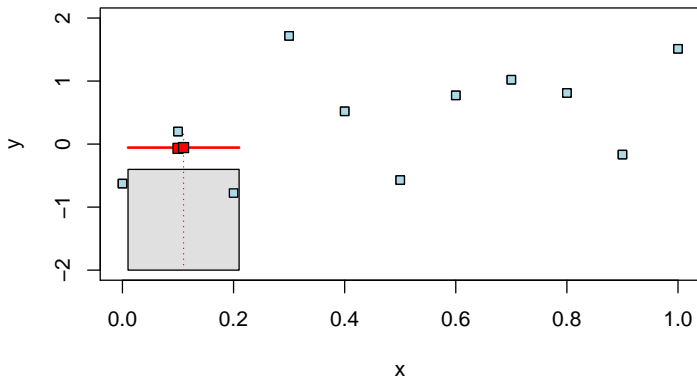
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



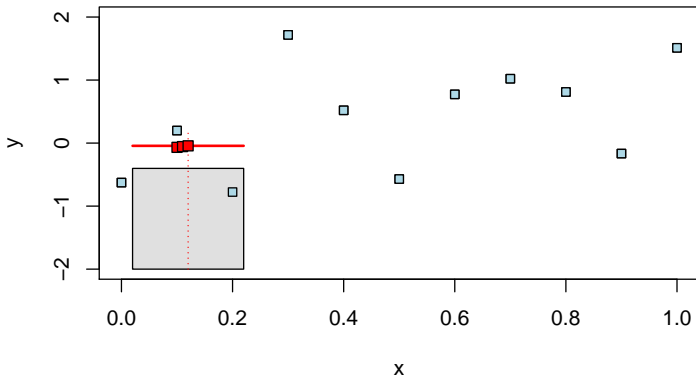
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



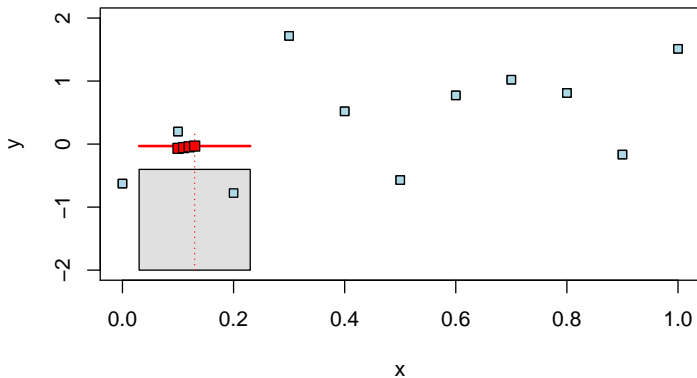
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



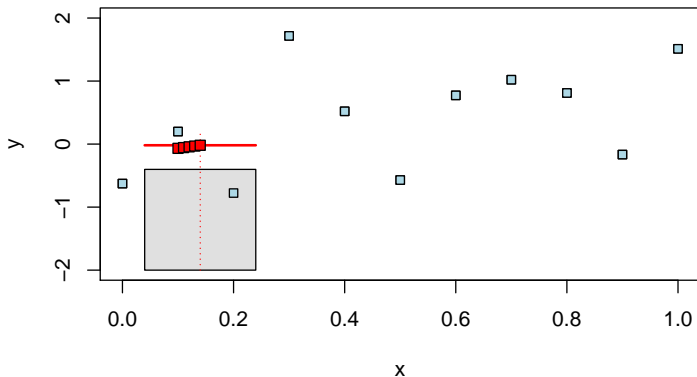
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



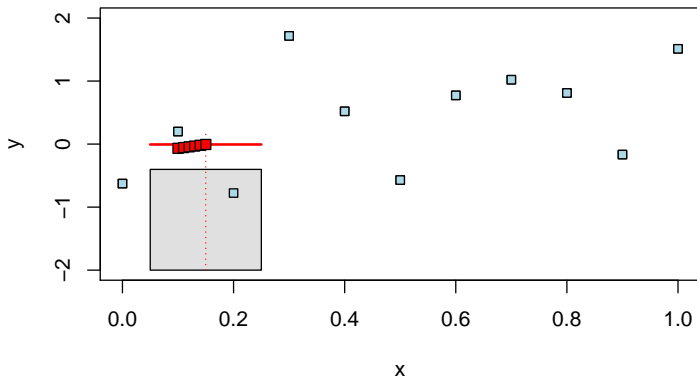
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



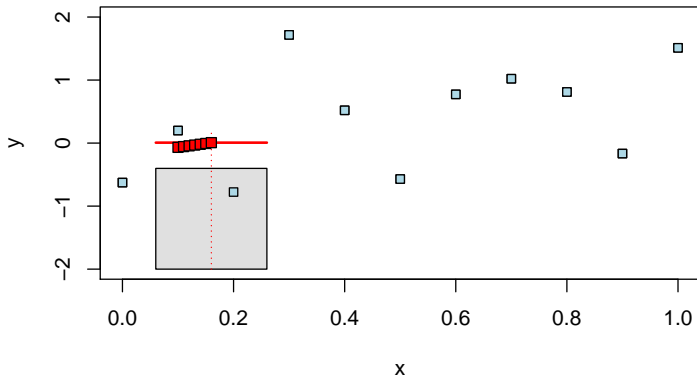
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



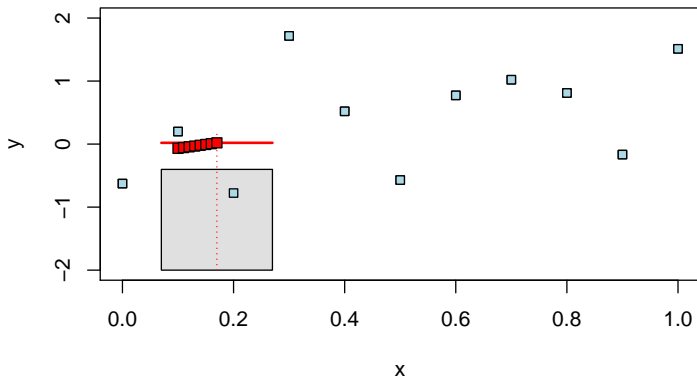
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



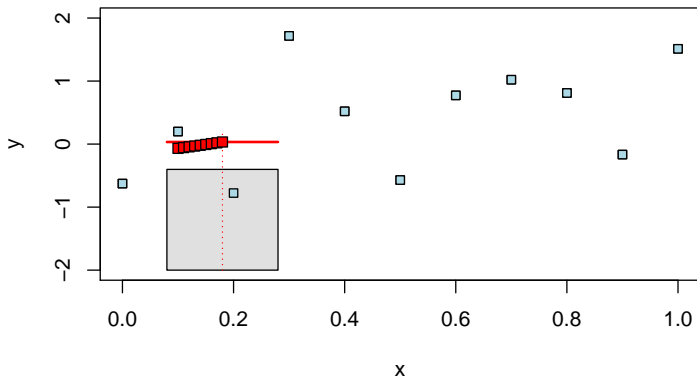
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



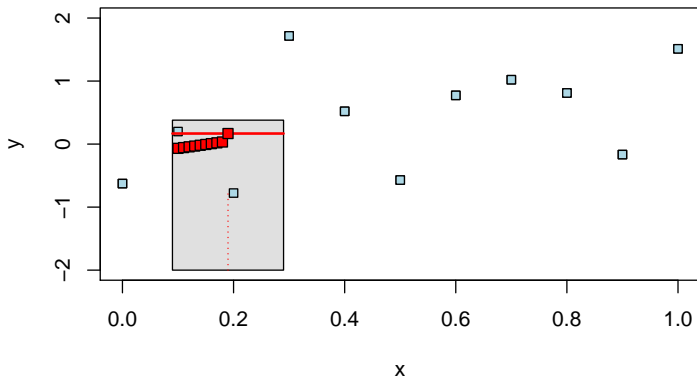
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



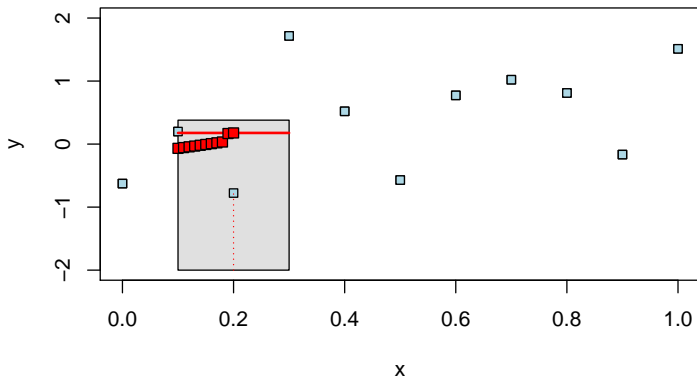
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



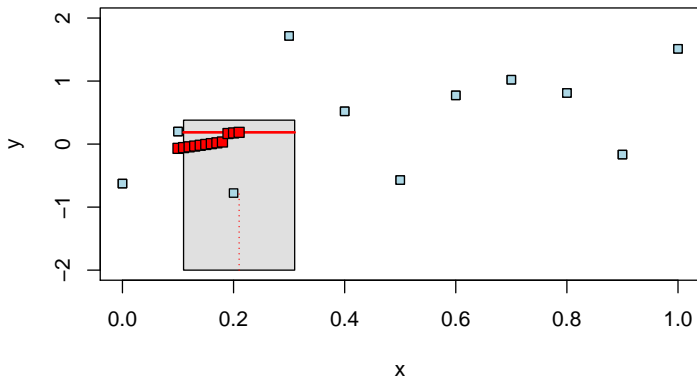
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



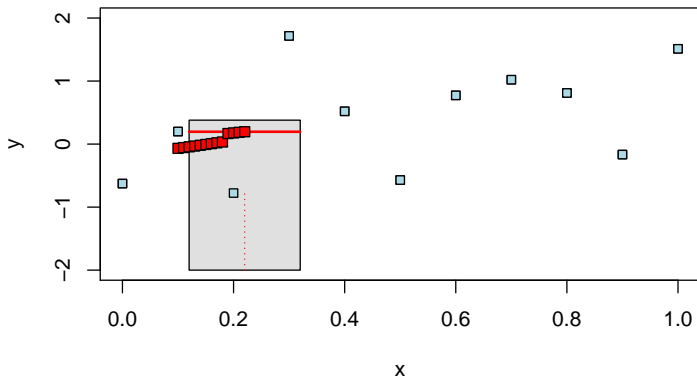
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



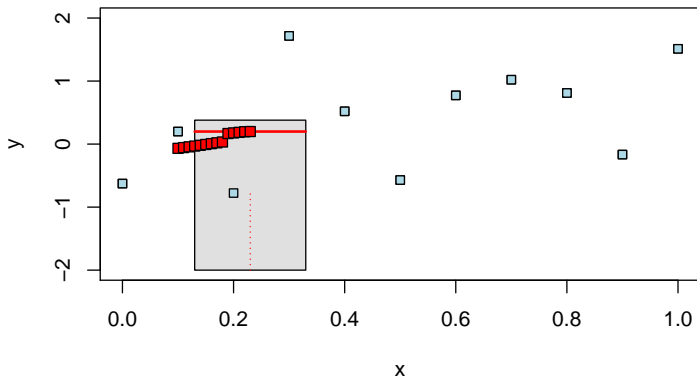
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



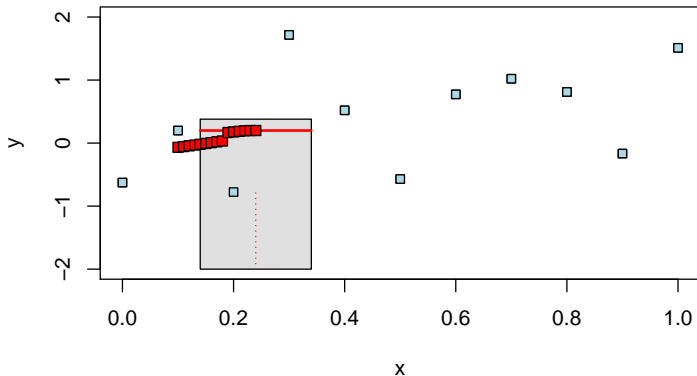
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



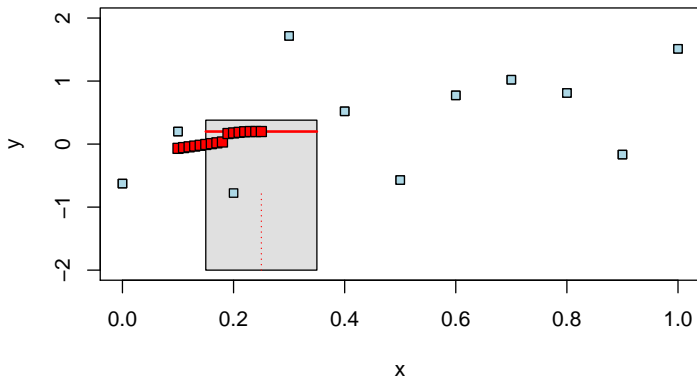
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



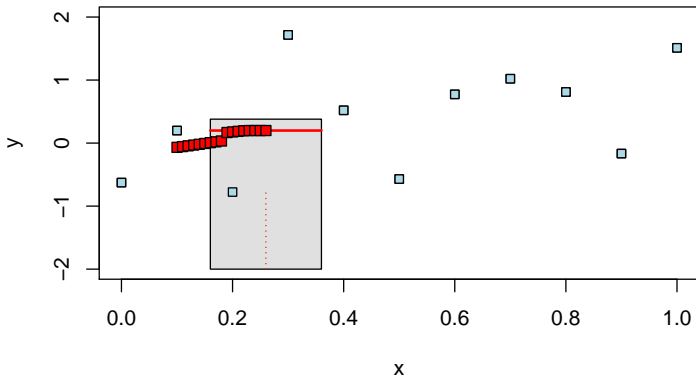
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



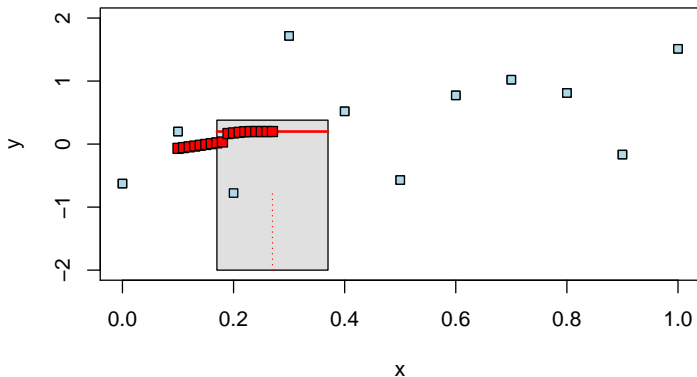
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



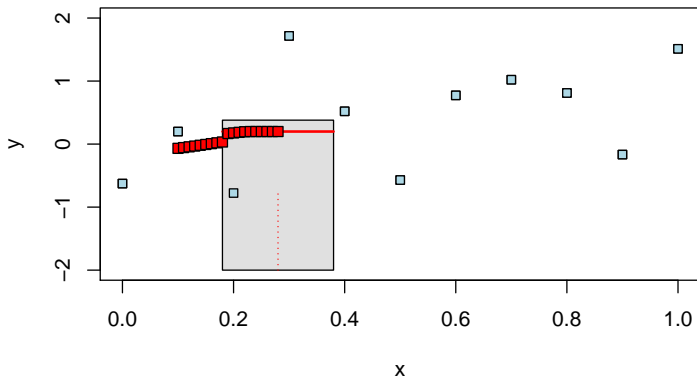
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



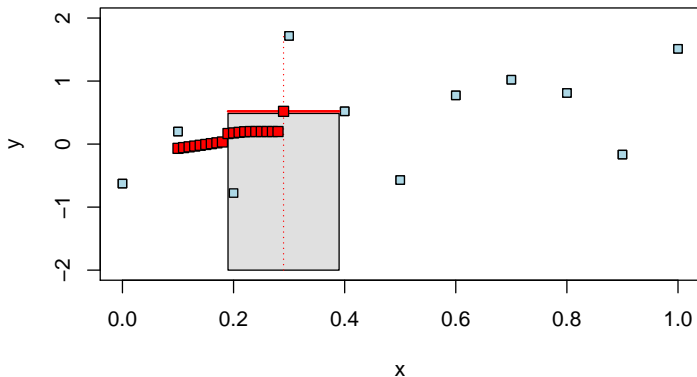
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



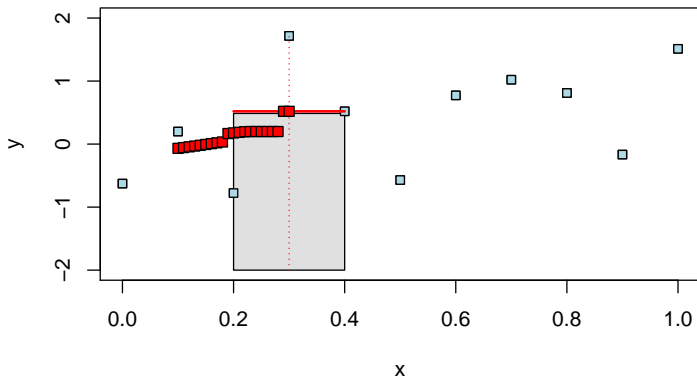
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



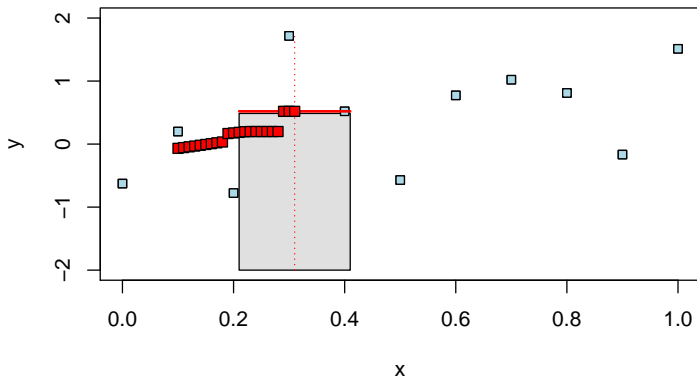
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



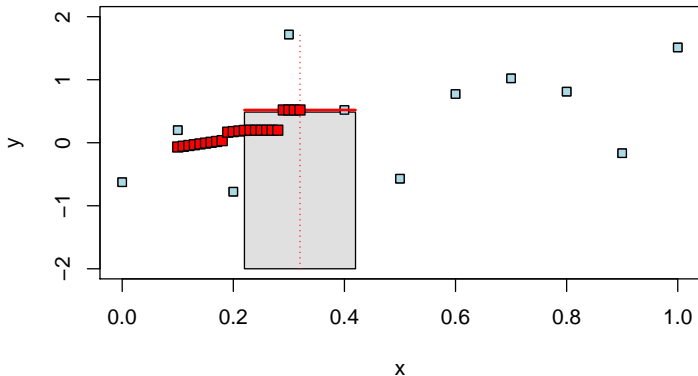
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



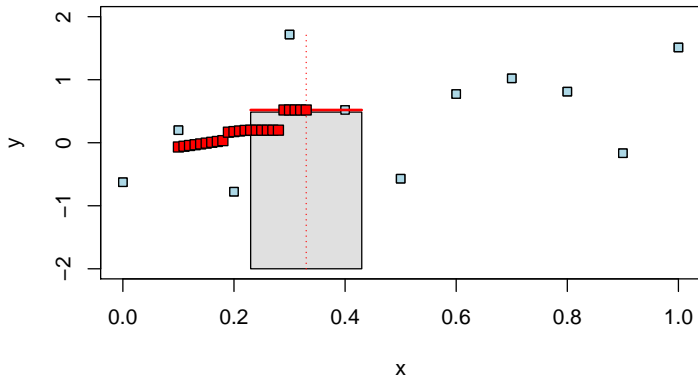
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



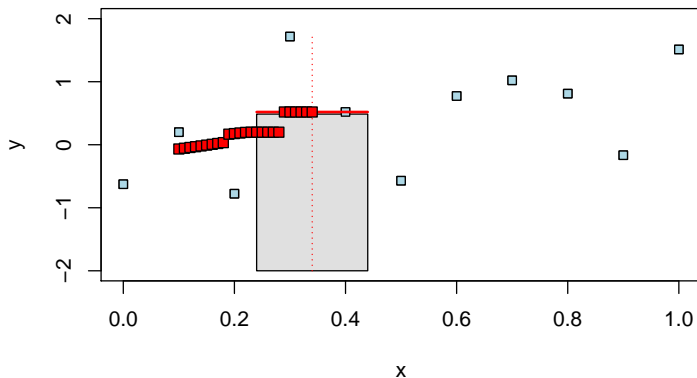
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



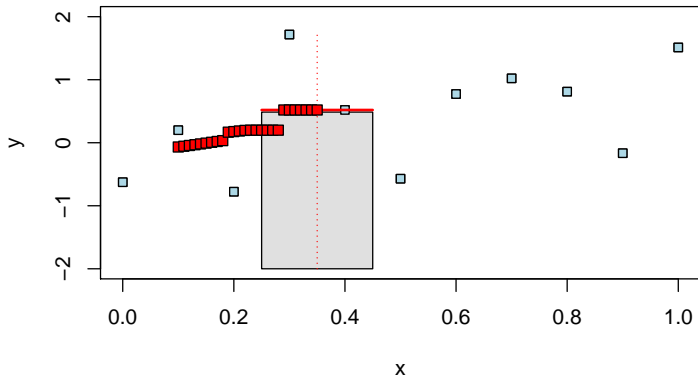
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



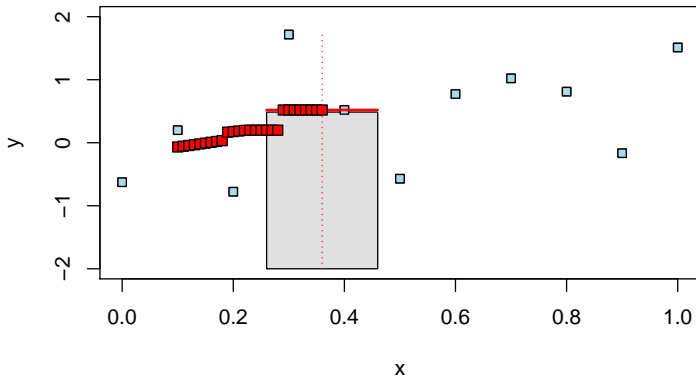
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



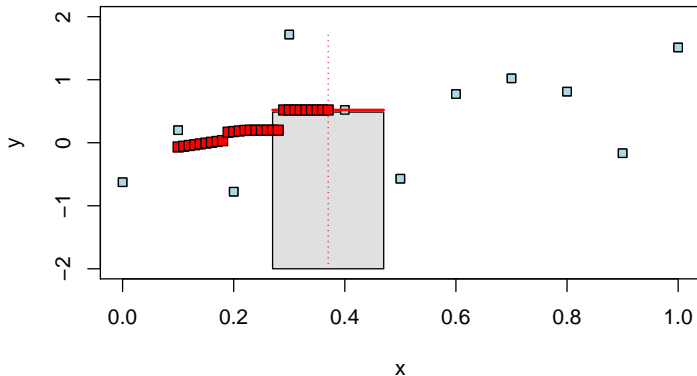
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



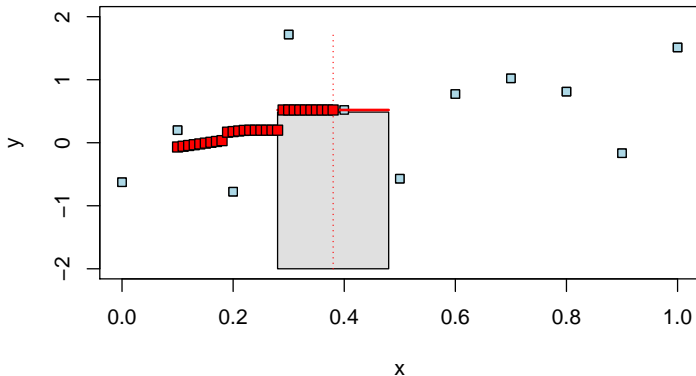
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



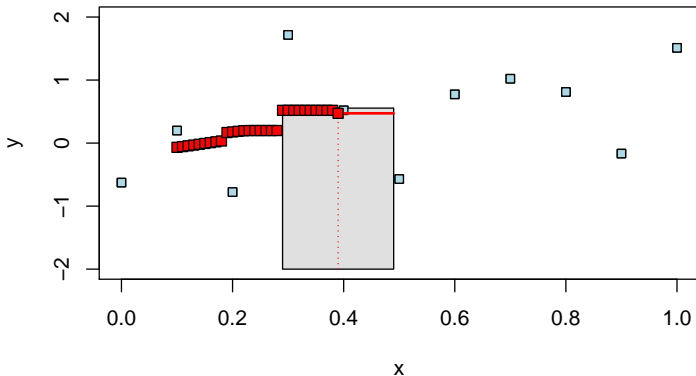
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



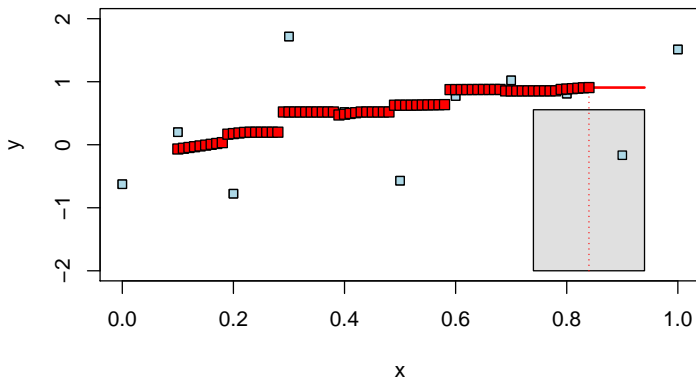
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



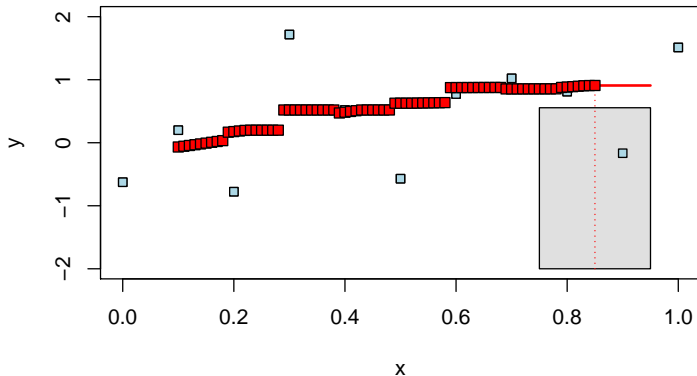
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



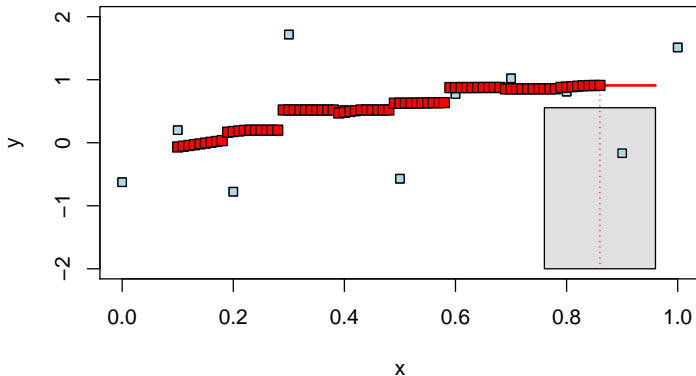
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



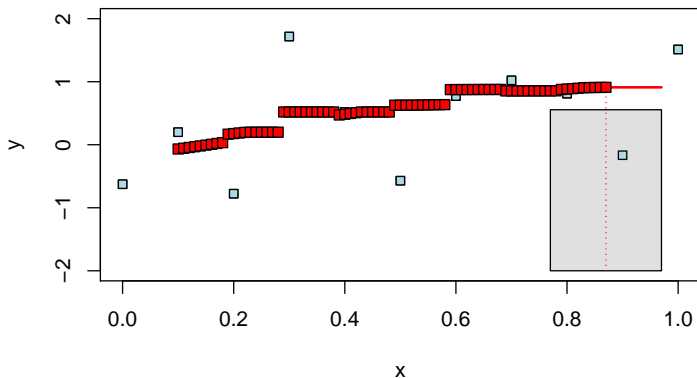
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



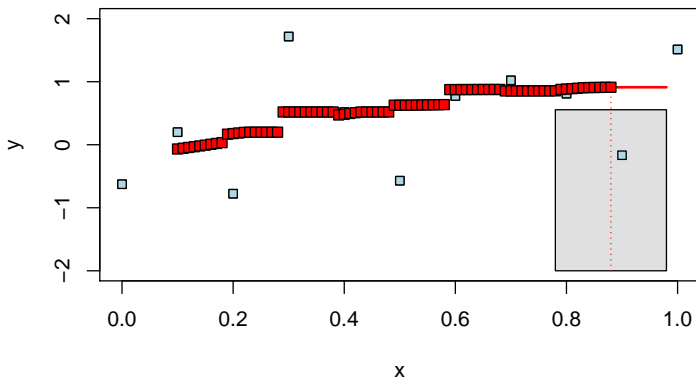
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



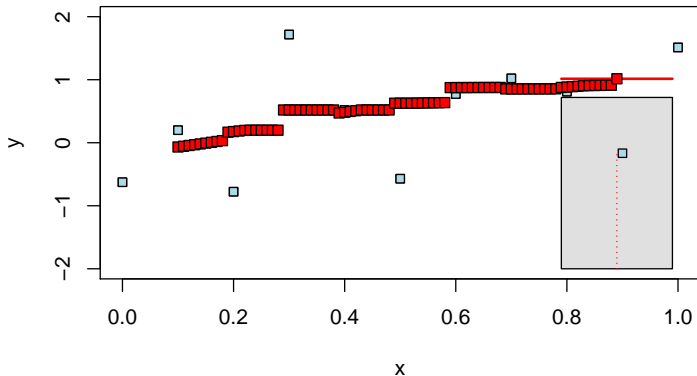
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



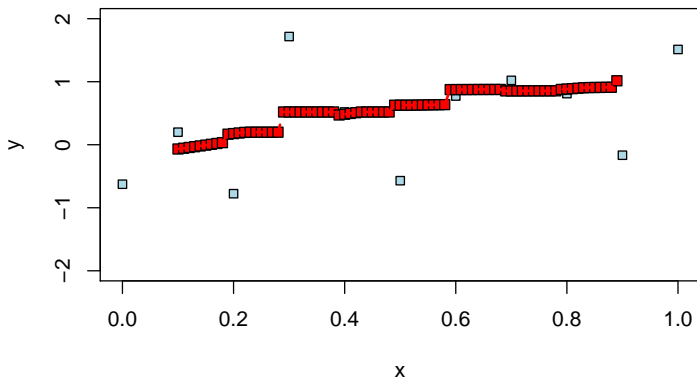
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



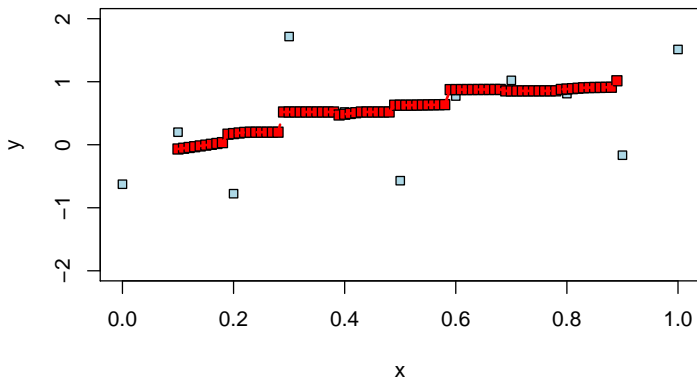
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získať určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru \mathcal{D} .



- Výsledná křivka nevypadá úplně hladce, ale to je z důvodu příliš hrubého gridu bodů z \mathcal{D} v kterých počítáme vážený průměr.

Konstrukce KP vyrovnáním úseků polynomy

- **IDEA:** váhy w_j pro vyrovnání hodnot y_i volíme tak, že $2r + 1$ členů řady, t.j. hodnoty $y_{i-r}, \dots, y_i, \dots, y_{i+r}$, aproximujeme vhodným polynomem stupně $p \in \mathbb{N}$; Vyrovnána hodnota \hat{y}_i je pak hodnota polynomu, která odpovídá pozorování y_i .
- hodnota $p \in \mathbb{N}$ se nazývá **řád klouzavého průměru**;
- formálně zapsáno, pro pozorování y_{i-r}, \dots, y_{i+r} uvažujeme polynom

$$y_{i+u} \approx c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \dots + c_p u^p \quad \text{pro } u = -r, \dots, r; \quad (2)$$

- resp. zapsáno v **maticovém tvaře** $\mathbf{y}_{(i:r)} \approx \mathbb{F} \mathbf{c}$, kde

$$\mathbf{y}_{(i:r)} = \begin{pmatrix} y_{i-r} \\ \vdots \\ y_{i+r} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & (-r) & (-r)^2 & \dots & (-r)^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & r & r^2 & \dots & r^p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$$

- vyrovnanou hodnotu \hat{y}_i pro y_i pak dostaneme **dosazením** $u = 0$ do (2);

Váhy pomoci projekční matice

- pro část pozorování $\mathbf{y}_{(i:r)} = (y_{i-r}, \dots, y_{i+r})^\top$ máme pro vyrovnání vztah

$$\hat{\mathbf{y}}_{(i:r)} = \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbf{c}};$$

- pro odhadnuté parametry $\hat{\mathbf{c}} = (\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_p)^\top$ zase platí

$$\hat{\mathbf{c}} = (\mathbb{F}^\top \mathbb{F})^{-1} \mathbb{F}^\top \mathbf{y}_{(i:r)};$$

- pro vyrovnané hodnoty $\hat{\mathbf{y}}_{(i:r)} = (\hat{y}_{i-r}, \dots, \hat{y}_{i+r})^\top$ proto dostaneme

$$\hat{\mathbf{y}}_{(i:r)} = \mathbb{F}(\mathbb{F}^\top \mathbb{F})^{-1} \mathbb{F}^\top \mathbf{y}_{(i:r)} = \mathbb{H} \mathbf{y}_{(i:r)};$$

- matice $\mathbb{H} = \mathbb{F}(\mathbb{F}^\top \mathbb{F})^{-1} \mathbb{F}^\top$ se nazývá **projekční matice**;
- projekční matice definuje **linární zobrazení** z \mathbb{R}^{2r+1} do $p+1$ rozměrného podprostoru (**projekce z \mathbb{R}^{2r+1} do \mathbb{R}^{p+1}**) v \mathbb{R}^{2r+1} ;
- projekční matice \mathbb{H} je typu $(2r+1) \times (p+1)$ a v prostředním řádku obsahuje váhy pro vyrovnání hodnoty y_i ;

Váhy w_j vs. parametre c_1, \dots, c_p

- pro vyhlazené hodnoty \hat{y}_i , pro $i = r + 1, \dots, n - r$, máme obecně

$$\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^r w_j y_{i+j} = \mathbf{h}_{r+1}^\top \mathbf{y}_{(i:r)} = \hat{c}_1,$$

kde $\mathbf{h}_{r+1} = (h_{(r+1)1}, \dots, h_{(r+1)(2r+1)})^\top = (w_{-r}, \dots, w_r)^\top$, je $(r + 1)$ -ní řádek projekční matice $\mathbb{H} = (\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{2r+1})^\top$;

- maticově můžeme taktiež použít vyjádření ve tvaru

$$\hat{\mathbf{y}}_{(i:r)} = \mathbb{H} \mathbf{y}_{(i:r)} = \mathbb{F} (\mathbb{F}^\top \mathbb{F})^{-1} \mathbb{F}^\top \mathbf{y}_{(i:r)} = \mathbb{F} \hat{\mathbf{c}},$$

přičemž vyhlazená hodnota \hat{y}_i , která nás zajíma, je $(r + 1)$ -ní element vektoru $\hat{\mathbf{y}}_{(i:r)} = (\hat{y}_{i-r}, \dots, \hat{y}_{i+r})^\top$;

- je důležité si uvědomit, že váhy w_{-r}, \dots, w_r nezávisí na indexu $i = r + 1, \dots, n - r$ a pro každou vyhlazenú hodnotu \hat{y}_i jsou stejné; (váhy w_{-r}, \dots, w_r závisí pouze na matici \mathbb{F} , která je pořád stejná)
- naproti tomu odhadnuté parametre $\hat{\mathbf{c}} = (\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_p)^\top$ na indexu $i = r + 1, \dots, n - r$ závisí, a pro každé \hat{y}_i jsou parametry obecně různé; (odhady $\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_p$ totiž závisia na matici \mathbb{F} , ale tiež na vektore $\mathbf{y}_{(i:r)}$)

Odhad parametrů c_0, \dots, c_p

- odhad parametrů c_0, \dots, c_p pomocí metody nejmenších čtverců;

Samostatný úkol

Jak vypadá v tomhle případě matice \mathbb{F} a jak se mení v závislosti na požadované hodnotě y_i , pro $i = -r, \dots, r$, kterou chceme vyhlazovat?

Jak vypadá projekční soustava normálních rovnic a příslušná projekční matice?

Příklad

Uvažujte kubický polynom pro $p = 3$ a $r = 2$. Polynom pro určení váh je ve tvaru $y_{i+u} \approx c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3$, kde $c_0, \dots, c_3 \in \mathbb{R}$ jsou neznámé parametry.

- sestavte příslušnou matici \mathbb{F} ;
- nájděte projekčnou matici $\mathbb{H} = \mathbb{F}(\mathbb{F}^T \mathbb{F})^{-1} \mathbb{F}^T$;
- nájděte váhy w_j , pro $j = -2, 1, 0, 1, 2$ a spočtěte \hat{y}_i , pro $i = 3, \dots, n - 2$;

Vyrovnané hodnoty a predikce

- na rozdíl od klasických aritmetických klouzavých průměrů je možné využít vážené klouzavé průměry aj k vyrovnání počátečních a koncových hodnot;
- pro vyhlazení napr. koncového úseku stačí v (2) vhodne dosadit za u ;

Napr. pro $r = 1$ a $p = 1$, máme $y_{i+u} \approx c_0 + c_1 u$, pro $u = -1, 0, 1$ a $i = 2, \dots, n-1$;

Pro vylazení y_n dosadíme: $i \leftarrow n-1$ a $u \leftarrow 1 \Rightarrow y_n = y_{(n-1)+1} \approx c_0 + c_1$ a $\hat{y}_n = \hat{c}_0 + \hat{c}_1$;

- analogicky lze použít výraz (2) i pro budoucí predikce;

Napr. pro $r = 2$ a $p = 2$, máme $y_{i+u} \approx c_0 + c_1 u + c_2 u^2$, pro $u = -2, \dots, 2$ a $i = 3, \dots, n-2$;

Predikce y_{n+1} : $i \leftarrow n-2$ a $u \leftarrow 3 \Rightarrow y_{n+1} = y_{(n-2)+3} \approx c_0 + 3c_1 + 9c_2$ a $\hat{y}_{n+1} = \hat{c}_0 + 3\hat{c}_1 + 9\hat{c}_2$;

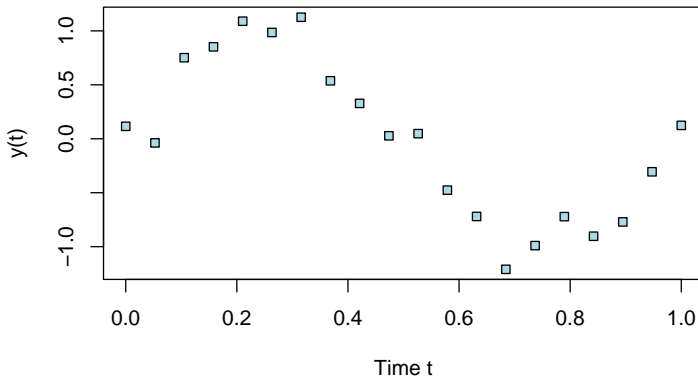
Príklad

Uvažujte kubický polynom pro $p = 3$ a $r = 2$. Polynom pro určení váh je ve tvaru $y_{i+u} \approx c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3$, kde $c_0, \dots, c_3 \in \mathbb{R}$ jsou neznáme parametry.

- spočtete predikci o jeden krok dopředu a explicitně vyjadříte váhy pro vážený průměr;

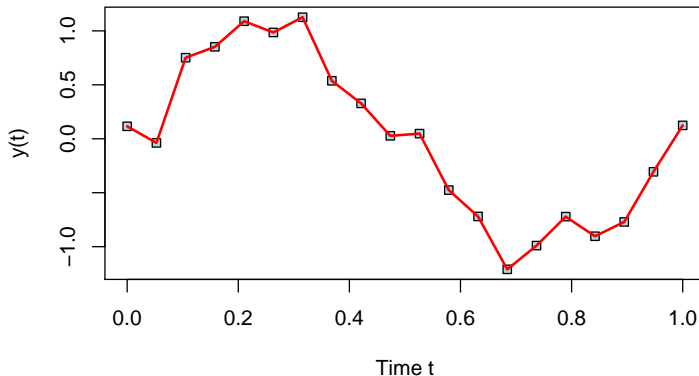
Vychýlení vs. variabilita

- ❑ Jak zvolit/vybrat **vhodnou míru vyhlazení**?
- ❑ Lze aplikovat **nějaké optimální kritérium** pomoci kterého se rozhodnout?



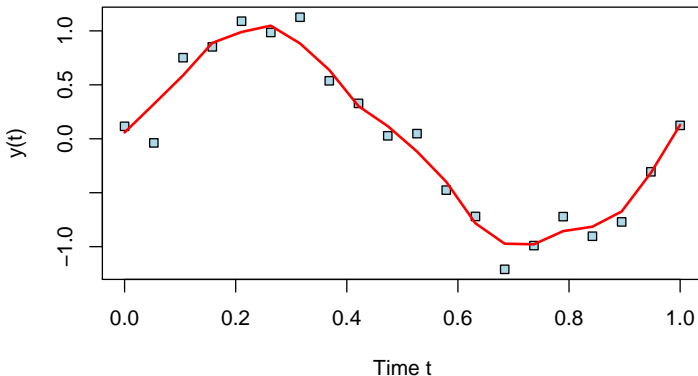
Vychýlení vs. variabilita

- ❑ Jak zvolit/vybrat vhodnou míru vyhlazení?
- ❑ Lze aplikovat nějaké optimální kritérium pomoci kterého se rozhodnout?



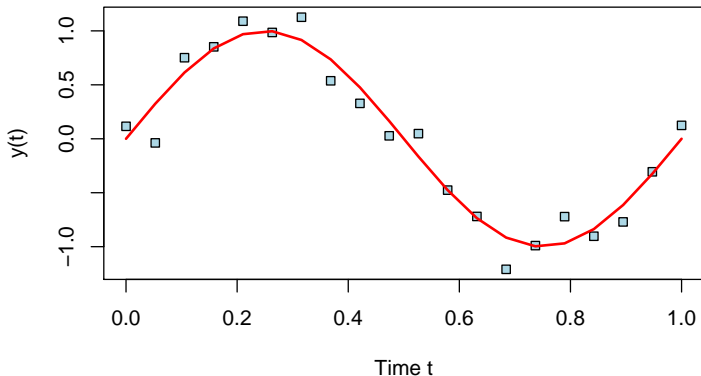
Vychýlení vs. variabilita

- ❑ Jak zvolit/vybrat vhodnou míru vyhlazení?
- ❑ Lze aplikovat nějaké optimální kritérium pomoci kterého se rozhodnout?



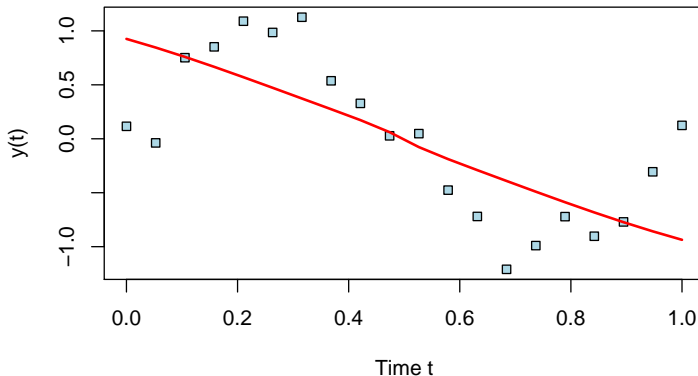
Vychýlení vs. variabilita

- ❑ Jak zvolit/vybrat vhodnou míru vyhlazení?
- ❑ Lze aplikovat nějaké optimální kritérium pomoci kterého se rozhodnout?



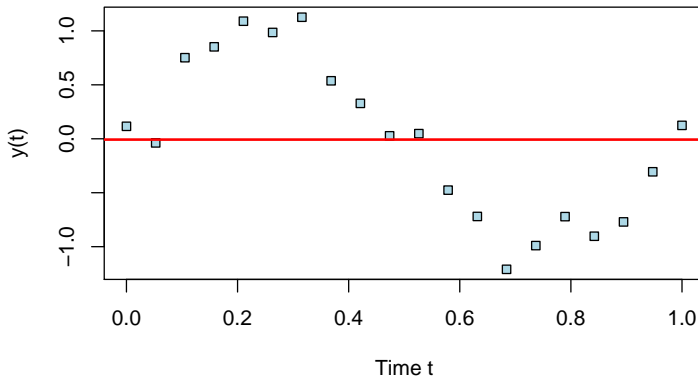
Vychýlení vs. variabilita

- ❑ Jak zvolit/vybrat vhodnou míru vyhlazení?
- ❑ Lze aplikovat nějaké optimální kritérium pomoci kterého se rozhodnout?



Vychýlení vs. variabilita

- ❑ Jak zvolit/vybrat vhodnou míru vyhlazení?
- ❑ Lze aplikovat nějaké optimální kritérium pomoci kterého se rozhodnout?



Whittacker-Hendersonová metoda

Základnou úlohou vyhlazování dat je odhadnout hladký, pomalu se měnící trend. Zároveň cheme dosáhnout co nejlepší zhodu mezi původními daty a vylazenými daty (zhodu mezi daty a modelem);

- ❑ **Dokonalé vyhlazení**
⇒ příliš velký součet čtverců odchylek, a malá zhoda s původními daty;
- ❑ **Dokonalá zhoda s daty**
⇒ nulový součet čtverců odchylek, příliš velká variabilita, interpolace;

Whittacker-Hendersonová metoda

Základnou úlohou vyhlazování dat je odhadnout hladký, pomalu se měnící trend. Zároveň chceme dosáhnout co nejlepší zhodu mezi původními daty a vylazenými daty (zhodu mezi daty a modelem);

- ❑ **Dokonalé vyhlazení**
⇒ příliš velký součet čtverců odchylek, a malá zhoda s původními daty;
- ❑ **Dokonalá zhoda s daty**
⇒ nulový součet čtverců odchylek, příliš velká variabilita, interpolace;

Whittacker/Hendersonova metoda

Metoda, která umožňuje hledat kompromis mezi těmito dvěma požadavky tím, že jim přiděluje rozdílnou váhu. Vyrovnané hodnoty minimalizují kritérium

$$M(\hat{y}) = \underbrace{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}_{\text{součet čtverců}} + \lambda \cdot \underbrace{\sum_{i=r+1}^n (\Delta^r \hat{y}_i)^2}_{\text{penalta}},$$

kde $\lambda > 0$ je nějaký vhodně zvolený ladící parametr.

Whittacker-Hendersonová metoda

- ❑ W-H metoda nepředpokládá **žádný konkrétní tvar** prokladané křivky;
- ❑ symbol $\Delta^r \hat{y}_i$ označuje **rekuzivnou r -tou zpětnou diferenci** posloupnosti \hat{y}_i ;
- ❑ obecně platí, že $\Delta^0 \hat{y}_i = \hat{y}_i$ a $\Delta^1 \hat{y}_i = \Delta \hat{y}_i = \hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}$;
- ❑ pro r -tou zpětnou diferenci platí $\Delta^r \hat{y}_i = \Delta^{r-1} \hat{y}_i - \Delta^{r-1} \hat{y}_{i-1}$;
- ❑ obecně lze také zapsat pomocí binomické formule

$$\Delta^r \hat{y}_i = \binom{r}{0} \hat{y}_i - \binom{r}{1} \hat{y}_{i-1} + \cdots + (-1)^r \binom{r}{r} \hat{y}_{i-r},$$

Whittacker-Hendersonová metoda

- ❑ W-H metoda nepředpokládá **žádný konkrétny tvar** prokladané křivky;
- ❑ symbol $\Delta^r \hat{y}_i$ označuje **rekurzivnou r -tou zpětnou diferencii** posloupnosti \hat{y}_i ;
- ❑ obecně platí, že $\Delta^0 \hat{y}_i = \hat{y}_i$ a $\Delta^1 \hat{y}_i = \Delta \hat{y}_i = \hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}$;
- ❑ pro r -tou zpětnou diferencii platí $\Delta^r \hat{y}_i = \Delta^{r-1} \hat{y}_i - \Delta^{r-1} \hat{y}_{i-1}$;
- ❑ obecně lze také zapsat pomocí binomické formule

$$\Delta^r \hat{y}_i = \binom{r}{0} \hat{y}_i - \binom{r}{1} \hat{y}_{i-1} + \cdots + (-1)^r \binom{r}{r} \hat{y}_{i-r},$$

IDEA:

Rekuzivní zpětná diference je diskrétné zobecnění pojmu derivace. Základnou myšlenkou je penalizovat příliš velké rozdíly v dané r -té diferencii. Napr. pro $r = 1$ penalizujeme příliš velké rozdíly v první diferencii, t.j. pro $\lambda \rightarrow \infty$ dostaneme vyhlazení ve tvaru přímky.

Whittacker-Hendersonová metoda

- kritérium $M(\hat{\mathbf{y}})$ lze zapsát aj v maticovém tvaru jako

$$M(\hat{\mathbf{y}}) = (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^\top (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) + \lambda \cdot \hat{\mathbf{y}}^\top \mathbb{K}^\top \mathbb{K} \hat{\mathbf{y}};$$

- matice \mathbb{K} je typu $(n - r) \times n$ a ma tvar

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} (-1)^r & \dots & -\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & (-1)^r & \dots & -\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & (-1)^r & \dots & -\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} & 1 \end{pmatrix}$$

- derivováním podle $\hat{\mathbf{y}}$ dostaneme soustavu normálních rovnic

$$\nabla_{\hat{\mathbf{y}}} M(\hat{\mathbf{y}}) = \left(\frac{\partial M(\hat{\mathbf{y}})}{\partial \hat{y}_1}, \dots, \frac{\partial M(\hat{\mathbf{y}})}{\partial \hat{y}_n} \right) = 2\mathbf{y} - 2\hat{\mathbf{y}} + 2\lambda \mathbb{K}^\top \mathbb{K} \hat{\mathbf{y}}$$

- riešime soustavu rovnic $\nabla_{\hat{\mathbf{y}}} M(\hat{\mathbf{y}}) = 0 \implies$ řešení ve tvaru

$$\hat{\mathbf{y}} = (\mathbb{I} + \lambda \mathbb{K}^\top \mathbb{K})^{-1} \mathbf{y};$$

Zhrnutí

- ❑ Data jako posloupnost **deterministických** nebo **stochastických** veličiny;
- ❑ **Různé metody vyhlazování dat** – prokládání vhodnou hladkou křivkou;
 - ❑ Parametrické metody
(jednoduché, ale málo flexibilné)
 - ❑ Semiparametrické metody
(vyrovnání jako lineární kombinace funkcí báze, poměrně dobrá flexibilita)
 - ❑ Neparametrické metody
(bez omezení na tvar prokládané křivky, nelze ale vyjádřit explicitně)
- ❑ **V některých případech lze dokonce konstruovat predikci do budoucnosti;**
(není vhodné používat na predikci o moc kroků dopředu...)
- ❑ **Whitttacker-Henderson - regularizační neparametrický postup;**
(vhodnou volbou $\lambda > 0$ a $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ lze dosáhnout požadovaný tvar)
- ❑ **Při vyhlazování dat pamatovat na vztah mezi vychýlením a variabilitou;**
(přílišné vyhlazení \equiv malá variabilita a příliš velké odchýlky | vice versa)

Kapitola 2

Diferenciální rovnice a modely růstu

Modely růstu – motivace

Modely velikosti populace, kde velikost změny (růstu/poklesu) závisí na aktuálním stavu (velikosti) populace.

(obecně řečeno, jedná se o model dynamiky nějaké populace)

Široké uplatnění těchto modelů v ...

- ❑ **mikrológii, virológii, či biológii**
(pandemický vývoj, napr. Covid-19 ...)
- ❑ **fyzika, chémia, alebo mechanika**
(štiepenie, nukleárne reakcie, lavíny, ...)
- ❑ **mikro/makro ekonómia a finance**
(pyramidové schémy, modely kapitálu, ...)
- ❑ **IT, informatika, technika**
(výpočetná sila a zložitost, singularity, ...)

Modely růstu – formálně

- jedná se **víceparametrický deterministický (nelineární) model** pro modelování růstu (stavu) nějaké populace (počet obyvatelstva, zásoby nějakého statku, objem komodity, atd') v závislosti na velikosti;
- zaužívané značení: $y(t) \geq 0$ jako stav (velikost) populace v čase $t \in \mathbb{R}$;
- model určen pomocí **deferenciální rovnice**, čo umožňuje vyjádřit **závislost rychlosti růstu na velikosti populace** v čase $t \in \mathbb{R}$;
- **IDEA**: očekáváme, že populace by měla růst rychleji, když je velká, a naopak zase pomaleji, když je malá;
- diferenciální rovnice často v tvaru, který v určitém zmyslu modeluje **lineární závislost růstu na velikosti**:

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \cdot g\left(\frac{y}{k}\right)$$

kde $y \equiv y(t)$ je funkce $t \in \mathbb{R}$ a $a, k > 0$ jsou **neznáme parametry**;

Korekce lineární závislosti růstu na velikosti

Funkce $g(\cdot)$ v zápisu diferenciální rovnice se používá ke korekci lineární závislosti růstu na velikosti populace – bez tehle korekce je totiž většina modelů praktický nesmyslných;

- **Volba $g(x) = 1$: Klasický model exponenciálního růstu**

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \implies \text{řešení } y(t) = be^{at};$$

→ pro nějaké parametry $a, b > 0$;

- **Volba $g(x) = 1 - x$: Model logistického růstu**

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{k}\right) \implies \text{řešení } y(t) = \frac{k}{1 + be^{-at}};$$

→ pro nějaké parametry $a, b, k > 0$;

- **Volba $g(x) = -\log x$: Model Gomertzovej křivky**

$$\frac{dy}{dt} = -a \cdot y \cdot \log\left(\frac{y}{k}\right) \implies \text{řešení } y(t) = k \cdot \exp\{be^{-at}\};$$

→ pro nějaké parametry $a, b, k > 0$;

Modely růstu

Príklad

Uvažujte jednoduchý model exponenciálního růstu. Ukážte, že funkce

$$y(t) = be^{at}$$

je skutečně řešením diferenciální rovnice $dy/dt = ay$.

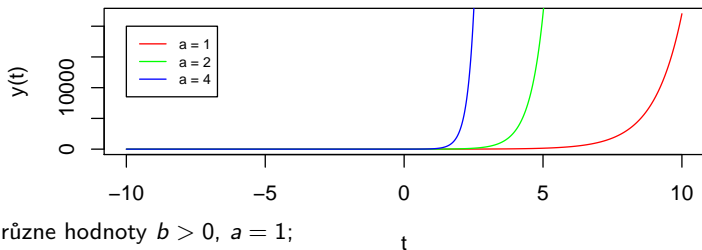
Príklad

Uvažujte model logistického růstu pro nějaké obecné $k > 0$.

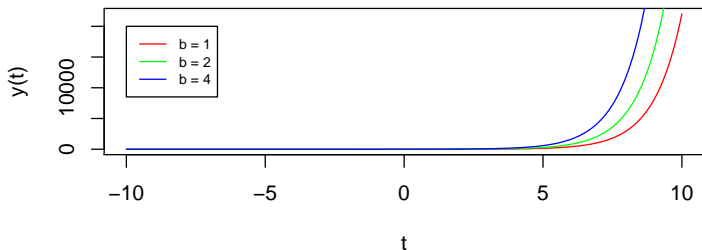
- ukážte, že funkce $y(t) = \frac{k}{1+be^{-at}}$ je řešením diferenciální rovnice $dy/dt = ay(1 - y/k)$
- najděte inflexní bod a dokážte, že křivka logistického růstu je symetrická kolem tohoto bodu;

Modely exponenciálního růstu

- různé hodnoty $a > 0$, $b = 1$;

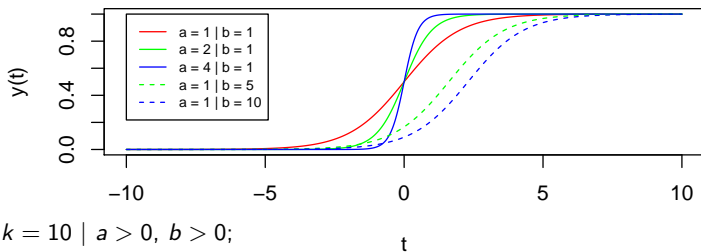


- různé hodnoty $b > 0$, $a = 1$;

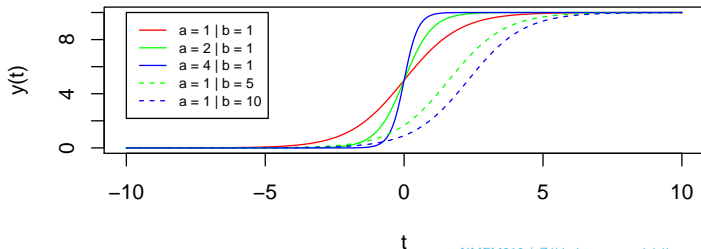


Modely logistického růstu

□ $k = 1 \mid a > 0, b > 0;$

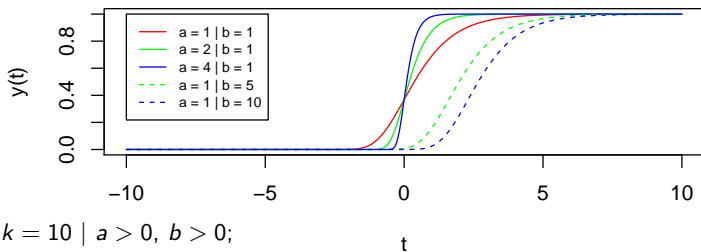


□ $k = 10 \mid a > 0, b > 0;$

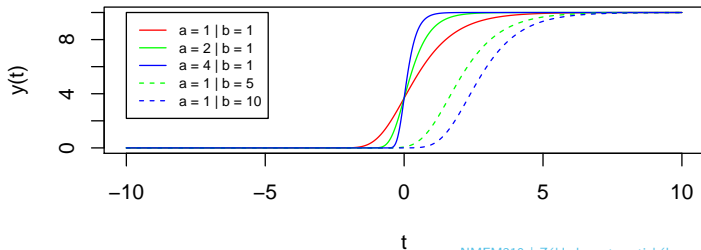


Modely Gompertzové křivky

□ $k = 1 \mid a > 0, b > 0;$



□ $k = 10 \mid a > 0, b > 0;$



Modely růstu – aplikace

❑ Model exponenciálního růstu

- ❑ model neomezeného růstu při neomezených zdrojích;
- ❑ aplikovatelný pouze v krátkodobem časovém horizontu;
- ❑ v praxi většinou nedostupnost zdrojů při určitém stavu populace;

❑ Model logistického růstu

- ❑ model s korekcí pro saturovanou hodnotu – parametr $k > 0$;
- ❑ inflexní bod pro $t_0 = \frac{\ln b}{a}$, kde $y(t_0) = k/2$ (symetrie vzhledem k t_0);
- ❑ pro celkový stav populace vždy platí, že $0 < y(t) < k$ pro $t \in \mathbb{R}$;
- ❑ hodnota $(1 - y/k)$ omezuje nové přírůstky pro velkou populaci (málo zdrojů) – jedná se o tzv. sigmoidální křivku (sigmoid function);

❑ Gompertzová křivka

- ❑ zbecněná sigmoidální křivka (prudký nárůst, pomalejší saturace);
- ❑ inflexní bod pro $t \in \mathbb{R}$, kde $y(t) = k/e$ (ale není symetrická);
- ❑ častá aplikace např. pro tabulky úmrtnosti, růst nádorů, počet mobilních telefonů v populaci, a pod.;

Odhady parametrů pro modely růstu

Základný problém spočívá v tom, že funkce, které chceme prokládat daty, nejsou lineární funkcí hledaných (neznámých) parametrů – koeficientů.

Nelze proto přímo aplikovat metodu nejmenších čtverců.

Řešení:

- ❑ preparametrizování modelu do lineárního tvaru;
- ❑ aproximace modelu a aplikovat iterativní postupy;
- ❑ numerické (aproximativní) řešení pomocí počítačů;

Odhady parametrů pro modely růstu

Základný problém spočíva v tom, že funkce, které chceme prokládat daty, nejsou lineární funkcí hledaných (neznámých) parametrů – koeficientů.

Nelze proto přímo aplikovat metodu nejmenších čtverců.

Řešení:

- preparametrizování modelu do lineárního tvaru;
- aproximace modelu a aplikovat iterativní postupy;
- numerické (aproximativní) řešení pomocí počítačů;

Aplikace na data:

$$\begin{array}{c|cccccc} \mathbf{t} & t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_n \\ \mathbf{y} & y(t_1) & y(t_2) & y(t_3) & \dots & y(t_n) \end{array}$$

Odhad parametrů pro exponenciální růst

- základní diferenciální rovnice a příslušné řešení:

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \quad \text{a} \quad y(t) = be^{at},$$

pro nějaké neznáme parametry $a, b > 0$;

- rovnici lze logaritmovat a vyjádřit ve tvaru

$$\log(y(t)) = \log(b) + at;$$

- následně lze metodu nejmenších čtverců aplikovat na data

$$(t_1, \log(y(t_1)))^T, \dots, (t_n, \log(y(t_n)))^T,$$

a odhadnout neznáme parametry $a, b \in \mathbb{R}$

Samostatný úkol

Uvažujte jednoduchý exponenciální růst a najděte řešení pro odhad parametrů $\log(b) \in \mathbb{R}$ a $a > 0$. Vyjádřete příslušnou matici \mathbb{F} a spočtěte také projekční matici \mathbb{H} . Najděte vhodné odhady pro $a, b > 0$.

Odhad parametrů pro logistický růst

- základní diferenciální rovnice a příslušné řešení:

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{k}\right) \quad \text{a} \quad y(t) = \frac{k}{1 + be^{-at}};$$

pro nějaké neznáme parametry $a, b > 0$;

- diferenciální rovnici lze aproximovat pomocí diferenční rovnice

$$\frac{\Delta y_{t_i}}{\Delta t_i} = a y_{t_i} \left(1 - \frac{y_{t_i}}{k}\right)$$

- následně lze metodu nejmenších čtverců aplikovat na data

$$\left(y_{t_2}, \frac{\Delta y_{t_2}}{\Delta t_2} y_{t_2}\right)^\top, \dots, \left(y_{t_n}, \frac{\Delta y_{t_n}}{\Delta t_n} y_{t_n}\right)^\top; \quad (3)$$

pro parametry a a a/k . Parametr $b > 0$ pak vyjádřit z rovnice pro řešení.

Samostatný úkol

Uvažujte jednoduchý logistický růst a nájděte řešení pro odhad parametrů $a, k > 0$. Nájděte také vhodný odhad pro parametr $b > 0$.

Vylepšení odhadů pro logistický růst

Odhady parametrů $a, b, k > 0$ získané v předchozím kroku jsou hodně hrubé jelikož jsme diferenciální rovnici diskretizovali – t.j. aproximovali pomocí diferenční rovnice. Získané odhady ale lze vylepšit – opět pomocí metody nejmenších čtverců.

- ☐ řešení diferenciální rovnice lze také parametrizovat jako

$$y(t) = \frac{k}{1 + be^{-at}} = \frac{d}{c + e^{-(\hat{a}_1 + \epsilon)t}},$$

pro $a = \hat{a}_1 + \epsilon$, $b = \frac{1}{c}$ a $k = \frac{d}{c}$ (kde \hat{a}_1 je odhad z předchozího kroku).

- ☐ pro hodnoty ϵt hodně malé, lze použít Taylorov rozvoj

$$e^{-\epsilon t} \approx 1 - \epsilon t;$$

- ☐ následně dostaneme aproximaci pro y_{t_i} ve tvaru

$$y_{t_i} \approx \frac{d}{c + e^{-\hat{a}_1 t_i} (1 - \epsilon t_i)}, \quad i = 1, \dots, n;$$

- ☐ metodu nejmenších čtverců následně aplikovat na model

$$y_{t_i} e^{-\hat{a}_1 t_i} \approx d - c y_{t_i} + \epsilon t_i y_{t_i} e^{-\hat{a}_1 t_i}, \quad i = 1, \dots, n;$$

Vylepšení odhadů pro logistický růst

Samostatný úkol

Uvažujte logistický model růstu a navrhněte, jak by měla vypadat matice \mathbb{F} pro vylepšení odhadu parametrů $a, b, k > 0$ pomoci nové parametrizace

$$y(t) = \frac{k}{1 + be^{-at}} = \frac{d}{c + e^{-(\hat{a}_1 + \epsilon)t}},$$

pro $a = \hat{a}_1 + \epsilon$, $b = \frac{1}{c}$ a $k = \frac{d}{c}$, kde \hat{a}_1 je odhad získaný metodou nejmenších čtverců, aplikovaných na data v (3). Nайдěte soustavu lineárních rovnic pro odhad neznámých parametrů d, c a ϵ .

- ❑ dosazením odhadů \hat{d} , \hat{c} a $\hat{\epsilon}$ do vyjádření původních parametrů a, b a k dostaneme vylepšené odhady \hat{a} , \hat{b} a \hat{k} ;
- ❑ tenhle postup lze iterativně opakovat a získat ještě přesnější odhady;

Newton-Raphson: Algoritmus

IDEA: Odhad neznámých parametrů přímo pomocí minimalizace součtu čtverců – hledáme ale **argument minima nelineární funkce**.

Napr. pro logistickou křivku řešíme

$$S(a, b, k) = \underset{a, b, k > 0}{\text{Argmin}} \sum_{i=1}^n \left(y_{t_i} - \frac{k}{1 + be^{-at_i}} \right)^2,$$

kde předpokládáme, že máme pozorování y_{t_1}, \dots, y_{t_n} v časech t_1, \dots, t_n ;

- předpokládáme, že existují nějaké **počáteční hodnoty** $a_0, b_0, k_0 > 0$, které jsou dostatečně blízko skutečným (neznámým) hodnotám, pro které je dosaženo minimum;
- **Newton-Raphsonová metoda** pak spočívá v aproximaci $S(a, b, k)$ pomocí Taylorově řady v okolí bodu $(a_0, b_0, k_0)^T$;
- opakovaným postupem – **iteracemi** – získáme finální řešení;
(finální řešení je pouze aproximace skutečného řešení... dokonalost aproximace závisí od volby počátečních hodnot $a_0, b_0, k_0 > 0$ a také od celkového počtu uskutečněných iterací)

Newton-Raphson: Teoretické odvození

- Taylorov rozvoj pro $S(a, b, k)$ v bodě (a_0, b_0, k_0) :

$$\begin{aligned}
 S(a, b, k) &= S(a_0, b_0, k_0) + \nabla S(a_0, b_0, k_0)^\top (a - a_0, b - b_0, k - k_0)^\top \\
 &\quad + \frac{1}{2} (a - a_0, b - b_0, k - k_0) \nabla^2 S(a_0, b_0, k_0) (a - a_0, b - b_0, k - k_0)^\top \\
 &\quad + R(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{k});
 \end{aligned}$$

- Hledáme bod, pro který $\nabla S(a, b, k) = 0 \Rightarrow$ obe strany derivujeme a položíme rovné hodnotě $(0, 0, 0)^\top$;
- Po úpravě dostaneme rovnici

$$\nabla S(a_0, b_0, k_0) = (-1) \cdot \nabla^2 S(a_0, b_0, k_0) (a - a_0, b - b_0, k - k_0)^\top$$

a řešíme jako soustavu rovnic pro neznámé parametry $a, b, k \in \mathbb{R}$;

- Pro iterovaný postup definujeme obecně krok $\ell \in \mathbb{N}$ následovně:

$$\nabla S(a_{\ell-1}, b_{\ell-1}, k_{\ell-1}) = -\nabla^2 S(a_{\ell-1}, b_{\ell-1}, k_{\ell-1}) (a_\ell - a_{\ell-1}, b_\ell - b_{\ell-1}, k_\ell - k_{\ell-1})^\top;$$

- postup opakujeme, až kým nedosáhneme požadovanou přesnost, t.j. $|a_\ell - a_{\ell-1}| < \epsilon$, $|b_\ell - b_{\ell-1}| < \epsilon$ a $|k_\ell - k_{\ell-1}| < \epsilon$, pro nějaké malé $\epsilon > 0$;

Příklad: Růst českého strakatého skota

Príklad

Modelování dynamiky růstu hospodářských zvířat

- ❑ výhodné z ekonomického i hospodářského hlediska;
- ❑ chov na maso: rychlý růst (fiziologický), vysoká hmotnost;
- ❑ jednoduché modelovat v krátkodobem horizontu;
- ❑ nutné použít několik modelů od narození až po dospělost;
- ❑ býky českého strakatého skota mezi 30 až 1470 dnů:

$$y(t) = 926.07 \exp\{-2.548e^{-0.0032t}\} \quad (\text{Nešetřilová, ČZU});$$

- ❑ odhady parametrů $a, b, k > 0$ pomocí Newton-Raphson metody;
- ❑ později vylepšení pomocí modelu dvou logistických křivek;

Obecné modely růstu populace

- Dynamika populace lineárně závislá na velikosti populace:

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \cdot g\left(\frac{y}{k}\right)$$

- Dynamika populace v obecném modelu:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t)$$

Funkcia $f(y, t)$ může obecně představovat ľubovolnú známú/neznámú, parametricku/neparametricku, lineárnu/nelineárnu funkciu, ktorá vyjadruje rýchlosť rastu populácie v čase t , v závislosti na veľkosti populácie y .

Príklad: Modelovanie Covid-19 pandémie v USA

- ❑ **Data:** analýza na základe denných prírastkov novo-nakazených v Spojených štátoch (US) v čase od 22.Januára 2020 do 6.Apríla 2020;
- ❑ **Logistický (viac- parametrický) model rastu populácie infikovaných:**

$$y(t) = y_{min} + \frac{y_{max} - y_{min}}{(1 + e^{-R(t-t_{mid})})^\alpha}$$

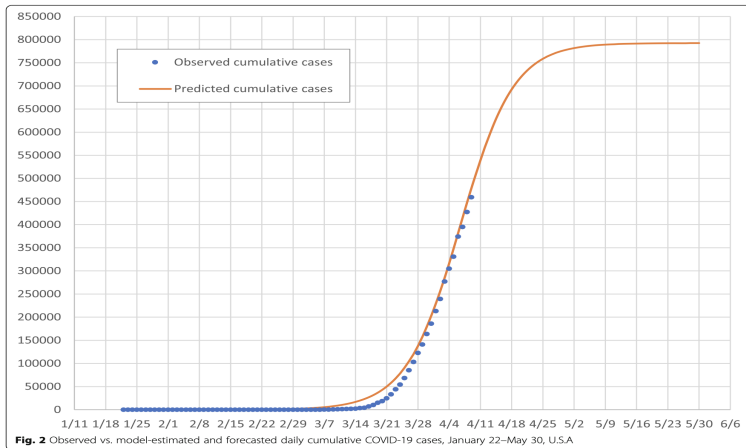
- ❑ $y(t)$ celkové počty nakazených američanov v jednotlivých dňoch;
 - ❑ y_{min}, y_{max} minimálny a maximálny počet nakazených v US počas pandémie;
 - ❑ R miera denného exponenciálneho nárastu (číslo R);
 - ❑ t_{mid} odhadnutý vrchol pandémie (stabilné denné prírastky);
 - ❑ α parameter asymetrie vzhľadom k vrcholu pandémie t_{mid} ;
- ❑ **Denný nárast nových prípadov—prvá derivácia $y'(t)$;**
(vyjadrením prvej derivácie dostaneme rovnicu pre dynamiku)

Chen et al. (2020). Reconstructing and forecasting the COVID-19 epidemic in the United States using a 5-parameter logistic growth model. *Global Health Research and Policy*, 5:25. DOI: 10.1186/s41256-020-00152-5

Covid-19 pandémia – celková predikcia

Data Usage	Days	Date	Reported Cases		Predicted		Under-reported
			Total	Daily	Daily	Total	
Reconstruction	54	3/15/2020	3487	1253	3108	19,781	16,294
	55	3/16/2020	4226	739	3623	23,141	18,915
	56	3/17/2020	7038	2812	4218	27,054	20,016
	57	3/18/2020	10,442	3404	4902	31,606	21,164
	58	3/19/2020	15,219	4777	5687	36,892	21,673
	59	3/20/2020	18,747	3528	6584	43,019	24,272
Fitting	60	3/21/2020	24,583	5836	7603	50,102	25,519
	61	3/22/2020	33,404	8821	8755	58,269	24,865
	62	3/23/2020	44,183	10,779	10,047	67,658	23,475
	63	3/24/2020	54,453	10,270	11,485	78,411	23,958
	64	3/25/2020	68,440	13,987	13,070	90,676	22,236
	65	3/26/2020	85,356	16,916	14,797	104,598	19,242
	66	3/27/2020	103,321	17,965	16,656	120,315	16,994
	67	3/28/2020	122,653	19,332	18,624	137,947	15,294
	68	3/29/2020	140,904	18,251	20,670	157,589	16,685
	69	3/30/2020	163,539	22,635	22,750	179,298	15,759
	70	3/31/2020	186,101	22,562	24,810	203,082	16,981
	71	4/1/2020	213,144	27,043	26,784	228,889	15,745
	72	4/2/2020	239,279	26,135	28,600	256,597	17,318
	73	4/3/2020	277,205	37,926	30,180	286,010	8805
	74	4/4/2020	304,826	27,621	31,453	316,855	12,029
Forecast	75	4/5/2020	330,891	26,065	32,352	348,791	17,900
	76	4/6/2020	374,329	43,438	32,830	381,419	7090
	77	4/7/2020	395,011	20,682	32,860	414,302	19,291
	78	4/8/2020	427,460	32,449	32,436	446,987	19,527
	79	4/9/2020	459,165	31,705	31,582	479,030	19,865
	80	4/10/2020	492,416	33,251	30,340	510,021	17,605

Covid-19 pandémia – celková predikcia



- ❑ Celkový predikovaný počet Covid-19 prípadov v US v priebehu celej pandémie: **792 548**;
- ❑ Aktuálny celkový počet Covid-19 prípadov v US k dnešnému dňu **29.5 mil.**;

To conclude...

- ❑ **Diferencialní modely a modely růstu** jako vhodné a užitečné nástroje pro modelování růstu populací v závislosti na jejich velikosti.
- ❑ Jedná sa o **nelineární parametrické modely**, přičemž na odhad neznámých parametrů nelze přímo aplikovat metodu nejmenších čtverců.
 - ❑ **Model exponenciálního růstu** – jednoduchý model ale aplikovatelný pouze v krátkodobem časovém horizontu (předpoklad neomezeného (lineárního) růstů při neomezených zdrojích);
 - ❑ **Model logistického růstu** – modifikace předchozího modelu pomocí dodatečného parametru – tzv. saturační hladiny pro maximální úroveň modelované populace;
 - ❑ **Model Gompertzovej křivky** – rozšíření modelu logistického růstu pro případy s nesymetickým počátečním nárůstem a konečnou saturací – model asymetrický kolem inflexního bodu;
- ❑ **Odhady neznámých parametrů** v těchto modelech pomocí iterativních postupů, aproximací, nebo přeparametrizování původních rovnic, tak aby bylo možné aplikovat **metodu nejmenších čtverců**;
- ❑ **Nutné používat** premyslene a veľmi opatrne hlavne vzhľadom k predikciám.

Kapitola 3

Systemy Lineární Regulace

Model lineární regulace

- ❑ uvažujeme **deterministické data** (posloupnost) $\{y_t, u_t\}_{t=0}^{\infty}$;
- ❑ definujeme **model lineární regulace**, který vstupné data – t.j. posloupnost u_0, u_1, u_2, \dots , převádí na výstupné data – posloupnost y_0, y_1, y_2, \dots , a to pomocí specifické **lineární transformace** – tzv. **lineární regulace**;
- ❑ **model lineární regulace** lze formálně zapsat jako

$$y_t = \sum_{j=0}^t h_j u_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} h_j u_{t-j},$$

pro $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, nebo $t \in \mathbb{Z}$ ak navíc $y_{-j} = u_{-j} = 0$ pro $j \in \mathbb{N}$;
(t.j. hodnoty pro záporné indexy sú dodefinované nulou)

- ❑ neznáme **parametre** h_j pro $j = 0, 1, \dots$, určují konkrétní tvar výsledného modelu lineární regulace;
- ❑ vliv posloupnosti u_0, u_1, u_2, \dots na y_0, y_1, y_2, \dots nemusí být přímý, ale napr. prostřednictvím dalších stavov systému – tzv. **lineární soustavy**;

Příklad 1: Model jednotkového impulsu

Definice: Model jednotkového impulsu

Vstupní posloupnost ve tvaru $u_0 = 1, u_1 = 0, u_2 = 0, \dots$, nazýváme **jednotkový impuls**. Odezvou systému lineární regulace na jednotkový impuls (vstup) je pak posloupnost h_0, h_1, h_2, \dots , (výstup) která se nazývá **impulzní charakteristika** soustavy lineární regulace.

Samostatný úkol

Z definice modelu lineární regulace lze okamžitě ověřit, že platí:

- pro $t = 0$: $y_0 = h_0 u_0 = h_0$;
- pro $t = 1$: $y_1 = h_0 u_1 + h_1 u_0 = h_1$;
- pro $t = 2$: $y_2 = h_0 u_2 + h_1 u_1 + h_2 u_0 = h_2$;
- pro $t \in \mathbb{N}$: $y_t = h_0 u_t + \dots + h_t u_0 = h_t$;

Příklad 2: Model jednotkového skoku

Definice: Model jednotkového skoku

Vstupní posloupnost ve tvaru $u_t = 1$ pro $t = 0, 1, 2, \dots$ nazýváme **jednotkový skok** (t.j. v čase $t = 0$ se hodnoty u_t změní z 0 na 1). Odezvou systému lineární regulace na jednotkový skok je pak posloupnost, která se nazývá **přechodová charakteristika** soustavy lineární regulace. Navíc platí, že

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j u_{t-j} = \sum_{j=0}^t h_j u_{t-j} = \sum_{j=0}^t h_j.$$

K analýze lineárních soustav se obecně hodí používat tzv. vytvořující funkce pro číselné posloupnosti a speciálně tzv. **z-transformace**.

Z-transformace

Z-transformace se obecně používá pro vyjádření signálu s diskrétním časem (t.j. posloupnosti reálných, nebo komplexních čísel) pomocí reprezentace v rámci **komplexnej frekvenčnej domény**. Jedná se o diskrétní verzi Laplaceovy transformace.

Definice: Z-transformace (jednostranná)

Pro libovolnou posloupnost reálných čísel $\{a_k; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ definujeme její **z-transformaci** jako funkci

$$A(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{-j}, \quad \text{obecně pro libovolné } z \in \mathbb{C}.$$

- V teorii se také používá tzv. **bilaterální (oboustranná) z-transformace**;
Pro oboustrannou z-transformaci platí $A(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^{-j}$, pro $z \in \mathbb{C}$;

Definice značení pro z-transformaci

Samostatný úkol (opakování)

- ❑ Nekonečná řada $A(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{-j}$ konverguje pro $|z| > z_0$ a diverguje pro $|z| < z_0$, pro nějaké $z_0 \in [0, \infty]$;
 - ❑ Množina $\{z \in \mathbb{C}; |A(z)| < \infty\}$ se často v literatuře značí jako ROC (tzv. "Region Of Convergence");
 - ❑ na kružnici $|z| = z_0$ se řada může chovat libovolně (konvergovat pro některé body a divergovat pro jiné);
-
- ❑ pro **posloupnost vstupů** $\{u_t; t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ budeme značit příslušnou z-transformaci jako funkci $U(z)$ (t.j. $U(z) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j z^{-j}$);
 - ❑ pro **posloupnost výstupů** $\{y_t; t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ budeme značit příslušnou z-transformaci jako funkci $Y(z)$ (t.j. $Y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} y_j z^{-j}$);
 - ❑ pro **impulzní charakteristiku** $\{h_t; t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ budeme značit příslušnou z-transformaci jako funkci $H(z)$ (t.j. $H(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^{-j}$);

Impulzní přenosová funkce soustavy

Definice: Impulzní přenosová funkce

Funkce

$$H(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^{-j}, \quad \text{pro } z \in \mathbb{C}$$

se nazývá **impulzní přenosová funkce (lineární) soustavy**.

Samostatný úkol

Ukážte, že pro impulzní přenosovou funkci soustavy platí, že

$$Y(z) = H(z) \cdot U(z),$$

pro taková $z \in \mathbb{C}$, že $H(z)$ a $U(z)$ konvergují.

Impulzní přenosová funkce soustavy

Definice: Impulzní přenosová funkce

Funkce

$$H(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^{-j}, \quad \text{pro } z \in \mathbb{C}$$

se nazývá **impulzní přenosová funkce (lineární) soustavy**.

Samostatný úkol

Ukážte, že pro impulzní přenosovou funkci soustavy platí, že

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} y_j z^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} h_{\ell} u_{j-\ell} \right) z^{-j} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h_{\ell} z^{-\ell} \left(\sum_{j=0}^{\infty} u_{j-\ell} z^{-(j-\ell)} \right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} h_{\ell} z^{-\ell} \cdot \sum_{j=-\ell}^{\infty} u_j z^{-j} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h_{\ell} z^{-\ell} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} u_j z^{-j} = H(z) \cdot U(z), \end{aligned}$$

pro taková $z \in \mathbb{C}$, že $H(z)$ a $U(z)$ konvergují.

Aplikace: Bakaláři na univerzitě v Austrálii

Príklad

Chceme zjišťovat závislost počtu bakalářských promoci na počtu studentů zapsaných v předchozích letech do prvního ročníka.

- ❑ počet studentů zapsaných do studia v roce t je u_t (vstup);
(do prvního ročníku teda nastoupí v roce $t + 1$)
- ❑ počet studentů, který v roce t ukončí stúdium je y_t (výstup);

Aplikace: Bakaláři na univerzitě v Austrálii

Príklad

Chceme zjišťovat závislost počtu bakalářských promoci na počtu studentů zapsaných v předchozích letech do prvního ročníka.

- ❑ počet studentů zapsaných do studia v roce t je u_t (vstup); (do prvního ročníku teda nastoupí v roce $t + 1$)
- ❑ počet studentů, který v roce t ukončí studium je y_t (výstup);
- ❑ celkový systém studia je ale omnoho komplikovanější a mezi počtem zapísaných študentov (hodnotou u_t) a počtom promovovaných študentov (hodnota y_t) existuje niekoľko ďalších "medzistavov systému" (t.j. jednotlivé ročníky štúdia);
- ❑ po prvom ročníku študent buď pokračuje ve štúdiu v druhom ročníku, prípadne prvý ročník opakuje (analogicky aj u nasledujúcich ročníkov);
- ❑ jak tieto stavy zahrnúť do celkového systému?

Aplikace: Bakaláři na univerzitě v Austrálii

Príklad

- ❑ bakalářský titul lze na austrálskej univerzitě získat ve třetím roce studia (tzv. Pass Degree), nebo pokračovat ve čtvrtém roce a získat vyšší, tzv. Honours Degree;
- ❑ nechť počet studentů v i -tém ročníku v roce t je $x_t^{(i)}$ pro $i = 1, \dots, 4$;
- ❑ nechť podíl studentů, kteří přejdou z i -tého do j -tého ročníka v následujícím školním roce je p_{ij} a podíl studentů, kteří skončí v i -tém ročníku: q_i (odsledované/odhadnuté z historických dat);
- ❑ zřejmě platí, že $p_{ii} + p_{i(i+1)} + q_i = 1$ pro všechny $i = 1, 2, 3, 4$; (dodefinujeme $p_{45} = 0$, t.j. zo štvrtého ročníku sa už do piateho nelze dostat)

Příklad: Bakaláři na australských univerzitách

Príklad

- vzhľadom k systému bakalárskeho štúdia v Austrálii lze psát, že

$$y_t = c_3 x_t^{(3)} + c_4 x_t^{(4)},$$

pro $c_3, c_4 \in (0, 1)$ proporce studentu, kteří v třetím a čtvrtém roce promují (odsledované z historických dat).

- zřejmě také platí následující:

$$x_{t+1}^{(1)} = u_t + p_{11} x_t^{(1)}; \quad (4)$$

$$x_{t+1}^{(i+1)} = p_{i(i+1)} x_t^{(i)} + p_{(i+1)(i+1)} x_t^{(i+1)}, \quad \text{pro } i = 1, 2, 3; \quad (5)$$

- proporce odhadnuté pomoci historických statistik na univerzitách:

$$p_{12} = 0.61; p_{23} = 0.71; p_{34} = 0.16; c_3 = 0.81; c_4 = 0.91;$$

$$p_{11} = 0.15; p_{22} = 0.11; p_{33} = 0.10; p_{44} = 0.05;$$

Jak teda závisí $\{y_t\}$ na posloupnosti $\{u_t\}$?

Príklad

- Obecně můžeme pro $x_t^{(i)}$ psát, že

$$x_t^{(i)} = \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(i)} u_{t-j}, \quad (6)$$

kde $f_j^{(i)}$ je podíl těch, co se zapsali před j lety a teď jsou v i -tém ročníku a platí, že $f_0^{(i)} = 0$ pro všechny $i = 1, 2, 3, 4$;

- Přímým dosazením do (4) dostaneme

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(1)} u_{t+1-j} = u_t + p_{11} \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(1)} u_{t-j};$$

- Porovnáním koeficientu dostaneme:

$$f_1^{(1)} = 1, f_2^{(1)} = p_{11} f_1^{(1)} = p_{11}, f_3^{(1)} = p_{11} f_2^{(1)} = p_{11}^2, \dots, f_n^{(1)} = p_{11}^{n-1};$$

Příklad: Bakaláři na australských univerzitách

Príklad

- celkový počet studentů v prvním ročníku v roce t lze vyjádřit jako součet nově zapsaných a recyklovaných studentů:

$$x_t^{(1)} = u_{t-1} + \sum_{j=2}^{\infty} (p_{11})^{j-1} u_{t-j};$$

- Následně dosadíme (6) do výrazu (5):

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(i+1)} u_{t+1-j} = p_{i(i+1)} \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(i)} u_{t-j} + p_{(i+1)(i+1)} \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(i+1)} u_{t-j};$$

- Zjednodušení:** obecně předpokládáme, že $f_j^{(i)} = 0$, pro $j < i$;

Příklad: Bakaláři na australských univerzitách

Príklad

- Postupně dostaneme:

$$f_2^{(2)} = p_{12} f_1^{(1)} + p_{22} f_{12} = p_{12}$$

$$f_3^{(3)} = p_{23} f_2^{(2)} + p_{33} f_2^{(3)} = p_{23} f_2^{(2)} = p_{12} p_{23}$$

a obecně:

$$f_{j+1}^{(i+1)} = p_{i(i+1)} f_j^{(i)} + p_{(i+1)(i+1)} f_j^{(i+1)}$$

- Celkově pro y_t teda máme:

$$y_t = c_3 x_t^{(3)} + c_4 x_t^{(4)} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(c_3 f_j^{(3)} + c_4 f_j^{(4)} \right) u_{t-j}$$

$$= 0.3508 u_{t-3} + 0.1901 u_{t-4} + 0.0567 u_{t-5} + 0.0131 u_{t-6} + \dots$$

Maticový zápis | Stavový model

- Příklad o bakalářích na austrálských univerzitách lze také zapsat i pomocí alternativního maticového zápisu (více kompaktně);
- Necht' $\mathbf{x}_t = (x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(4)})^\top$ jsou **stavy systému**. Pak celý problém lze zapsat jako

$$\mathbf{x}_{t+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & p_{23} & p_{33} & 0 \\ 0 & 0 & p_{34} & p_{44} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}_t + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} u_t;$$

$$y_t = \underbrace{(0, 0, c_3, c_4)}_{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{x}_t + \underbrace{0}_{\mathbf{d}} \cdot u_t.$$

- Uveděný zápis definuje **lineární stavovou soustavu** v obecném tvaru; (vstupní posloupnost u_t , stavy systému \mathbf{x}_t , výstupná posloupnost y_t)

Stavový model – obecně

- ❑ uvažujeme systém, jehož stav lze popsat vektorem $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$;
- ❑ vývoj systému pak definujeme pomocí posloupnosti $\{\mathbf{x}_t; t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$;
- ❑ předpokládáme, že stav systému v čase $t = 0$ je $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^r$;
- ❑ následující stavy systému v čase $t + 1$ jsou popsány pomocí modelu

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbb{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b}u_t,$$

pro vstupí hodnotu u_t , nějakou čtvercovou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^r$;

- ❑ nepozorujeme ale přímo jednotlivé stavy systému, ale pouze výstup y_t ve tvaru

$$y_t = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_t + du_t,$$

opět pro vstup u_t , nějaký vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^r$ a skalár $d \in \mathbb{R}$;

- ❑ Jak získat z tohoto modelu přímou závislost výstupní posloupnosti y_t na vstupních datech u_t ve tvaru $y_t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j u_{t-j}$?

Obecný model systému lineární regulace

- namísto původního systému rovnic stačí uvažovat obecný zápis ve tvaru

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b}u_t$$
$$y_t = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_t + du_t$$

- pro posloupnost vstupů $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$ a výstupů $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$;
- pro (skryté/nepozorované) stavy systému – t.j. posloupnost $\{\mathbf{x}_t\}_{t=0}^{\infty}$;
- pro obecnou matici \mathbf{A} typu $r \times r$ která modeluje vztahy (závislosti) mezi jednotlivými stavy systému;
- vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^r$ (který modeluje závislost stavů systému na vstupnej posloupnosti) a vektor \mathbf{c} (který modeluje závislost výstupu na jednotlivých stavech systému);
- konstanta $d \in \mathbb{R}$, která modeluje přímou závislost výstupu na vstupných hodnotách;

Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

□ Modely lineární regulace

↪ posloupnost výstupných dat je vyjádřena jako specifická lineární funkce vstupných dat, t.j. $y_t = h_0 u_t + \dots + h_t u_0$, pro $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
a vhodně zvolené parametry $h_0, \dots, h_t \in \mathbb{R}$;

□ Z-transformace a impulzní přenosová funkce;

↪ impulzní přenosová funkce $Y(z) = H(z)U(z)$ jako nástroj pro reprezentaci výstupnej posloupnosti $\{y_t\}$ vo frekvenčnej doméně pomoci z-transformace vstupu $\{u_t\}$ a parametru $\{h_t\}$:
 $U(z) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j z^{-j}$ a $H(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^{-j}$;

□ Lineární soustavy;

↪ komplexný systém lineární regulace, kde mezi vstupní a výstupní posloupnosti existuje navíc množina stavov $\mathbf{x}_t = (x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(r)})^\top$;

□ Obecný zápis lineární soustavy

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbb{A} \mathbf{x}_t + \mathbf{b} u_t;$$

$$y_t = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_t + d \cdot u_t,$$

pro matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, vektory $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^r$ a skalár $d \in \mathbb{R}$;

Stavový model a stavové rovnice

- namísto původního systému rovnic máme obecný tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b}u_t \\ y_t &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_t + du_t \end{aligned}$$

- budeme uvažovat systém rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_{t+1} z^{-t} &= \mathbf{A} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_t z^{-t}}_{\mathbf{X}(z)} + \mathbf{b} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)} \\ \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} y_t z^{-t}}_{Y(z)} &= \mathbf{c}^\top \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_t z^{-t}}_{\mathbf{X}(z)} + d \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)} \end{aligned}$$

↪ kde jsme původní rovnice postupně vynásobili faktorem z^{-t} a pak sečetli přes všechny možné hodnoty pro $t = 0, 1, 2, \dots$;

Stavový model a stavové rovnice

- namísto původního systému rovnic máme obecný tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b}u_t \\ y_t &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_t + du_t \end{aligned}$$

- budeme uvažovat systém rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} z \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_{t+1} z^{-t-1} &= \mathbf{A} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_t z^{-t}}_{\mathbf{X}(z)} + \mathbf{b} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)} \\ \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} y_t z^{-t}}_{Y(z)} &= \mathbf{c}^\top \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_t z^{-t}}_{\mathbf{X}(z)} + d \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)} \end{aligned}$$

↪ kde jsme původní rovnice postupně vynásobili faktorem z^{-t} a pak sečetli přes všechny možné hodnoty pro $t = 0, 1, 2, \dots$;

Stavový model a stavové rovnice

- namísto původního systému rovnic máme obecný tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= \mathbb{A} \mathbf{x}_t + \mathbf{b} u_t \\ y_t &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_t + d u_t \end{aligned}$$

- budeme uvažovat systém rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} z \sum_{t=-1}^{\infty} \mathbf{x}_{t+1} z^{-t-1} &= \mathbb{A} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_t z^{-t}}_{\mathbf{X}(z)} + \mathbf{b} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)} \\ \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} y_t z^{-t}}_{Y(z)} &= \mathbf{c}^\top \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_t z^{-t}}_{\mathbf{X}(z)} + d \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)} \end{aligned}$$

↪ kde jsme původní rovnice postupně vynásobili faktorem z^{-t} a pak sečetli přes všechny možné hodnoty pro $t = 0, 1, 2, \dots$;

Stavový model a stavové rovnice

- namísto původního systému rovnic

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b}u_t \\ y_t &= \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_t + du_t\end{aligned}$$

- budeme uvažovat systém rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned}z \underbrace{\sum_{t=-1}^{\infty} \mathbf{x}_{t+1} z^{-t-1}}_{\mathbf{X}(z)} &= \mathbf{A} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_t z^{-t}}_{\mathbf{X}(z)} + \mathbf{b} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)} \\ \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} y_t z^{-t}}_{Y(z)} &= \mathbf{c}^\top \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}_t z^{-t} + d \sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}\end{aligned}$$

↪ kde jsme původní rovnice postupně vynásobili faktorem z^{-t} a pak sečetli přes všechny hodnoty pro $t = 0, 1, 2, \dots$;

Stavový model – řešení

- systém rovnic v maticovém zápisu:

$$z\mathbf{X}(z) = \mathbb{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{b}U(z)$$

$$Y(z) = \mathbf{c}^T \mathbf{X}(z) + dU(z)$$

- pokud existuje inverze $(z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}$, lze řešení pro $\mathbf{X}(z)$ získat jako:

$$z\mathbf{X}(z) - \mathbb{A}\mathbf{X}(z) = \mathbf{b}U(z)$$

$$(z\mathbb{I} - \mathbb{A})\mathbf{X}(z) = \mathbf{b}U(z)$$

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \cdot \mathbf{b}U(z)$$

- následně pak pro $Y(z)$ získáme řešení ve tvaru:

$$Y(z) = \mathbf{c}^T \mathbf{X}(z) + dU(z)$$

$$= [\mathbf{c}^T \cdot (z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbf{b} + d] U(z)$$

Přenosová funkce soustavy

Definice: Přenosová funkce soustavy

Funkce $H(z) = [\mathbf{c}^T \cdot (z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbf{b} + d]$ se nazývá **přenosová funkce soustavy** a platí, že

$$Y(z) = H(z)U(z),$$

pro každé $z \in \mathbb{C}$, pro které funkce $Y(z)$ a $U(z)$ konvergují.

Samostatný úkol

Ověřte, že pro libovolnou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, vektory $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^r$ a reální číslo $d \in \mathbb{R}$, takové, že inverzní matice $(z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}$ existuje, je funkce $H(z)$ funkcí z \mathbb{R} do \mathbb{R} , pro $z \in \mathbb{R}$ (tzn., ověřte příslušné rozměry v zápisu funkce H).

Přenosová funkce soustavy – vyjádření

Samostatný úkol

Přenosovou funkci soustavy lze také vyjádřit jako podíl dvou polynomů stupně nejvýše r . Platí, že

$$\begin{aligned} H(z) &= [\mathbf{c}^T \cdot (z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbf{b} + d] = \frac{\mathbf{c}^T \text{Adj}(z\mathbb{I} - \mathbb{A}) \mathbf{b} + d \cdot \det(z\mathbb{I} - \mathbb{A})}{\det(z\mathbb{I} - \mathbb{A})} \\ &= \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{n_0 z^r + \dots + n_r}{d_0 z^r + \dots + d_r} = \frac{n_0 + \dots + n_r z^{-r}}{d_0 + \dots + d_r z^{-r}}, \end{aligned}$$

kde $N(z)$ a $D(z)$ jsou příslušné z -transformace polynomů $n_0 + \dots + n_r z^{-r}$ a $d_0 + \dots + d_r z^{-r}$.

Příklad: Bakaláři na australských univerzitách

Prříklad

- pro model s bakaláři na australských univerzitách máme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & p_{23} & p_{33} & 0 \\ 0 & 0 & p_{34} & p_{44} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (1, 0, 0, 0)^T,$$
$$\mathbf{c} = (0, 0, c_3, c_4)^T, \quad b = 0;$$

- pro matici $(z\mathbb{I} - \mathbb{A})$ dostaneme vyjádření ve tvaru

$$(z\mathbb{I} - \mathbb{A}) = \begin{pmatrix} z - p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ -p_{12} & z - p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{23} & z - p_{33} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{34} & z - p_{44} \end{pmatrix};$$

- a pro determinant matice $(z\mathbb{I} - \mathbb{A})$ dostaneme

$$\det(z\mathbb{I} - \mathbb{A}) = (z - p_{11})(z - p_{22})(z - p_{33})(z - p_{44});$$

Příklad: Bakaláři na australských univerzitách

Príklad

- vzhledem k tvaru vektorů $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^r$ stačí pro adjungovanou matici spočítat prvky na pozici [3,1] a [4,1];
- pro přenosovou funkci soustavy pak přímo dostaneme

$$H(z) = \frac{c_3 p_{12} p_{23} (z - p_{44}) + c_3 p_{12} p_{23} p_{34}}{(z - p_{11})(z - p_{22})(z - p_{33})(z - p_{44})}$$

- pomocí přenosové funkce soustavy $H(z)$ dostaneme přímo vyjádření počtu promujících bakalářů v závislosti na počte zapsaných studentů (vyjadrenie prostredníctvom spektrálnej domény) – bez explicitnej prítomnosti jednotlivých (skrytých) stavov systému;

Obecný model

- v praxi je výhodnější uvažovat obecnou situaci, kdy výstup v čase t závisí také na předchozích výstupech, t.j., uvažujeme rovnici

$$d_0 y_t + \dots + d_r y_{t-r} = n_0 u_t + \dots + n_r u_{t-r}, \quad (7)$$

pro $d_0 \neq 0$;

- co lze také ekvivalentně přepsát jako

$$y_t = \underbrace{-\frac{d_1}{d_0} y_{t-1} - \dots - \frac{d_r}{d_0} y_{t-r}}_{\text{autoregresní část soustavy}} + \underbrace{\frac{n_0}{d_0} u_t + \dots + \frac{n_r}{d_0} u_{t-r}}_{\text{regresní část soustavy}}$$

pro $d_0 \neq 0$;

- délky pro autoregresní a regresní část mohou být obecně různě ($k \neq l$);
 \hookrightarrow některé koeficienty $d_1, \dots, d_k, n_0, \dots, n_l$ mohou být nulové;
- **IDEA:** Opět chceme najít vyjádření ve tvaru $y_t = \sum_{k=0}^{\infty} h_k y_{t-k}$;

Obecný model

- analogickým postupem (vynásobíme členem z^{-t} a sečteme přes všechny hodnoty t) dostaneme vyjádření (7) ve tvaru

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} (d_0 z^{-0} y_t z^{-t} + \dots + d_r z^{-r} y_{t-r} z^{-(t-r)}) \\ = \sum_{t=0}^{\infty} (n_0 z^0 u_t z^{-t} + \dots + n_r z^{-r} u_{t-r} z^{-(t-r)}) \end{aligned}$$

- díky zavedenému značení $u_{-t} = y_{-t} = 0$ pro $t \in \mathbb{N}$ můžeme psát

$$(d_0 z^{-0} + \dots + d_r z^{-r}) \sum_{t=0}^{\infty} y_t z^{-t} = (n_0 z^{-0} + \dots + n_r z^{-r}) \sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t};$$

- co lze také přepsat do obecného tvaru lineárního modelu jako

$$d(z^{-1})Y(z) = n(z^{-1})U(z)$$

pro $d(x) = d_0 + d_1 x + \dots + d_r x^r$ a $n(x) = n_0 + n_1 x + \dots + n_r x^r$;

Obecný model – některé vlastnosti

- obecně i zde platí, že $Y(z) = H(z)U(z)$, pro takové $z \in \mathbb{C}$, že $H(z)$ a $U(z)$ konvergují;
- dostazením tedy dostaneme, že

$$d(z^{-1})Y(z) = d(z^{-1})H(z)U(z) = n(z^{-1})U(z),$$

pro takové $z \in \mathbb{C}$, že pravá strana konverguje;

- pro přenosovou funkci soustavy máme

$$H(z) = \frac{n(z^{-1})}{d(z^{-1})} = \frac{n_0 + \dots + n_r z^{-r}}{d_0 + \dots + d_r z^{-r}};$$

- rovnice (7) se někdy zapisuje ve tvaru

$$(d_0 + \dots + d_r z^{-r})y_t = (n_0 + \dots + n_r z^{-r})u_t$$

nebo zjednodušeně $d(z^{-1})y_t = n(z^{-1})u_t$, kde z se interpretuje jako operátor posunutí, t.j., $zx_t = x_{t+1}$ a z^{-1} jako operátor zpětného posunutí, t.j., $z^{-1}x_t = x_{t-1}$;

Obecný model – příklad

Príklad

Předpokládáme jednoduchý model lineárního systému ve tvaru

$$y_{t+1} - ay_t = u_{t+1} \quad \text{resp.} \quad (1 - az^{-1})y_t = u_t.$$

- pro přenosovou funkci soustavy dostaneme

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a};$$

- Ize jednoduše rozvinout jako

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k};$$

- pro impulzní charakteristiku soustavy teda máme $y_t = h_t = a^t$;
- pro přechodovou charakteristiku soustavy máme $y_t = \sum_{k=0}^t h_k$;

Stabilita lineární soustavy

□ Stabilita soustavy

Jedná se o základní vlastnost, která se u lineárních soustav zkoumá.

Definice: Stabilita lineární soustavy

Řekneme, že lineární soustava je stabilní, pokud platí, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_t = 0. \quad (8)$$

- Alternativně lze říct, že odezva soustavy na jednotkový impuls se postupně vytrácí, pokud je soustava stabilní;
- (8) je zároveň nutná podmínka k tomu, aby přechodová charakteristika soustavy, tedy řada $\sum_{k=0}^{\infty} h_k$, byla konvergentní (ale ne postačující);

Stabilita lineární soustavy

Věta: Stabilita lineární soustavy

Soustava odpovídající obecnému modelu s přenosovou funkcí ve tvaru

$$H(z) = \frac{n(z^{-1})}{d(z^{-1})} = \frac{N(z)}{D(z)},$$

kde $N(z) = n_0z^r + \dots + n_rz^0$ a $D(z) = d_0z^r + \dots + d_rz^0$ jsou nesoudělné polynomy, je stabilní právě tehdy, když se všechny kořeny polynomu $D(z)$ nacházejí uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině.

Príklad

Jeli $h_k = a^k$, pak je soustava stabilní právě tehdy, když je $|a| < 1$.

Stabilita stavového modelu

- pro stavový model obecně platí: $D(z) = \det(z\mathbb{I} - \mathbb{A})$;
- kořeny $D(z)$ jsou právě všechna vlastní čísla matice \mathbb{A} a jsou v absolutní hodnotě menší než hodnota 1;

Príklad

Uvažujme nějakou stabilní soustavu a jednotkový skok $1 = u_0 = u_1 = \dots$, jako vstup. Pak pro přechodovou charakteristiku soustavy, posloupnost y_t dostaneme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^t h_k y_{t-k} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^t h_k = \sum_{k=0}^{\infty} h_k = y_{\infty}$$

a soustava se tedy v nekonečném horizontu ustálí na nové úrovni. Obecně tedy předpoklad $h_t \rightarrow 0$ není postačující k tomu, aby řada $\sum_{k=0}^{\infty} h_k$ byla konvergentní.

- Pokud jsou ale kořeny $D(z)$ v jednotkovém kruhu (podmínka stability), pak také řada $\sum_{k=0}^{\infty} h_k$ konverguje absolutně.

Příklad: Bakaláři na US univerzitách

Příklad

- ❑ kořeny polynomu $D(z) = \det(z\mathbb{I} - \mathbb{A})$ jsou jednoduché; (s násobností jedna): pravděpodobnosti $p_{11}, p_{22}, p_{33}, p_{44}$;
- ❑ stabilitu teda dostaneme pro $p_{ii} < 1$ pro $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$; (teda postup do vyššího ročníku, resp. ukončení studia v poslednom ročníku, je možný s kladnou pravděpodobností)

Zhrnutí a opakování

□ Modely lineární regulace & lineární soustavy

↪ modely, které posloupnost výstupných dat $\{y_t\}$ modelují jako lineární funkci vstupných dat $\{u_t\}$, t.j. $y_t = h_0 u_t + \dots + h_t u_0$, pro $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

□ Obecný maticový zápis systému se stavy $\mathbf{x}_t = (x_{t1}, \dots, x_{tr})^\top$

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbb{A} \mathbf{x}_t + \mathbf{b} u_t;$$

$$y_t = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_t + d \cdot u_t,$$

pro nějakou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, vektory $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^r$ a skalár $d \in \mathbb{R}$;

□ Řešení pomocí přenosové funkce soustavy

↪ cílem je najít vyjádření závislosti výstupné posloupnosti na vstupních datech prostřednictvím tzv. přenosové funkce soustavy: $Y(z) = H(z)U(z)$;

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} = [\mathbf{c}^\top \cdot (z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbf{b} + d] = N(z)/D(z)$$

□ Základní vlastnosti/charakteristiky lineární soustavy

□ impulzní charakteristika: $y_t \equiv h_t$ (stabilita pro $h_t \rightarrow 0$);

□ přechodová charakteristika: $y_t \equiv \sum_{k=0}^t h_k$ (ustálení pro $\sum_k^\infty h_k < \infty$);

Kapitola 4

Markovské řetězce

Deterministické data → Stochastické data

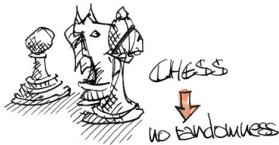
- v **deterministických modelech** je výstup (reakce) jednoznačně definovaný pomocí vstupu (akce) – napr. **model lineární soustavy**;
- v **stochastických modelech** je přítomen náhodný element, který přináší do výstupu jistou míru neurčitosti – napr. **náhodná procházka**;



vs.



AGENT'S ACTIONS
UNIQUELY DETERMINE
THE OUTCOME

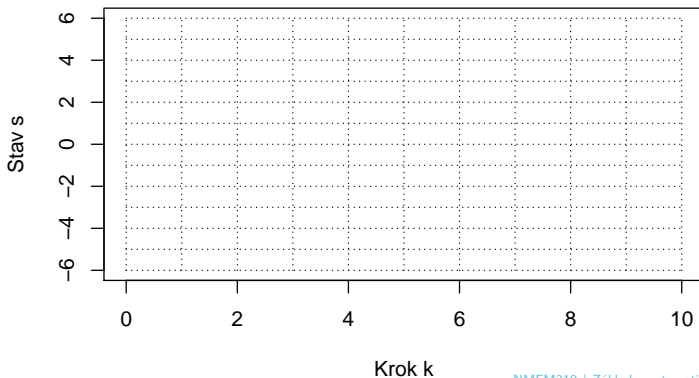


SOME RANDOMNESS
INVOLVED



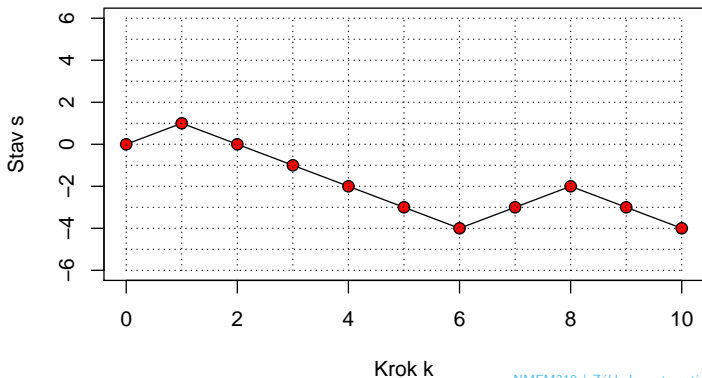
Náhodná procházka na přímce

- ❑ házíme **symetrickou minci** (pravděpodobnost, že padne hlava je $1/2$);
- ❑ začínáme v počátku, t.j. **počátečný stav je v bodě nula**;
- ❑ když padne **hlava**, posuneme se na ose **napravo**, když **líce**, tak **nalevo**;
(po každém počte hodov sledujeme aktuální pozici/polohu)



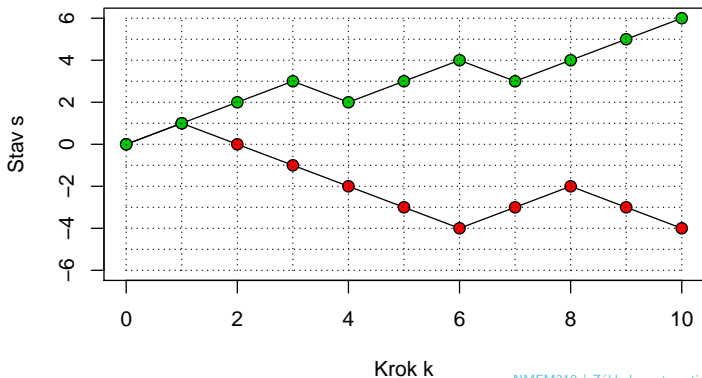
Náhodná procházka na přímce

- házíme **symetrickou minci** (pravděpodobnost, že padne hlava je $1/2$);
- začínáme v počátku, t.j. **počáteční stav je v bodě nula**;
- když padne **hlava**, posuneme se na ose **napravo**, když **líce**, tak **nalevo**;
(po každém počte hodov sledujeme aktuální pozici/polohu)



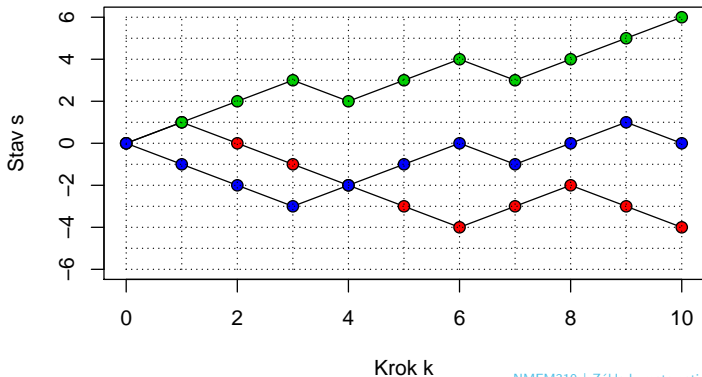
Náhodná procházka na přímce

- házíme **symetrickou minci** (pravděpodobnost, že padne hlava je $1/2$);
- začínáme v počátku, t.j. **počáteční stav je v bodě nula**;
- když padne **hlava**, posuneme se na ose **napravo**, když **líce**, tak **nalevo**;
(po každém počte hodov sledujeme aktuální pozici/polohu)



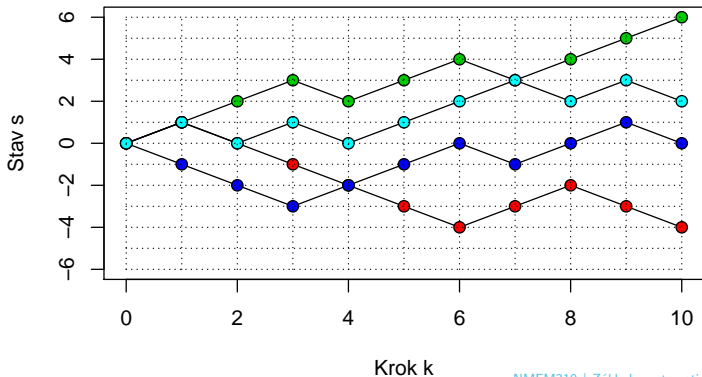
Náhodná procházka na přímce

- házíme **symetrickou minci** (pravděpodobnost, že padne hlava je $1/2$);
- začínáme v počátku, t.j. **počátečný stav je v bodě nula**;
- když padne **hlava**, posuneme se na ose **napravo**, když **líce**, tak **nalevo**;
(po každém počte hodov sledujeme aktuální pozici/polohu)



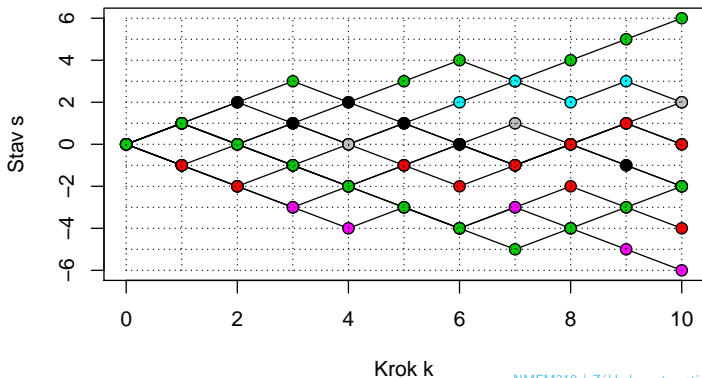
Náhodná procházka na přímce

- házíme **symetrickou minci** (pravděpodobnost, že padne hlava je $1/2$);
- začínáme v počátku, t.j. **počátečný stav je v bodě nula**;
- když padne **hlava**, posuneme se na ose **napravo**, když **líce**, tak **nalevo**; (po každém počte hodov sledujeme aktuální pozici/polohu)



Náhodná procházka na přímce

- házíme **symetrickou minci** (pravděpodobnost, že padne hlava je $1/2$);
- začínáme v počátku, t.j. **počáteční stav je v bodě nula**;
- když padne **hlava**, posuneme se na ose **napravo**, když **líce**, tak **nalevo**;
(po každém počte hodov sledujeme aktuální pozici/polohu)



Stochastické celočíselné posloupnosti

- ❑ uvažujme nějakou posloupnost $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$, která nabývá pouze **celočíselné hodnoty** (konečně, nebo spočetně mnoho);
- ❑ hodnoty $n \in \mathbb{N}$ interpretujeme jako **časové okamžiky**, ve kterých posloupnost $\{X_n\}$ nabývá své hodnoty;
- ❑ množina $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{Z}$ všech možných stavů posloupnosti $\{X_n\}$, které může posloupnost hypoteticky nabývat, se nazývá **stavový prostor**;
- ❑ hodnoty $s \in \mathcal{S}$, které může posloupnost $\{X_n\}$ hypoteticky (ale ne nutně) nabývat, nazýváme **stavy**;
- ❑ budeme uvažovat pouze **diskrétní časové okamžiky** a posloupnosti, kde \mathcal{S} je **nejvýše spočetná** množina;
- ❑ stav posloupnosti $\{X_n\}$ v nějakem konkrétním čase $n \in \mathbb{N}$ závisí na předchozích stavech, ale **závislost není deterministická**;
- ❑ stav posloupnosti $\{X_n\}$ v čase $n \in \mathbb{N}$ je vyjádřen prostřednictvím **pravděpodobnostního modelu** (zahrnuje v sobě míru neurčitosti);

Markovský řetězec a markovská vlastnost

Definice: Markovův řetězec

Řekneme, že posloupnost celočíselných náhodných veličin $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá **Markovův řetězec** (markovský řetězec), jestliže platí, že

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0] = P[X_{n+1} = j | X_n = i_n],$$

pro každé $n \geq 0$ a každé $i_0, \dots, i_n \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$P[X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0] > 0.$$

Množina všech stavů je v tomto případě množina \mathbb{Z} , t.j., $\mathcal{S} \equiv \mathbb{Z}$.

Markovskou vlastností nazýváme fakt, že výsledek v čase $n + 1$ závisí pouze na stavu daného řetězce v čase n (tudíž na stave v předchozím kroku, neboli v přítomnosti), nikoli na minulosti, t.j. na posloupnosti realizovaných stavů před časem n .

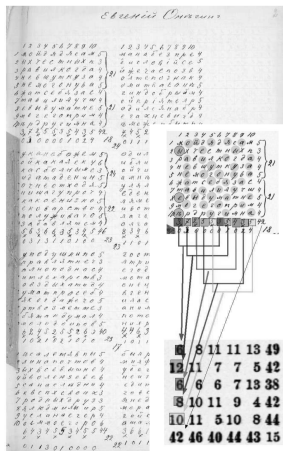
Markovský řetězec a markovská vlastnost



Příklady aplikace Markovských řetězců

- ❑ **První aplikace:** Andrei A. Markov použil Markovský řetězec na analýzu 20.000 listů z Pushkinovej básne Eugeny Onegin a studoval pravděpodobnosti výskytu samohlásek a souhlasek na základě předchozího výskytu (samohlásek a souhlasek);
- ❑ **Teória informací:** striktně povedané, každý proces pri ktorom zdroj prenáša nějaké informace, je markovský řetězec (Shannonova teórie);
- ❑ **Informatika (IT):** aplikácia pre vyhľadavacie algoritmy (napr. Google), hodnotenie web stránok (PageRank), computer performance evaluation;
- ❑ **Marketing:** systémy hromadné obsluhy, modelování správania zákazníkov/klientov a modelování změn ich preferencí;
- ❑ **Finance a business:** modelování různých finančných trhov, změny různých stavů, jejích chování a pod.
- ❑ **Matematika:** simulačné metody, rozhodovací algoritmy, analýza a spracování dat, atď.;

Markovský řetězec a Eugeny Onegin



- prvních 800 písmen z celkových 20.000 listů v Pushkinovom Eugeny Oneginovi;
- výskyt jednotlivých písmen zapsán pomocí 40 čtvercových matic typu 10×10 ;
- spodní matice typu 6×6 zobrazuje frekvenční výskyt některých písmen v 500 případech;
- na základě této analýzy sa ukázalo, že není žádný matematický rozdíl mezi kostkou, kterou hodíme 1000 krát a 1000 kostkami, které hodíme pouze jednou, ale všechny naraz;

Hilgers, P. and Langville, A. (2006). The Five Greatest Applications of Markov Chains. MAM 2006: Markov Anniversary Meeting . Raleigh 2006.

Pravděpodobnosti přechodu

Definice: Pravděpodobnost přechodu

Pravděpodobnost $p_{ij}(n, n + 1) \in [0, 1]$, pro $i, j \in \mathcal{S}$, definovanou jako

$$p_{ij}(n, n + 1) = P[X_{n+1} = j | X_n = i],$$

nazýváme **pravděpodobnost přechodu** ze stavu i v čase n do stavu j v čase $n + 1$;

- je intuitivně zřejmé, že pro nějaký konkrétní stav $i \in \mathcal{S}$ a čas $n \in \mathbb{N}$ dostaneme posloupnost $\{p_{is}(n, n + 1)\}_{s \in \mathcal{S}}$, která definuje **rozdělení pravděpodobnosti** na množině stavů \mathcal{S} ;
- vyjádřeno matematicky:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \mathcal{S} \quad \sum_{s \in \mathcal{S}} p_{is}(n, n + 1) = 1$$

Homogenita Markovského řetězce

Definice: Homogenní Markovský řetězec

Markovský řetězec se nazývá homogenní, jestliže platí, že

$$p_{ij} = p_{ij}(n, n + 1),$$

pro všechny $i, j \in \mathcal{S}$, tudíž pravděpodobnosti přechodů ze stavu i do stavu j nezávisí na čase n .

- pro konkrétny stav $i \in \mathcal{S}$ dostaneme opět **rozdělení pravděpodobnosti** $\{p_{is}\}_{s \in \mathcal{S}}$ na množině stavů \mathcal{S} ;

Počáteční rozdělení řetězce

Definice: Počáteční rozdělení

Pravděpodobnosti $p_i \in [0, 1]$, pro $i \in \mathcal{S}$, které jsou definovány jako

$$p_i = P[X_0 = i],$$

pro $i \in \mathcal{S}$, nazýváme **počáteční rozdělení řetězce**.

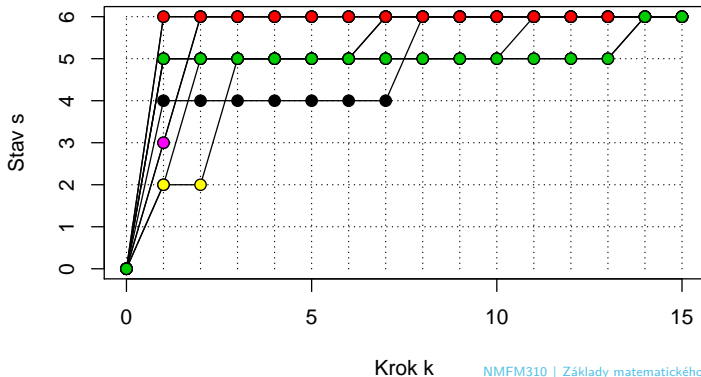
- v případě homogenních Markových řetězců se obvykle přechodové pravděpodobnosti zapisují v maticovém tvaru – tzv. **matici přechodových pravděpodobností** (resp. přechodová matice): $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$;
- **matice přechodových pravděpodobností** se také (obecně) nazývá aj **stochastická matice**, protože součet prvků v každém řádku je roven hodnotě jedna (každý řádek definuje rozdělení pravděpodobnosti na \mathcal{S});
- **počáteční rozdělení** $\{p_i\}_{i \in \mathcal{S}}$ Markovského řetězce se zapisuje pomocí vektoru pravděpodobnosti počátečního rozdělení: $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{|\mathcal{S}|})^T$;

Matice přechodových pravděpodobnosti

- ❑ matice přechodových pravděpodobnosti je definována jako $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^{|\mathcal{S}|}$; (pro nejvýše spočetný stavový prostor \mathcal{S} a stavy $i, j \in \mathcal{S}$)
- ❑ matice přechodových pravděpodobnosti může být **obecně nekonečná**; (pro nekonečnou, ale nejvýše spočetnou množinu stavů \mathcal{S})
- ❑ matice přechodových pravděpodobnosti je **stochastická matice**; (z každého stavu se někde musíme v dalším kroku dostat, nebo zůstat)
- ❑ vektor počátečního rozdělení řetězce má **součet jedna**; (v nějakom stavu $s \in \mathcal{S}$ musí řetězec začít)
- ❑ obecně řádky přechodové matice $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^{|\mathcal{S}|}$ značí výchozí stav $i \in \mathcal{S}$ a v sloupcích matice se uvádějí koncové stavy $j \in \mathcal{S}$;

Příklad: Dosažené maximum na hrací kostce

- obecně v n -tém tahu sledujeme dosažené maximum v n hodech;
- minimální hodnota (stav) je jedna, maximální (stav) je hodnota 6; (resp. v čase t můžeme začínat ve stavu 0 – nebylo maximum dosaženo)



Příklad: Dosažené maximum na hrací kostce

Příklad

Házíme spravedlivou hrací kostkou a sledujeme dosažené maximum v $n \in \mathbb{N}$ hodech. Množina stavů je $\mathcal{S} = \{1, \dots, 6\}$ a matici přechodových pravděpodobností pak můžeme zapsát jako

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

kde p_{ij} značí pravděpodobnost přechodu ze stavu i (řádek) do stavu j (sloupec), pro libovolné $i, j \in \mathcal{S}$.

Existence cesty v Markovském řetězci

- v souvislosti s Markovskými řetězci je někdy důležité vyšetřit existenci cesty z nějakého stavu $i \in \mathcal{S}$ do nějakého jiného stavu $j \in \mathcal{S}$;

Věta: Existence cesty v Markovském řetězci

Nechť $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ je homogenní Markovský řetězec s nejvýše spočetnou množinou stavů \mathcal{S} , počátečním rozdělením $(p_i; i \in \mathcal{S})$ a maticou přechodových pravděpodobností $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$.

Pak platí, že

$$P[X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n] = p_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n},$$

pro libovolné stavy $i_0, \dots, i_n \in \mathcal{S}$.

Pravděpodobnosti přechodů vyšších řádů

- existence cesty ze stavu $i \in \mathcal{S}$ do stavu $j \in \mathcal{S}$ v n krocích souvisí s přechodovými pravděpodobnostmi vyšších řádů – pravděpodobnostmi $p_{ij}^{(n)}$;

Definice: Pravděpodobnost přechodu v n krocích

Nechť $p_{ij}^{(0)} = \mathbb{I}_{\{i=j\}}$ a $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$. Pak pravděpodobnost

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{ik}^{(n)} p_{kj}$$

se nazývá pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j po $(n + 1)$ krocích (resp. $p_{ik}^{(n)}$ je pravděpodobnost přechodu n -tého řádu ze stavu i do stavu k).

- pro matici přechodových pravděpodobnosti n -tého řádu pak používáme značení $\mathbb{P}^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})_{i,j \in \mathcal{S}}$;

Pravděpodobnost přechodu n -tého řádu

Věta: Pravděpodobnost přechodu v n -tém kroku

Nechť $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $i, j \in S$. Pak platí, že

$$P[X_{m+n} = j | X_m = i] = p_{ij}^{(n)}.$$

Pro matici přechodových pravděpodobností n -tého řádu zároveň platí, že

$$\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^n.$$

- stejně jako matice \mathbb{P} aj matice přechodových pravděpodobností vyšších řádů $\mathbb{P}^{(m)}$, jsou **stochastické matice**, t.j. součet prvků v každém řádku je roven hodnotě jedna;

Příklad: Dosažené maximum na hrací kostce

Príklad

Házíme spravedlivou hrací kostkou a sledujeme dosažené maximum v $n \in \mathbb{N}$ hodech. Množina stavů je $\mathcal{S} = \{1, \dots, 6\}$ a matici přechodových pravděpodobností pak můžeme zapsat jako v (9).

Pro přechodové pravděpodobnosti vyšších řádů máme

$$p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i > 0; \\ \left(\frac{j}{6}\right)^n & \text{pro } i = j; \\ \left(\frac{j}{6}\right)^n - \left(\frac{j-1}{6}\right)^n & \text{pro } j > i; \end{cases}$$

Samostatný úkol

Spočtete matici přechodových pravděpodobností pro dosažené maximum na hrací kostce po $n = 2$ a $n = 3$ hodech.

Chapman-Kolmogorova věta

Věta: Chapman-Kolmogorov

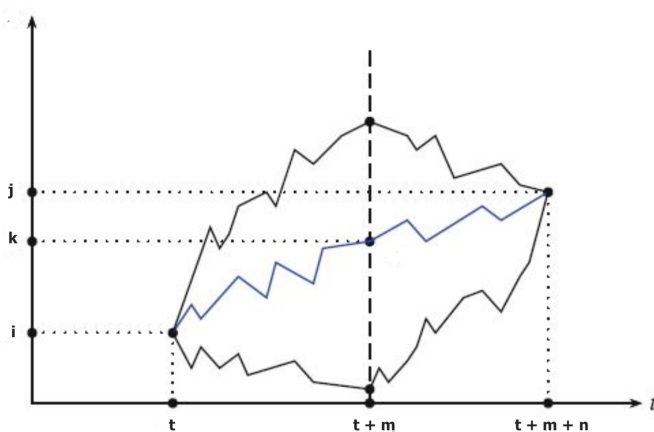
Nechť $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ je homogenní Markovský řetězec. Pak pro libovolná $n, m \in \mathbb{N}$ platí, že

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}.$$

□ IDEA:

Pro pravděpodobnost cesty ze stavu $i \in \mathcal{S}$ do stavu $j \in \mathcal{S}$ v $n+m$ krocích, se stačí podívat na všechny možné dosažitelné stavy $k \in \mathcal{S}$ po n krocích a pak všechny možné cesty ze stavu $k \in \mathcal{S}$ do stavu $j \in \mathcal{S}$ v m krocích.

Chapman-Kolmogorova věta



Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

□ Markovské řetězce

- Posloupnosti celočíselných náhodných veličin: $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$; (uvažujeme pouze diskrétní čas a diskrétní stavy);
- Množina stavů \mathcal{S} je nejvýše spočetná (např. $\mathcal{S} \equiv \mathbb{Z}$);
- Platí Markovská vlastnost: $P[X_{n+1} = j | X_n, \dots, X_1] = P[X_{n+1} = j | X_n]$;
- **Homogenita**: nezávislost přechodů mezi stavy na čase $n \in \mathbb{N}$;

□ Pravděpodobnosti přechodů a počátečné rozdělení

- Pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j (v jednom kroku):

$$p_{ij} = P[X_{n+1} = j | X_n = i]$$

- Pravděpodobnost přechodu ze stavu i do j n -tého řádku (v n krocích):

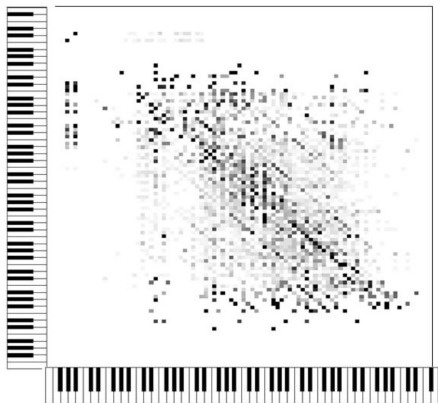
$$p_{ij}^{(n)} = P[X_{m+n} = j | X_m = i]$$

- Počátečné rozdělení Markovského řetězce pro stavy $i \in \mathcal{S}$:

$$p_i = P[X_0 = i]$$

- Pro každé $i \in \mathcal{S}$ se jedná o rozdělení pravděpodobností na \mathcal{S} ; (t.j., $\sum_{k \in \mathcal{S}} p_{ik} = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{ik}^{(n)} = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_k = 1$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$)

Reprezentace Markovského řetězce



I. Stravinsky "The Fire-bird" suite melody

- pomoci matice přechodových pravděpodobnosti $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in S}$;
- případně matice přechodových pravděpodobnosti vyšších řádů $\mathbb{P}^{(n)}$;
- orientovaný graf s vrcholy pro stavy a váhami pro jednotlivé hrany;
- obrázek ilustrující matici přechodových pravděpodobnosti;

Klasifikace stavů Markovského řetězce

Definice: Dosažitelnost stavu v Markovském řetězci

Řekneme, že nějaký stav $j \in \mathcal{S}$ je **dosažitelný** ze stavu $i \in \mathcal{S}$, pokud existuje číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že $p_{ij}^{(n)} > 0$.

- pro vyjádření faktu, že stav j je dosažitelný ze stavu i (ne nutně v jednom kroku), používáme značení $i \longrightarrow j$;

Definice: Nerozložitelnost Markovského řetězce

Řekneme, že Markovský řetězec je **nerozložitelný**, pokud každý stav je dosažitelný z každého stavu.

- dosažitelnost stavů v Markovském řetězci a nerozložitelnost řetězce nemusí být patrná pouze z pohledu na samotnou matici \mathbb{P} ;

Rozložitelnost a nerozložitelnost řetězce

příklad

Uvažujme Markovský řetězec se čtyřprvkovou množinou stavů S a maticou přechodových pravděpodobnosti

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ❑ jedná se o rozložitelný Markovský řetězec protože stav 1 nelze dosáhnout ze žádného jiného stavu 2,3 a 4;
- ❑ pro nerozložitelnost řetězce by stačilo například umožnit přechod ze stavu 2 do stavu 1, t.j., definovat $p_{21} > 0$;

Samostatný úkol

Reprezentujte Markovský řetězec z příkladu pomocí vhodného grafu.

Uzavřená množina stavů

Definice: Množna uzavřených stavů

Řekneme, že neprázdná množina stavů $C \subset S$ je **uzavřená množina**, pokud každý stav vně množiny C není dosažitelný z žádného stavu množiny C .

❑ IDEA:

Jakmile řetězec jednou vejde do nějakého stavu $s \in C$, pak již nemůže řetězec nabýt žádného jiného stavu, kromě stavů v množině C .

- ❑ uzavřenost ve zmyslu *nemůžeme ven, ale pořád můžeme dovnitř*;

Věta: Nerozložitelnost řetězce I

Markovský řetězec je nerozložitelný právě tehdy, když neexistuje žádná uzavřená množina $C \subset S$, taková, že $C \neq S$.

Rozložitelnost a nerozložitelnost řetězce

Věta: Uzavřená množina stavů

Množina stavů $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$, taková, že $\mathcal{C} \neq \mathcal{S}$ je uzavřená právě tehdy, když platí, že

$$p_{jk} = 0 \quad \text{pro} \quad \forall j \in \mathcal{C} \quad \text{a} \quad \forall k \notin \mathcal{C}.$$

Věta: Nerozložitelnost řetězce II

Řetězec je rozložitelný právě tehdy, když po vhodném přechíslování stavů řetězce (a teda příslušnou permutaci řádků a sloupců matice \mathbb{P}) je matice přechodových pravděpodobností ve tvaru

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} & \mathbb{R} \end{pmatrix},$$

kde \mathbb{P}_1 a \mathbb{R} jsou čtvercové matice a \mathbb{P}_1 je navíc stochastická.

Doba prvního vstupu (návratu) do stavu

Definice: Doba prvního vstupu

Pro libovolný stav $i \in \mathcal{S}$ definujeme

$$\nu_i = \inf\{n \in \mathbb{N}; X_n = i\}$$

jako čas prvního vstupu (resp. doba prvního návratu) řetězce $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ do stavu $i \in \mathcal{S}$, t.j., záleží na počátečním rozdělení).

- analogicky lze definovat i obecný čas k -tého vstupu (návratu) řetězce do stavu $i \in \mathcal{S}$ jako

$$\nu_i(k) = \inf\{n > \nu_i(k-1); X_n = i\},$$

kde definujeme $\nu_i(1) \equiv \nu_i$, pro $i \in \mathcal{S}$;

Doba mezi návraty do stavu

Pro doby, které Markovský řetězec stráví mezi jednotlivými návraty do daného stavu $i \in \mathcal{S}$ se obecně zavádí značení

- $T_i(1) = \nu_i = \nu_i(1)$: doba do prvního návratu/vstupu do stavu $j \in \mathcal{S}$;
 - $T_i(2) = \nu_i(2) - \nu_i(1)$: doba mezi prvním a druhým návratem/vstupem;
 - $T_i(k) = \nu_i(k) - \nu_i(k-1)$: doba mezi k -tým a $(k-1)$ -vým návratem;
-
- Samozřejmě platí, že

$$\nu_i(k) = T_i(1) + T_i(2) + \dots + T_i(k);$$

Poznámka:

Je vhodné rozlišovat **návrat do stavu** $i \in \mathcal{S}$ (pokud již řetězec v tomto stavu v minulosti byl) a **vstup do stavu** $i \in \mathcal{S}$ (pokud řetězec v daném stavu ještě nebyl). V praxi (ovšem ne nutně vždy a všude) se obecně používá vyjádření o prvním vstupu do stavu $i \in \mathcal{S}$ ("nultý" návrat) a pak o k -tém návratu (t.j., $(k+1)$ -ní vstup).

Trvalý a přechodný stav v Markovském řetězci

Definice: Trvalý stav

Stav $i \in \mathcal{S}$ takový, že platí

$$P_i[\nu_i < \infty] = P[\nu_i < \infty | X_0 = i] = 1,$$

se nazývá **trvalý stav** řetězce $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Definice: Přechodný stav

Stav $i \in \mathcal{S}$ takový, že platí

$$P_i[\nu_i = \infty] = P[\nu_i = \infty | X_0 = i] > 0,$$

se nazývá **přechodný (transientní) stav** řetězce $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Přechodný a trvalý nulový a nenulový stav

- ❑ **Trvalý stav** je teda takový, že řetězec, který vychází ze stavu $i \in \mathbb{S}$ (proto podmínka, že $X_0 = i$), se v konečně mnoha krocích do tohoto stavu **vrátí s pravděpodobností 1**;
- ❑ V opačném případě (t.j., existuje kladná pravděpodobnost, že řetězec, který začal ve stavu $i \in \mathbb{S}$, se již nikdy do tohoto stavu nevrátí) řekneme, že **stav je přechodný**.

Definice: Trvalý nulový a nenulový stav

- ❑ Trvalý stav $i \in \mathcal{S}$ takový, že $E_i \nu_i = \infty$, se nazývá **nulový stav**;
- ❑ Trvalý stav $i \in \mathcal{S}$ takový, že $E_i \nu_i < \infty$, se nazývá **nenulový stav**;

Střední hodnoty v definici jsou definované vzhledem k pravděpodobnostní míře $P_i[\cdot] = P[\cdot | X_0 = i]$ (t.j., záleží na počátečním rozdělení);

Klasifikace stavů v Markovském řetězci

- ❑ Do **trvalého stavu** se Markovský řetězec vrátí nekonečně mnoho krát s pravděpodobností 1.
- ❑ Do **přehodného stavu** se Markovský řetězec vrátí nekonečně mnoho krát s pravděpodobností nula.
- ❑ Necht' $f_i^{(n)} = P_i[\nu_i = n]$ (**první návrat v čase n**) a necht' $f_i^{(0)} = 0$. Pak je zřejmé, že stav $i \in \mathcal{S}$ je trvalý, právě tehdy, když platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_i^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_i^{(n)} = 1;$$

- ❑ Pro střední hodnotu $E_i \nu_i$ platí: $E_i \nu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n P_i[\nu_i = n] = \sum_{n=1}^{\infty} n f_i^{(n)}$;
- ❑ Obecně pro $n \geq 1$ platí, že $p_{ii}^{(n)} = P_i[X_n = i] = \sum_{k=1}^n f_i^{(k)} p_{ii}^{(n-k)}$;
- ❑ Obecně pro $n \geq 0$ a $i \neq j$ platí $p_{ij}^{(n)} = P_i[X_n = j] = \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$,
kde $f_{ij}^{(n)} = P_i[\nu_j = n] = P[\nu_j = n | X_0 = i]$ (**první vstup v čase n**);

Periodický a neperiodický stav

Definice: Periodický stav

Stav $i \in \mathcal{S}$ v homogénním Markovském řetězci $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ se nazývá **periodický s periodou** $d \in \mathbb{N}$, pokud platí, že

$$d = NSD(n > 0; p_{ii}^{(n)} > 0) > 1,$$

teda největší společný dělitel pro čas návratu do stavu i je větší jako jedna.

- Pokud platí, že $NSD = 1$, pak řekneme, že stav $i \in \mathbb{N}$ je **aperiodický** neboli **neperiodický**.

Stavy stejného typu

Definice: Stavy stejného typu

Řekneme, že dva stavy jsou stejného typu, pokud platí, že oba stavy jsou **trvalé/přechodné**, **nulové/nenulové** a **periodické/neperiodické**, so stejnou periodou $d > 1$.

Príklad

- Ověřte, že v Markovském řetězci s přechodovou maticí

$$\mathbb{P} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & (1-p) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

jsou všechny stavy periodické, s periodou $d = 3$ pro $p \in (0, 1)$.

- Co se stane, když do procesu přidáme jednu smyčku typu $p_{ii} > 0$?

Klasifikace stavů v Markovském řetězci I

Věta: Trvalý a trvalý nulový stav

- ❑ Stav $i \in \mathcal{S}$ je **trvalý** $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$;
- ❑ Stav $i \in \mathcal{S}$ je **přechodný** $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$;
- ❑ Trvalý stav $i \in \mathcal{S}$ je **nulový** $\Leftrightarrow p_{ii}^{(n)} \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$;

Věta: Trvalé vs. předchodné stavy

V nerozložitelném Markovském řetězci s $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$ jsou všechny stavy trvalé tehdy a jen tehdy, když jediné řešení soustavy

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

v intervalu $[0, 1]$ je triviální, t.j. $x_i = 0$ pro všechny $i = 1, 2, \dots$.
Všechny stavy jsou přechodné \Leftrightarrow existuje netriviální řešení (10).

Klasifikace stavů v Markovském řetězci II

Věta: Řetězec s konečně mnoho stavů

- ❑ V Markovském řetězci s konečnou množinou stavů S nemohou být všechny stavy přechodné.
- ❑ V Markovském řetězci s konečnou množinou stavů S neexistují stavy trvalé nulové.

Věta: Stavy stejného typu

Uvažujme Markovský řetězec s množinou stavů S .

- ❑ Když pro libovolné dva stavy $i, j \in S$ existuje cesta $i \rightarrow j \rightarrow i$, pak jsou oba stavy i a j stejného typu.
- ❑ Pokud $i \rightarrow j \not\rightarrow i$, pak stav i je přechodný.
- ❑ V nerozložitelném řetězci jsou všechny stavy stejného typu.

Absorbčné a ergodické stavy

- V případě Markovských procesů je užitečné ještě definovat tzv. absorbční stav a ergodický stav procesu.

Definice: Absorbční stav

Stav, ze kterého není dosažitelný žádný jiný stav, se nazývá **absorbční**.

Definice: Ergodický stav

Stav, který je trvalý, nenulový a neperiodický, se nazývá **ergodický**.

Příklad: Dosažené maximum na hrací kostce

Príklad

- ❑ stav $i \in S$ je trvalý $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$, pro $i = 1, \dots, 6$;
 - ❑ v našem případě platí: $p_{ii}^{(n)} = \left(\frac{i}{6}\right)^n$;
 - ❑ pro $i = 1, \dots, 5$ je řada konvergentní;
 - ❑ pro $i = 6$ je suma divergentní;
- ❑ stav $i = 6$ je proto trvalý, stavy $i = 1, \dots, 5$ jsou přechodné;
- ❑ je stav $i = 6$ nulový nebo nenulový?
 - ❑ podle definice: $E_i \nu_i = 1 \cdot 1 = 1 < \infty$;
 - ❑ stav $i = 6$ je proto trvalý nenulový;
 - ❑ střední doba návratu do stavu $i = 6$ je 1 ($\nu_6 = 1$);
 - ❑ množina stavů $\{6\}$ je uzavřená, a stav je absorbční;

Příklad: Náhodná procházka

příklad

- ❑ otázka zní, jak se chovají pravděpodobnosti $p_{ii}^{(n)}$?
- ❑ z povahy řetězce je zřejmé, že $p_{ii}^{(n)} = 0$ pro $n \in \mathbb{N}$ liché;
- ❑ pro pravděpodobnosti $p_{ii}^{(2n)}$ pak dostaneme:

$$p_{ii}^{(2n)} = \binom{2n}{n} 2^{-2n} = \frac{(2n)! 2^{-2n}}{(n!)^2} \approx \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n} 2^{-2n}}{n^{2n} e^{-2n} 2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \rightarrow 0,$$

kde jsme využili Stirlingovou aproximaci $n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$;

- ❑ tudíž platí, že $p_{ii}^{(n)} \rightarrow 0$, pro $n \rightarrow \infty$;
- ❑ zároveň platí, že $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$;
- ❑ všechny stavy jsou proto trvalé nulové;

Příklad: Človeče nezlob se!

Samostatný úkol

Uvažujte hru Človeče nezlob se, kde hrací plocha má pouze 15 stanovišť. Hráč se posune o tolik kroků dopředu, kolik hodil bodů na kostce. Když hodí hodnotu šest, hází opět a posune se o počet kroků daný součtem bodů v jednotlivých hodech. Hra končí, když se hráč vrátí spátky na startovací pozici – t.j. políčko č. 15.

Jak vypadá matice přechodových pravděpodobností? Klasifikujte stavy Markovského procesu.



Zhrnutí/opakování

- ❑ Homogénní Markovské řetězce s diskrétným časem $n \in \mathbb{N}$ a nejvýše spočetnou množinou stavů \mathcal{S} ;
- ❑ Klasifikace stavů v Markovském řetězci:
 - ❑ Trvalé nulové a nenulové stavy;
 - ❑ Přejídné stavy;
 - ❑ Neperiodické a periodické stavy s periodou $d > 1$;
 - ❑ Absorbční a ergodické stavy;
- ❑ Rozložitelnost a nerozložitelnost řetězce:
 - ❑ Dosažitelnost stavů (existence cesty $i \rightarrow j \rightarrow i$);
 - ❑ Existence uzavřené podmnožiny stavů \Rightarrow rozložitelnost řetězce;
- ❑ Zavedené veličiny a značení:
 - ❑ Počáteční a přejídné pravděpodobnosti: $p_i, p_{ij}, p_{ij}^{(n)}$ pro $i, j \in \mathcal{S}$;
 - ❑ Čas prvního (obecně k -tého) návratu/vstupu do stavu $i \in \mathcal{S}$: $\nu_i(k)$;
 - ❑ Čas mezi k -tým a $(k-1)$ -ním vstupem do stavu $i \in \mathcal{S}$: $T_i(k)$;
 - ❑ Podmíněná pravděpodobnost počátečním stavem: $P_i[\cdot] = P[\cdot | X_0 = i]$;
 - ❑ Pravděpodobnost návratu/vstupu do stavu $i \in \mathcal{S}$ v čase $n \in \mathbb{N}$: $f_i^{(n)}, f_{\ell i}^{(n)}$;

Chování Markovských řetězců

- ❑ Homogénní Markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ s diskrétním časem a nejvýše spočetnou množinou stavů \mathcal{S} ;
- ❑ Zajímá nás dlouhodobé chování Markovských řetězců, t.j., pro $n \rightarrow \infty$;
- ❑ Jaké je marginální rozdělení náhodnej veličiny X_n , pro $n \rightarrow \infty$;
- ❑ Obecně, náhodné veličiny X_n mají různé rozdělení pro různá $n \in \mathbb{N}$;

Chování Markovských řetězců

- ❑ Homogenní Markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ s diskrétním časem a nejvýše spočetnou množinou stavů \mathcal{S} ;
- ❑ Zajímá nás dlouhodobé chování Markovských řetězců, t.j., pro $n \rightarrow \infty$;
- ❑ Jaké je marginální rozdělení náhodnej veličiny X_n , pro $n \rightarrow \infty$;
- ❑ Obecně, náhodné veličiny X_n mají různé rozdělení pro různá $n \in \mathbb{N}$;

- ❑ **Otázka:** Lze něco obecně říct o rozdělení X_n , pro $n \rightarrow \infty$?
 - ❑ např., rozdělení je stejné pro všechny $n \geq n_0$, pro nějaké vhodně zvolené $n \in \mathbb{N}$;
 - ❑ nebo rozdělení náhodne veličiny X_n konverguje k nějakému limitnímu rozdělení pro $n \rightarrow \infty$;
 - ❑ nebo existuje nějaké rozdělení Markovského řetězce, které zaručuje nějakou "stabilitu" řetězce;

Stacionární rozdělení Markovského řetězce

Definice: Stacionární rozdělení Markovského řetězce

Řekneme, že pravděpodobnostné rozdělení $\pi = (\pi_i; i \in \mathcal{S})$ na množině stavů \mathcal{S} je **stacionární rozdělení Markovského řetězce**, pokud platí, že

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i p_{ij},$$

pro všechny $j \in \mathcal{S}$. Maticově lze také zapsát jako

$$\boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\pi}^T \mathbb{P},$$

pro matici přechodových pravděpodobností $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$.

Samostatný úkol

Vysvětlete, co znamená, že $\pi = (\pi_i; i \in \mathcal{S})$ je pravděpodobnostné rozdělení na množině stavů \mathcal{S} .

Limitní rozdělení Markovského řetězce

Definice: Limitní rozdělení Markovského řetězce

Řekneme, že pravděpodobnostné rozdělení $\mathcal{P} = (p_i; i \in \mathcal{S})$ na množině stavů \mathcal{S} je **limitní rozdělení Markovského řetězce**, pokud platí, že

$$p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} p_i(n),$$

kde $p_i(n) = P[X_n = i]$, pro $i \in \mathcal{S}$.

Samostatný úkol

Ukážte, že pro Markovský řetězec s maticou přechodových pravděpodobnosti

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

neexistuje limitní rozdělení.

Limitní vs. stacionární rozdělení

- ❑ **Stacionární rozdělení** Markovského řetězce se vztahuje pouze k pravděpodobnostem přechodu p_{ij} , pro $i, j \in \mathcal{S}$. **Nezávisí teda na počátečním rozdělení Markovského řetězce.**
- ❑ **Limitní rozdělení** se vztahuje k rozdělení celého Markovského řetězce. **Je tedy ovlivněno i počátečním rozdělením Markovského řetězce.**
- ❑ Snadno lze nahlédnout, že pokud je **počáteční rozdělení řetězce rovno stacionárnímu rozdělení π** , pak je i **rozdělení řetězce ve všech dalších časech $n \in \mathbb{N}$, t.j. rozdělení $(p_i(n); i \in \mathcal{S})$, rovné rozdělení π .**

Věta: Stritně stacionární proces

V případě, že počáteční rozdělení řetězce je stejné jako stacionární rozdělení, pak pro libovolnou posloupnost i_0, \dots, i_k stavů z \mathcal{S} a libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$P[X_0 = i_0, \dots, X_k = i_k] = P[X_n = i_0, \dots, X_{n+k} = i_k].$$

Takový řetězec se nazývá **striktně stacionární**.

Limitní rozdělení \Rightarrow stacionární rozdělení

Věta: Limitní rozdělení a stacionární rozdělení

Nechť existuje limitní rozdělení $\mathcal{P} = (p_i; i \in \mathcal{S})$ Markovského řetězce $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$. Pak je toto rozdělení zároveň stacionárním rozdělením Markovského řetězce a tudíž platí, že

$$\mathcal{P} = \pi.$$

- Opačná implikace samozřejmě obecně neplatí: není pravda, že existence stacionárního rozdělení by byla postačující podmínka pro existenci limitního rozdělení Markovského řetězce;

Nerozložitelnost a stacionární rozdělení

Věta: Nerozložitelnost a existence stacionárního rozdělení

Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ je nerozložitelný Markovský řetězec s množinou stavů \mathcal{S} . Pak **stacionární rozdělení existuje** právě když všechny stavy jsou trvalé nenulové.

- Jsou-li navíc všechny stavy neperiodické, je **stacionární rozdělení i limitním rozdělením** a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_j(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j = \frac{1}{E_j \nu_j},$$

- Jsou-li všechny stavy periodické, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_j(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)} = \pi_j.$$

Příklad: Nehodové pojištění s bonusem

- ❑ V konečném nerozložitelném řetězci stacionární rozdělení vždy existuje. *(všechny stavy jsou totiž trvalé nenulové)*
- ❑ Stacionární rozdělení nerozložitelného řetězce nepopisuje pouze limity absolutních pravděpodobností jednotlivých stavů, ale popisuje také četnosti návratu do jednotlivých stavů, čas který daný Markovský řetězec v jednotlivých stavech stráví.

Príklad

Uvažujeme nehodové pojištění se třemi různými úrovněmi:

- ❑ základní sazba (stav 1);
- ❑ sazba s bonusem 30 % (stav 2);
- ❑ sazba s bonusem 50 % (stav 3);

Rok bez pojistní události znamená postup do lepší pojistní kategorie pro příští rok (když taková možnost existuje). Jedná pojistní událost v průběhu roka znamená posun o jednu kategorii níž (pokud to lze) pro další rok. V případě většího počtu události posun do základní kategorie.

Příklad: Nehodové pojištění s bonusem

Príklad

- ❑ situaci chceme modelovat pomocí Markovského řetězce;
- ❑ počet pojistných událostí Y_n v daném roce $n \in \mathbb{N}$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 0$;
- ❑ náhodná veličina X_{n+1} je definovaná následovně:

$$X_{n+1} = \begin{cases} \min(X_n + 1, 2) & \text{pro } Y_n = 0 \\ \max(X_n - 1, 0) & \text{pro } Y_n = 1 \\ 0 & \text{pro } Y_n > 1 \end{cases}$$

- ❑ ukážete, že $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ je Markovský řetězec;
- ❑ najděte matici přechodových pravděpodobností \mathbb{P} ;
- ❑ najděte soustavu rovnic pro nalezení stacionárního rozdělení;

Počet přechodů stavem $j \in \mathcal{S}$

Definice: Počet přechodů daným stavem

Náhodná veličina

$$N_j(n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{X_k=j\}},$$

se nazývá **počet přechodů stavem $j \in \mathcal{S}$ v prvních $n \in \mathbb{N}$ krocích** (resp. počet návratů do stavu $j \in \mathcal{S}$).

- počet návratů do stavu j (náhodná veličina $N_j(n)$) úzce souvisí s časy návratu do stavu $j \in \mathcal{S}$;

Počet přechodů, časy návratů a klasifikace

- Limitním přechodem získáme celkový počet návratu do stavu $j \in \mathcal{S}$ jako

$$N_j = \lim_{n \rightarrow \infty} N_j(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{X_k=j\}}.$$

- Snadno se nahlédne, že platí následující:

- $N_j \geq k \Leftrightarrow \nu_j(k) < \infty$;
- $N_j = k \Leftrightarrow \nu_j(k) < \infty \wedge \nu_j(k+1) = \infty$;

Věta: 0 – 1 zákon

- ak je stav $j \in \mathcal{S}$ trvalý, pak $P_j[N_j = \infty] = 1$;
- ak je stav $j \in \mathcal{S}$ přechodný, pak $P_j[N_j = \infty] = 0$;

Počet přechodů $N_j(n)$ a stacionární rozdělení

Věta: Stacionární rozdělení v řetězci s trvalými nenulovými stavy

V nerozložitelném Markovském řetězci s trvalými nenulovými a neperiodickými stavy platí s pravděpodobností jedna, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_j(n)}{n} = \pi_j,$$

pro všechny stavy $j \in \mathcal{S}$.

Příklad: Stacionární rozdělení

Príklad

Uvažujme Markovský řetězec s množinou stavů $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ a maticou přechodových pravděpodobností

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots \\ 0 & 0 & q & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

pro nějaké vhodně zvolené $p > 0$ a $q > 0$, takové, že $p + q = 1$.

- Najděte stacionární rozdělení pro daný Markovský řetězec.

Zhrnutí/opakování

- ❑ Homogénní Markovské řetězce s diskrétným časem $n \in \mathbb{N}$ a nejvýše spočetnou množinou stavů \mathcal{S} ;
- ❑ Rozložitelnost a nerozložitelnost řetězce:
 - ❑ Konečné vs. nekonečná množina stavů;
 - ❑ Existence cesty: dosažitelnost stavů (stavy stejného typu);
 - ❑ Uzavřené podmnožiny stavů \Rightarrow rozložitelnost řetězce;
 - ❑ Počty a časy přechodu, návratu a vstupu do daného stavu;
- ❑ Klasifikace stavů v Markovském řetězci:
 - ❑ Přechodné stavy;
 - ❑ Trvalé nulové a trvalé nenulové stavy;
 - ❑ Neperiodické/periodické stavy (s periodou $d > 1$);
 - ❑ Absorbční stavy a ergodické stavy;
- ❑ Limitní a stacionární rozdělení Markovského řetězce
 - ❑ Limitní rozdělení - popisuje chování celého Markovského řetězce včetně počátečního rozdělení;
 - ❑ Stacionární rozdělení - vyjadřuje určitou stabilitu řetězce vzhledem k pravděpodobnostem přechodu;

Kapitola 5

Časové řady

Nádodné procesy vs. časové řady

□ Stochastický/náhodný proces

↪ posloupnost (reálných) náhodných veličin $\{X_t; t \in T\}$ definovaných na stejném pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) ;

□ Časová řada (proces)

↪ stochastický proces indexovaný celočíselnou množinou T ($T \equiv \mathbb{N}$, nebo $T \equiv \mathbb{Z}$) (resp. stochastický proces s diskrétným časem);

- v niektorých literárnych zdrojoch sa pod pojmom **časová řada** rozumí již nějaká konkrétní **realizace náhodného procesu** $\{X_t; t \in T\}$, t.j., posloupnost konkrétních hodnot X_1, X_2, \dots , neboli x_1, x_2, \dots ;

Bílý šum

Definice: Bílý šum

Posloupnost centrovaných a **nekorelovaných** náhodných veličin $\{X_t; t \in T\}$ s kladným konečným rozptylem se nazývá **bílý šum**.

Definice: Striktní bílý šum

Posloupnost **nezávislých, stejně rozdělených**, nedegenerovaných a centrovaných náhodných veličin $\{X_t; t \in T\}$ se nazývá **striktní bílý šum**.

- v podstatě je bílý šum náhodný **signál s rovnoměrnou spektrální hustotou**; (*analógie s bílým světlem, které obsahuje všechny ostatní frekvence*)

Příklad: Bílý šum a striktní bílý šum

Příklad

- ❑ posloupnost nezávislých náhodných veličin z rozdělení $N(0, 1)$ je **bílý šum** a zároveň aj **striktní bílý šum** (obecně $N(0, \sigma^2)$);
 - ❑ posloupnost nezávislých náhodných veličin z rozdělení $C(0, 1)$ je **striktní bílý šum**, ale není to **bílý šum** – neexistuje totiž ani střední hodnota, ani konečný rozptyl;
 - ❑ posloupnost nekorelovaných náhodných veličin z nějakého obecného rozdělení F je **bílý šum**, pokud jsou veličiny centrované (t.j. s nulovou střední hodnotou) a s konečným rozptylem; Pokud navíc je rozdělení F normální, pak se jedná o **striktní bílý šum**;
-
- ❑ **Striktní bílý šum** a **bílý šum** jsou obecně časové řady s nejjednodušší závislostní strukturou – nekorelované, neboli dokonce nezávislé. Zároveň v sobě nenesou žádnou informaci, jedna se pouze o náhodné chyby, stochastické fluktuace.

Silná stacionarita

Definice: Silná stacionarita

Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_t; t \in T\}$ je **striktně stacionární** (resp. silně stacionární), pokud pro $l \in \mathbb{N}$, libovolné $k_1, \dots, k_l \in T$ a každé $h > 0$ takové, že $k_1 + h, \dots, k_l + h \in T$ platí, že

$$\mathcal{L}(X_{k_1}, \dots, X_{k_l}) = \mathcal{L}(X_{k_1+h}, \dots, X_{k_l+h}).$$

- **Silná stacionarita** znamená, že libovolná l -tice náhodných veličin je stejně rozdělená v libovolném časovém okamžiku;
- Z definice samozřejmě plyne, že pro silně stacionární posloupnost $\{X_t; t \in T\}$ jsou náhodné veličiny X_t **stejně rozdělené** pro všechny $t \in T$;

Slabá stacionarita

Definice: Slabá stacionarita

Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_t; t \in T\}$ je **slabě stacionární**, pokud platí:

- ❑ $EX_t = \mu$ pro všechna $t \in T$ (t.j., nezávisí na t);
- ❑ $R(k) = E[(X_{t+k} - \mu)(X_t - \mu)]$ (t.j., nezávisí na $t \in T$);

- ❑ funkce $R(k)$ se nazývá **autokovarianční funkce** posloupnosti;
- ❑ hodnota $R(0) = E(X - \mu)^2$ je rozptyl posloupnosti (konstantní v čase);
- ❑ funkce $r(k) = R(k)/R(0)$ se nazývá **autokorelační funkce** posloupnosti;
- ❑ samozřejmě platí, že $R(k) = R(-k)$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$;

Příklad: Bílý šum a striktní bílý šum

Príklad

- ❑ pokud má silně stacionární posloupnost konečné druhé momenty, pak je zřejmě slabě stacionární;
- ❑ pokud je posloupnost náhodných veličin gausovská (t.j. všechny konečně-rozměrná rozdělení jsou normální) a slabě stacionární, pak je také silně stacionární;
- ❑ striktní bílý šum je silně (striktně) stacionární (nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny);
- ❑ bílý šum je obecně slabě stacionární (centrované a nekorelované náhodné veličiny);

Klouzavé průměry řádu $q \in \mathbb{N}$

Definice: $MA(q)$ proces

Nechť posloupnost $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum s konečným rozptylem $\sigma^2 < \infty$. Pak náhodnou posloupnost

$$X_t = a_0\varepsilon_t + a_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + a_q\varepsilon_{t-q}, \quad \text{pro } t \in \mathbb{Z},$$

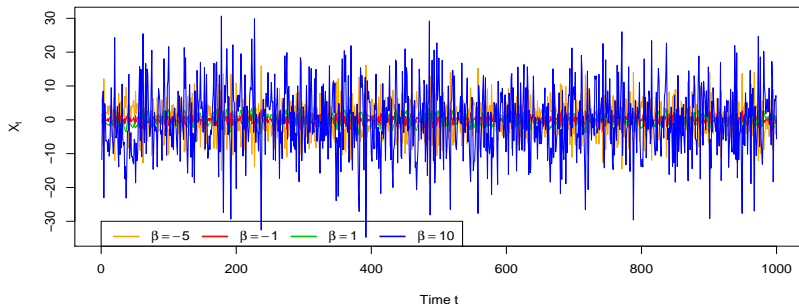
a pro nějaké koeficienty $a_0, \dots, a_q \in \mathbb{R}$, takové, že $a_0 \neq 0 \neq a_q$, nazýváme **posloupnost klouzavých průměrů řádu q** .

- obecně mají $MA(q)$ procesy složitější korelační strukturu než bílý šum, avšak složky X_t a X_{t+k} jsou nekorelované pro $k > q$.

Příklad: $MA(1)$ proces

Príklad

- nechť $X_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}$, pro $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ bílý šum;
- Pro jaké hodnoty $\beta \in \mathbb{R}$ je $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ stacionární?
- Jak je definovaná autokovarianční a autokorelační funkce?



Autoregresní model řádu $p \in \mathbb{N}$

Definice: $AR(p)$ proces

Nechť posloupnost $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum s konečným rozptylem $\sigma^2 < \infty$. Pak náhodnou posloupnost

$$d_0 X_t + d_1 X_{t-1} + \dots + d_p X_{t-p} = \varepsilon_t, \quad \text{pro } t \in \mathbb{Z}, \quad (11)$$

pro nějaké koeficienty $d_0, \dots, d_p \in \mathbb{R}$, takové, že $d_0 \neq 0 \neq d_p$, nazýváme **autoregresní posloupnost řádu p** .

- ❑ Ekvivalentně lze model přepsat pomocí rovnice $X_t = \tilde{d}_1 X_{t-1} + \dots + \tilde{d}_p X_{t-p} + \tilde{\varepsilon}_t$, kde $\text{Var} \tilde{\varepsilon}_t = \frac{1}{d_0^2} \text{Var} \varepsilon_t$ a $\tilde{d}_j = -d_j/d_0$;
- ❑ Obecně jsou pro tyto modely **autokorelace nenulové** a jednotlivé složky se navzájem ovlivňují i když jsou libovolně daleko od sebe.
- ❑ Pokud je posloupnost stacionární, pak **závislost mezi složkami se vzrůstajícím rozdílem v čase nutně slabne**;

Stacionarita autoregresní posloupnosti

Věta: Stacionarita autoregresní posloupnosti

Nechť $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je autoregresní posloupnost p -tého řádu definovaný rovnicí (11) a necht' bez ujmy na obecnosti $d_0 = 1$. Necht' jsou všechny kořeny polynomu

$$d(z) = 1 + d_1z + \dots + d_pz^p$$

vně jednotkového kruhu v komplexní rovině. Pak je proces $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ slabě stacionární a náhodná veličina ε_t je nekorelovaná se všemi náhodnými veličinami X_{t-1}, X_{t-2}, \dots

Centrovanost a kauzálnost AR posloupnosti

- za platnosti podmínek předchozí věty je posloupnost $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ také **centrovaná**, protože ze slabé stacionarity také automaticky plyne, že

$$0 = E\varepsilon_t = d_0 EX_t + \dots d_p EX_{t-p} = \mu \left(\sum_{i=1}^p d_i \right),$$

a tudíž $\mu = 0$. Ak by $\sum_{i=1}^p d_i = 0$, pak by to znamenalo, že 1 je také kořenem polynomu $d(z)$, což je spor s předpokladem uvedené věty;

- za platnosti podmínek předchozí věty také platí, že posloupnost $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ lze vyjádřit v **kauzálním tvare**, t.j. existuje vyjádření

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{t-k},$$

kde koeficienty c_k jsou určeny vztahem $c(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \frac{1}{d(z)}$,
pro $|z| \leq 1$.

Příklad: $AR(1)$ proces

Príklad

- ❑ nechť $X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t$, pro $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ bílý šum;
- ❑ polynom $d(z) = 1 - az$ má kořen v bodě $z = 1/a$;
- ❑ kořen je vně jednotkového kruhu $\Leftrightarrow |a| > 1$;
- ❑ potom platí, že

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t = a(aX_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \dots = a^k X_{t-k} + \sum_{\ell=0}^{k-1} a^\ell \varepsilon_{t-\ell};$$

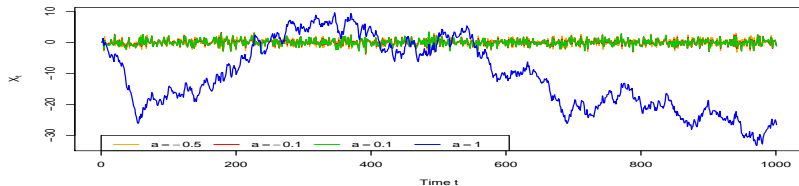
- ❑ a náhodnou veličinu X_t lze (limitním přechodem) vyjádřit kauzálně jako

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \varepsilon_{t-k}$$

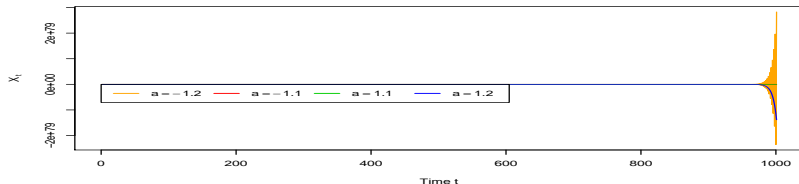
(t.j. lineární kombinaci minulosti posloupnosti $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$)

Příklad: $AR(1)$ proces

□ pro parametr $|a| \leq 1$



□ pro parametr $|a| > 1$



Příklad: $AR(1)$ proces

- Rozptyl procesu lze spočítat i pomocí soustavy rovnic:

$$EX_t X_{t-1} = aEX_{t-1}^2 + E\varepsilon_t X_{t-1}$$

$$EX_t \varepsilon_t = aEX_{t-1} \varepsilon_t + E\varepsilon_t^2$$

- pak kvůli nekorelovanosti ε_t a X_{t-1} máme $EX_{t-1} \varepsilon_t = 0$ a tudíž

$$\begin{aligned}\sigma^2 = E\varepsilon_t^2 &= EX_t \varepsilon_t = EX_t (X_t - aX_{t-1}) = R(0) - aR(1) \\ &= R(0)[1 - ar(1)]\end{aligned}$$

- z první rovnice pak dostaneme

$$R(1) = aR(0) \quad \Leftrightarrow \quad a = R(1)/R(0) = r(1)$$

- pro rozptyl $R(0)$ procesu $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ dostaneme

$$R(0) = \frac{\sigma^2}{1 - a^2} = \frac{\sigma^2}{1 - (r(1))^2};$$

Yule-Walkerovy rovnice

Za předpokladu, že ε_t je nekorelované s $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3} \dots$ (vid' také předchozí věta o stacionaritě autoregresní posloupnosti), lze analogicky postup aplikovat i pro obecný autoregresní proces řádu p ;

- uvažujme obecný autoregresní proces

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t \quad (12)$$

- rovnici autoregresního procesu vynásobíme postupně veličinami $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}$ a aplikujeme operátor středné hodnoty:

$$EX_t X_{t-1} = a_1 EX_{t-1}^2 + \dots + a_p EX_{t-p} X_{t-1} + E\varepsilon_t X_{t-1}$$

$$EX_t X_{t-2} = a_1 EX_{t-1} X_{t-2} + \dots + a_p EX_{t-p} X_{t-2} + E\varepsilon_t X_{t-2}$$

.....

$$EX_t X_{t-p} = a_1 EX_{t-1} X_{t-p} + \dots + a_p EX_{t-p}^2 + E\varepsilon_t X_{t-p}$$

Yule-Walkerovy rovnice

- soustavu rovnic lze ekvivalentně přepsát v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} R(0) & \dots & R(p-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ R(p-1) & \dots & R(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(1) \\ \vdots \\ R(p) \end{pmatrix}$$

- neboli také pomocí autokorelační funkce $r(\cdot)$ jako

$$\begin{pmatrix} r(0) & \dots & r(p-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ r(p-1) & \dots & r(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(1) \\ \vdots \\ r(p) \end{pmatrix}$$

- pomocí této soustavy lze spočítat hodnoty autokorelační funkce v časech $1, 2, \dots, p$. Pro hodnoty $r(k)$, kde $k > p$ lze využít diferenční rovnici

$$r(k) - a_1 r(k-1) - \dots - a_p r(k-p) = 0,$$

kterou získáme vynásobením rovnice (12) veličinou X_{t-k} a aplikováním operátoru střední hodnoty;

Výpočet rozptylu pro $AR(p)$

- pro výpočet rozptylu $R(0)$ stačí vynásobit rovnici (12) veličinou ε_t a opět aplikovat operátor střední hodnoty;
- přímočaře dostaneme vyjádření

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E\varepsilon_t^2 = EX_t\varepsilon_t = EX_t(X_t - a_1X_{t-1} - \dots - a_pX_{t-p}) \\ &= R(0)[1 - a_1r(1) - \dots - a_pr(p)];\end{aligned}$$

- pro rozptyl $AR(p)$ procesu teda platí, že

$$\text{Var}X_t = R(0) = \frac{\sigma^2}{1 - a_1r(1) - \dots - a_pr(p)};$$

AR(2) Příklad

Príklad

Nechť posloupnost $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum s jednotkovým rozptylem, $\sigma^2 = 1$.
Definujme AR(2) proces jako

$$X_t - 0.5X_{t-1} + 0.06X_{t-2} = \varepsilon_t.$$

- Spočtete střední hodnotu a rozptyl;
- Určete, zda je proces $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ stacionární;
- Pomocí Yule-Walkerových rovnic spočítejte autokorelační funkci;

Zhrnutí/opakování

- ❑ Lineární (stochastické) modely časových řád (*MA* a *AR* procesy);
- ❑ *MA(1)*: Posloupnost klouzavých průměrů řádu $q \in \mathbb{N}$
 - ❑ závislost mezi X_t a X_{t-k} mizne pro $k > q$;
 - ❑ obecně je *MA(q)* proces stacionární (slabě);
 - ❑ charakterizace pomocí autokovarianční a autokorelační funkce;
- ❑ *AR(p)*: Autoregresní posloupnost řádu $p \in \mathbb{N}$:
 - ❑ nenulová autokorelace a mnohem složitější závislostní struktúra;
 - ❑ stacionarita pouze pro některé speciální případy (kořeny charakteristického polynomu vně jednotkového kruhu);
 - ❑ možnost vyjádřit stacionární *AR* proces v kauzální formě;
- ❑ Yule-Walkerové rovnice
 - ❑ výpočetný nástroj pro vyjádření autokovarianční a autokorelační funkce (charakterizace) procesu (časové řady);

Odhad neznámých parametrů

- ❑ Yule-Walkerove rovnice lze aplikovat i obráceným způsobem: použít data z procesu a **odhadnout neznáme parametry** a_1, \dots, a_p v $AR(p)$ procesu;
- ❑ pomocí dat (konkrétní realizace procesu $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$) lze **odhadnout hodnoty autokovarianční funkce** $\hat{R}(0), \dots, \hat{R}(p)$;
- ❑ hodnoty odhadov autokovarianční funkce v daných bodech **dosadit do Yule-Walkerových rovnic** a řešit pro neznáme parametry a_1, \dots, a_p ;
- ❑ otázka pouze zůstava, jak správně nebo vhodně určit příslušný řád autokovariančního procesu, parametr $p \in \mathbb{N}$;

(existují různá kritéria, tzv. "rules-of-thumb", nebo lze použít tzv. "expert judgement", nebo hlubší statistickou analýzu a formální statistické testy)

Konzistence odhadu parametrů

Věta: Konzistence odhadu parametrů v $AR(p)$ procesu

Nechť $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je autoregresní posloupnost řádu $p \in \mathbb{N}$ generovaná modelem

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t,$$

kde $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených n.v. se střední hodnotou nula a konečným rozptylem $\sigma^2 < \infty$. Nechť všechny kořeny polynomu $d(z) = 1 - a_1 z - \dots - a_p z^p$ leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině. Nechť $\hat{\mathbf{a}}_n$ je odhad parametrů $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)^\top$ pomocí Yule-Walkerových rovnic, založený na pozorováních X_1, \dots, X_n a odhadech $\hat{R}(k)$ a $\hat{r}(k)$, pro $k \geq 0$. Pak platí, že

$$\sqrt{n}(\hat{\mathbf{a}}_n - \mathbf{a}) \xrightarrow{\mathcal{D}} N_p(\mathbf{0}, \sigma^2 \Gamma^{-1}),$$

kde $\Gamma = (R(i-j))_{ij}$.

Asymptotické rozdělení odhadů parametrů

- konvergence $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ v předchozí větě značí **konvergenci v distribuci**;
- ekvivalentně je možné také napsat, že platí

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p} \left| P(\sqrt{n}(\hat{a}_1 - a_1) \leq x_1, \dots, \sqrt{n}(\hat{a}_p - a_p) \leq x_p) - F(x_1, \dots, x_p) \right| \rightarrow 0,$$

pro $n \rightarrow \infty$, kde $F : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, 1]$ značí združenou distribuční funkci mnohorozměrného normálního rozdělení $N_p(\mathbf{0}, \sigma^2 \Gamma^{-1})$;

- hustota mnohorozměrného normálního rozdělení $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ je definována:

$$f(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\},$$

pro $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^\top \in \mathbb{R}^p$, kde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p)^\top \in \mathbb{R}^p$ je vektor středních hodnot a Σ pozitivně definitní, symetrická varianční matice;

Odhad autokovarianční/autokorelační funkce

- ❑ máme k dispozici konkrétní **realizaci časové řady** $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ až do nějakého času $n \in \mathbb{N}$ (např. posloupnost $\{x_i; i = 1, \dots, n\}$);
- ❑ to znamená, že máme k dispozici pozorované hodnoty (realizace) náhodných veličin X_n, X_{n-1}, \dots, X_1 ;
- ❑ dále také předpokládáme, že proces $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je generovaný rovnicí

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t;$$

- ❑ parametre $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ jsou neznáme;
- ❑ **Jak pomoci empirických dat odhadnout parametry a_1, \dots, a_p ?**

Odhad autokovarianční/autokorelační funkce

- v praktických případech je k dispozici **pouze konečná historie** (realizace) časové řady $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$, t.j., pozorování X_1, \dots, X_n (nebo x_1, \dots, x_n);
- odhad **autokovarianční funkce** $R(k)$ pro libovolné $k \in \{0, n-1\}$ získáme pomocí vztahu

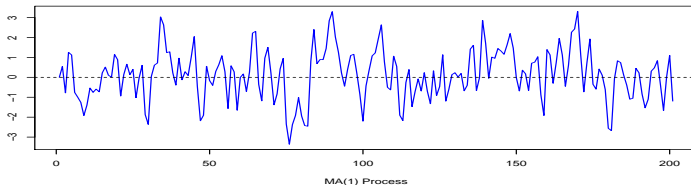
$$\widehat{R}(k) = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} \left(X_{i+k} - \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} X_{j+k} \right) \left(X_i - \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} X_j \right)$$

- odhad příslušné **autokorelační funkce** $r(k)$ pro libovolné $k \in \{0, n-1\}$ pak získáme jako

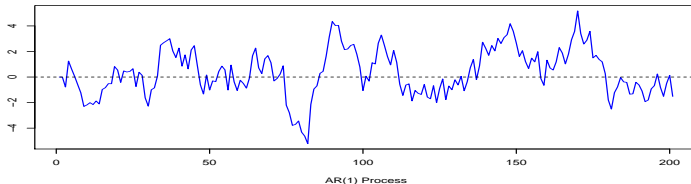
$$\widehat{r}(k) = \frac{\widehat{R}(k)}{\widehat{R}(0)}.$$

Simulace: MA & AR proces prvního řádu

□ MA(1): $X_t = 0.8\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad | \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1)$

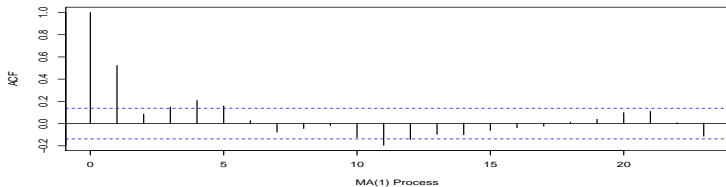


□ AR(1): $X_t = 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t \quad | \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1)$

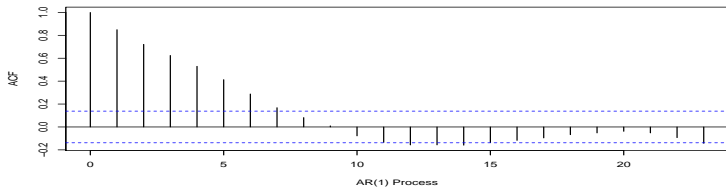


Simulace: Autokorelační funkce

□ MA(1): $X_t = 0.8\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad | \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1)$

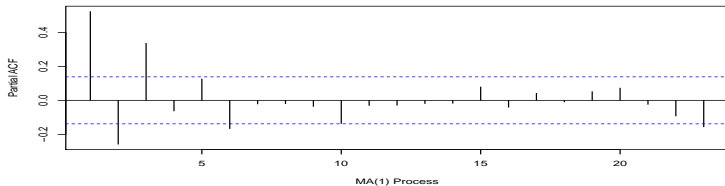


□ AR(1): $X_t = 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t \quad | \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1)$

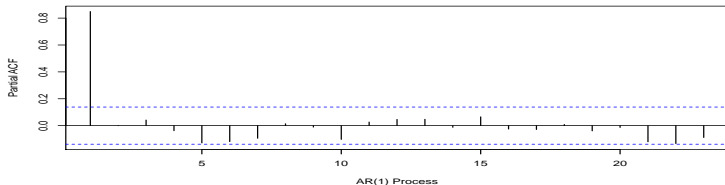


Simulace: Parciální autokorelační funkce

□ MA(1): $X_t = 0.8\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad | \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1)$

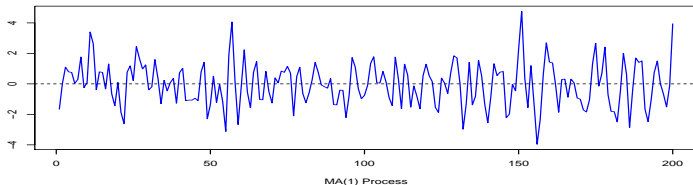


□ AR(1): $X_t = 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t \quad | \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1)$

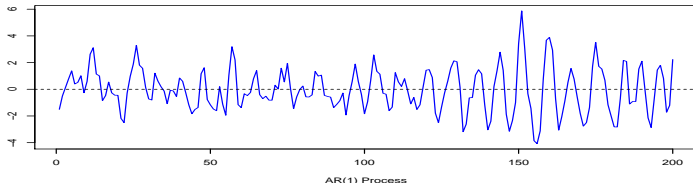


Simulace: MA & AR proces třetího řádu

□ MA(1): $X_t = 0.8\varepsilon_{t-1} - 0.4\varepsilon_{t-2} - 0.2\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t \quad | \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1)$

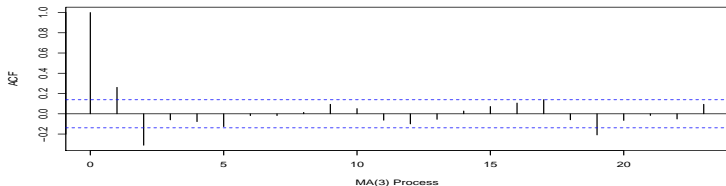


□ AR(1): $X_t = 0.8X_{t-1} - 0.4X_{t-2} - 0.2X_{t-3} + \varepsilon_t \quad | \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1)$

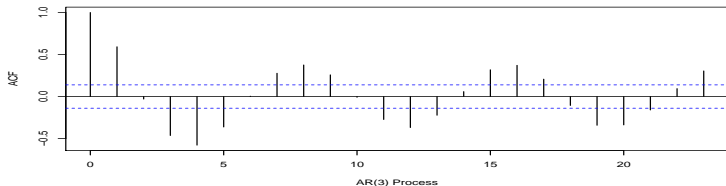


Simulace: Autokorelační funkce

□ MA(1): $X_t = 0.8\varepsilon_{t-1} - 0.4\varepsilon_{t-2} - 0.2\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t \mid \varepsilon_t \sim N(0, 1)$

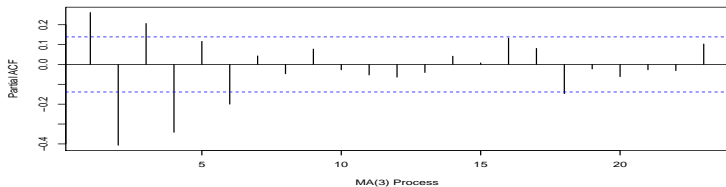


□ AR(1): $X_t = 0.8X_{t-1} - 0.4X_{t-2} - 0.2X_{t-3} + \varepsilon_t \mid \varepsilon_t \sim N(0, 1)$:

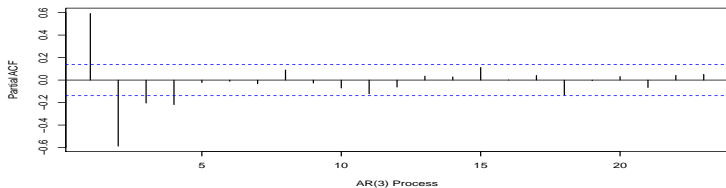


Simulace: Parciální autokorelační funkce

□ MA(1): $X_t = 0.8\varepsilon_{t-1} - 0.4\varepsilon_{t-2} - 0.2\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t \mid \varepsilon_t \sim N(0, 1)$



□ AR(1): $X_t = 0.8X_{t-1} - 0.4X_{t-2} - 0.2X_{t-3} + \varepsilon_t \mid \varepsilon_t \sim N(0, 1)$:



Neúplnost odhadů $\widehat{R}(k)$ a $\widehat{r}(k)$

- ❑ odhad autokovarianční funkce $R(k)$ nějaké posloupnosti se nazývá **výběrová autokovarianční funkce** – používáme značení $\widehat{R}(k)$;
- ❑ odhad autokorelační funkce $r(k)$ nějaké posloupnosti se nazývá **výběrová autokorelační funkce** – používáme značení $\widehat{r}(k)$;
- ❑ pro necentrovanou posloupnost $\{X_t; t \in \{1, \dots, n\}\}$ odhadujeme střední hodnotu $\mu \in \mathbb{R}$ pomocí **výběrové střední hodnoty** definované

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i;$$

- ❑ **výběrová autokovariační/autokorelační funkce** spočtená na základě realizace X_1, \dots, X_n poskytuje **pouze omezenou informaci** o celkové kovarianční/korelační struktuře posloupnosti;
- ❑ na základě realizace X_1, \dots, X_n totiž logicky není možné spočítat hodnoty pro $\widehat{R}(k)$ a $\widehat{r}(k)$, kde $k \geq n$;

Modely $ARMA(p, q)$

- posloupnosti klouzavých průměrů a autoregresních posloupností lze vzájemně kombinovat do tzv. $ARMA$ modelů;

Definice: $ARMA(p, q)$ proces

Nechť posloupnost $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum s konečným rozptylem $\sigma^2 < \infty$. Pak náhodnou posloupnost

$$d_0 X_t + d_1 X_{t-1} + \dots + d_p X_{t-p} = a_0 \varepsilon_t + \dots + a_q \varepsilon_{t-q}, \quad (13)$$

pro $t \in \mathbb{Z}$ a nějaké koeficienty $d_0, \dots, d_p, a_0, \dots, a_q \in \mathbb{R}$, takové, že $d_0, d_p, a_0, a_q \neq 0$, nazýváme $ARMA(p, q)$ model.

- podobně jako v předchozích případech nás zajímá, za akých předpokladů bude $ARMA(p, q)$ posloupnost splňovat definici stacionarity (slabě);
- ekvivaletní zápis $ARMA(p, q)$ modelu lze vyjádřit pomocí vztahu

$$X_t = \tilde{d}_1 X_{t-1} + \dots + \tilde{d}_p X_{t-p} + \tilde{a}_0 \varepsilon_t + \dots + \tilde{a}_q \varepsilon_{t-q};$$

Stacionarita $ARMA(p, q)$ procesů

□ předpokládejme, že v rovnici (13) je $d_0 = a_0 = 1$ a definujeme polynomy

$$d(z) = 1 + d_1z + \cdots + d_pz^p, \quad n(z) = 1 + a_1z + \cdots + a_qz^q; \quad (14)$$

Věta: Stacionarita $ARMA(p, q)$ modelů

Nechť všechny kořeny polynomu $d(z)$ leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině a navíc, nechť jsou polynomy $d(z)$ a $n(z)$ nesoudělné, t.j. nemají společné kořeny. Pak je posloupnost definovaná rovnicí (13) slabě stacionární, s nulovou střední hodnotou, a navíc, lze proces $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ vyjádřit v kauzálním tvaru, t.j.

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{t-k},$$

kde c_k jsou určeny vztahem $c(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \frac{n(z)}{d(z)}$,
pro $|z| \leq 1$.

Autokovariance/autokorelace ARMA procesů

- ❑ pokud by polynomy $d(z)$ a $n(z)$ měly společné kořeny, potom by polynom $c(z) = n(z)/d(z)$ určoval $ARMA(m, n)$ proces, pro $m < p$ a $n < q$;
- ❑ **autokovarianční funkce** stejně tak jako **autokorelační funkce** obecného $ARMA(p, q)$ procesu se spočte analogicky, jako v případě $AR(p)$ procesů, pomocí Yule-Walkerových rovnic.

Samostatný úkol

Uvažujte obecný $ARMA(1, 1)$ proces, definovaný předpisem

$$X_t + aX_{t-1} = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1},$$

pro $t \in \mathbb{Z}$, kde $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum.

- ❑ definujte podmínky pro které je posloupnost $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ slabě stacionární;
- ❑ nájděte autokovarianční a autokorelační funkci posloupnosti $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$;
- ❑ pokud existuje, nájděte kauzální vyjádření procesu $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$;

Lineární filtrace

Definice: Lineární filtrace

Nechť $\{\varepsilon; t \in \mathbb{Z}\}$ je centrovaná, slabě stacionární posloupnost a $\{\xi_k; k \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost koeficientů takových, že $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\xi_k| < \infty$. Pak řekneme, že posloupnost

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \varepsilon_{t-k}$$

vznikla **lineární filtraci** z posloupnosti $\{\varepsilon; t \in \mathbb{Z}\}$. Posloupnost koeficientů $\{\xi_k; k \in \mathbb{Z}\}$ se nazývá **lineární filtr**.

Definice: Kauzální filtr

Nechť $\{\xi_k; k \in \mathbb{Z}\}$ je lineární filtr. Pokud platí, že $\xi_k = 0$ pro $k < 0$, pak je filtr **kauzální**, t.j. fyzikálně uskutečnitelný.

Lineární modely, procesy, systémy...

Definice: Lineární proces

Náhodnou posloupnost $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ nazýváme **lineárním procesem**, pokud existuje posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin ε_t , pro $t \in \mathbb{Z}$, s nulovou střední hodnotou a konečným rozptylem a lineární filtr $\{\xi_k; k \in \mathbb{Z}\}$ takový, že

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \varepsilon_{t-k}.$$

Lineární proces je navíc kauzální, pokud je příslušný filtr kauzální.

- **ARMA(p, q)** model je ekvivalentní s obecnou rovnicí lineárního systému (vid' Kapitola 3). Rovnice ARMA modelu ale určuje vztah nikoli mezi nenáhodnými (deterministickými) posloupnostmi vstupů a výstupu, ale mezi náhodnými posloupnostmi bílého šumu a ARMA procesem $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$.

Invertibilita ARMA posloupnosti

Definice: Invertibilita ARMA posloupnosti

Stacionární ARMA(p, q) posloupnost $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ vzniklá z bílého šumu $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$, se nazývá **invertibilní**, jestliže existuje posloupnost konstant $\{\psi_k; k \in \mathbb{Z}\}$ taková, že $\sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k| < \infty$ a platí, že

$$\varepsilon_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k X_{t-k}.$$

- z pohledu posloupnosti $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ by se dalo říct, že se jedná o kauzální posloupnost vzhledem k posloupnosti $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$;

Příklad: Striktná versus slabá stacionarita

Samostatný úkol

Nechť je posloupnost $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ definovaná předpisem

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

pro $|\rho| < 1$ a posloupnost $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je daná předpisem

$$\varepsilon_t = \begin{cases} Z_t & t = 2k, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_t^2 - 1) & t = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

kde $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin s normovaným normálním rozdělením $N(0, 1)$.

- Rozhodněte, zda je posloupnost $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ striktně stacionární.
- Rozhodněte, zda je posloupnost $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ slabě stacionární.
- Spočtete autokovarianční funkci posloupnosti $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$.

Invertibilita ARMA posloupnosti

Věta: Invertibilita ARMA procesů

Nechť $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je stacionární ARMA(p, q) posloupnost, definovaná rovnicí (13), pro $d_0 = a_1 = 1$. Nechť polynomy $d(z)$ a $n(z)$ definované vztahy (14) nemají společné kořeny a navíc, nechť kořeny polynomu $n(z)$ leží vně jednotkového komplexního kruhu. Pak je posloupnost $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ **invertibilní** a lze psát

$$\varepsilon_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k X_{t-k},$$

pro $k \in \mathbb{Z}$, kde koeficienty ψ_k jsou určeny vztahem

$$\Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^k = \frac{d(z)}{n(z)},$$

pro $|z| \leq 1$.

Lineární predikce v časových řadách

- ❑ pomerně častý praktický problém v časových řadách: **predikce**;
- ❑ predikce/předpověď budoucích hodnot na základě pozorované realizace;
- ❑ z teoretického hlediska se jedná o pomerně náročnou úlohu, která vede na podmíněné střední hodnoty...
- ❑ **Jak to ale funguje v praktických problémech?**

Lineární predikce v časových řadách

- ❑ pomerně častý praktický problém v časových řadách: **predikce**;
- ❑ predikce/předpověď budoucích hodnot na základě pozorované realizace;
- ❑ z teoretického hlediska se jedná o pomerně náročnou úlohu, která vede na podmíněné střední hodnoty...
- ❑ **Jak to ale funguje v praktických problémech?**

- ❑ **Jednoduchý příklad**: predikce pozorování X_{t+1} na základě realizace X_t (předpověď o jeden krok dopředu na základě jediného pozorování);
- ❑ požadovaná predikce pro X_{t+1} je lineární: $\hat{X}_{t+1} = a + bX_t$;
- ❑ navíc předpokládáme, že $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je slabě stacionární;
- ❑ kvalita predikce pomoci **střední kvadratické chyby** mezi X_{t+1} a \hat{X}_{t+1} ;

Predikce X_{t+1} formálně

- z formálního matematického hlediska řešíme minimalizační problém

$$\min_{a,b \in \mathbb{R}} E [X_{t+1} - (a + bX_t)]^2 = \min_{a,b \in \mathbb{R}} E [X_{t+1} - \mu - \tilde{a} - b(X_t - \mu)]^2,$$

$$\text{kde } \tilde{a} = a + \mu(b - 1);$$

- derivováním podle \tilde{a} a b (a formální záměna integrálu a derivace):

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{a}} : -2E [X_{t+1} - \mu - \tilde{a} - b(X_t - \mu)] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b} : -2E [X_{t+1} - \mu - \tilde{a} - b(X_t - \mu)] (X_t - \mu) = 0$$

- z první rovnice dostaneme okamžitě, že $\tilde{a} = 0$;
- z druhé rovnice pak dostaneme, že

$$b = \frac{R(1)}{R(0)} = r(1);$$

- Predikce: $\hat{X}_{t+1} = a + bX_t = \mu + b(X_t - \mu) = \mu + r(1)(X_t - \mu)$;

Predikce X_{t+1} formálně

- ❑ kvalita predikce sa posuzuje pomoci střední kvadratické chyby/odchýlky jako

$$\begin{aligned}MSE &= E(X_{t+1} - \widehat{X}_{t+1})^2 = E[X_{t+1} - \mu - r(1)(X_t - \mu)]^2 \\ &= R(0) [1 + r(1)^2 - 2r(1)^2] = R(0)(1 - r(1)^2); \end{aligned}$$

- ❑ čím silnější je lineární závislost mezi X_t a X_{t+1} , tím menší je chyba predikce (t.j., přesnější předpověď);
- ❑ obecně lze postup zobecnit na úlohu najít predikci pro X_{t+1} , na základě pozorování $X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-p}$;
- ❑ následně je samozřejmě možné použít predikci \widehat{X}_{t+1} a spočítat další predikci pro následující krok X_{t+2} ;

Příklad: predikce na základě X_t a X_{t-1}

Samostatný úkol

Předpokládejme, že posloupnost $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je slabě stacionární.

- ❑ spočtete obecný vztah pro predikci pozorování X_{t+1} na základě hodnot X_t a X_{t-1} ;
- ❑ jako kritérium kvality predikce použijte střední kvadratickou chybu/odchýlku;

Samostatný úkol

- ❑ Uvažujte model $ARMA(2, 1)$ daný předpisem

$$X_t - 0.5X_{t-1} + 0.04X_{t-2} = \varepsilon_t + 0.25\varepsilon_{t-1},$$

pro $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ bílý šum. Nайдěte autokovarianční a autokorelační funkci procesu a jeho kauzální vyjádření.

Kauzalita a invertibilita ARMA procesů

Samostatný úkol

Nechť $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je ARMA(2, 1) posloupnost definovaná rovnicí

$$X_t - (a + b)X_{t-1} + abX_{t-2} = \varepsilon_t - a\varepsilon_{t-1},$$

kde $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum. Diskutujte podmínky kauzality a invertibility vzhledem k neznámým parametrům $a, b \in \mathbb{R}$.

Spočtěte autokovarianční a autokorelační funkci posloupnosti $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$.

Zhrnutí/opakování

- ❑ Lineární (stochastické) modely časových řád: *MA*, *AR* a *ARMA* procesy; (náhodné procesy vytvořené z bílého šumu, indexovaný nejvýše spočetnou množinou indexů T - napr. množinou celých čísel \mathbb{Z})
- ❑ Základná charakterizace procesů:
 - ❑ střední hodnota procesu $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$: $\mu_t = EX_t$;
 - ❑ rozptyl procesu $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$: $\sigma^2(t) \equiv R(0, t)$;
 - ❑ autokovarianční a autokorelační funkce $R(k, t)$ a $r(k, t)$;
- ❑ Další vlastnosti modelů časových řád:
 - ❑ silná (striktní) a slabá stacionarita $(\mu, \sigma^2, R(k), r(k))$;
 - ❑ kauzálnost a invertibilita procesu;
 - ❑ lineární filtrace;
- ❑ Využití v praktických (reálných úlohách):
 - ❑ modelování procesů a odhadování koeficientu pomoci Yule-Walkerových rovnic (konzistentní odhady);
 - ❑ lineární predikce v časových řadách (předpověď následujících pozorování na základě těch předchozích);
- ❑ V praxi sa často používajú komplexnejšie modely...
 - ❑ napr. VARMA, NARMA, ARIMA, VARIMA, ARCH, GARCH, etc.;

Kapitola 6

Poissonův proces

Náhodné procesy se spojitým časem

□ Stochastický (náhodný) proces

↔ posloupnost (systém) reálných náhodných veličin $\{X_t; t \in T\}$ definovaných na stejném pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) ;

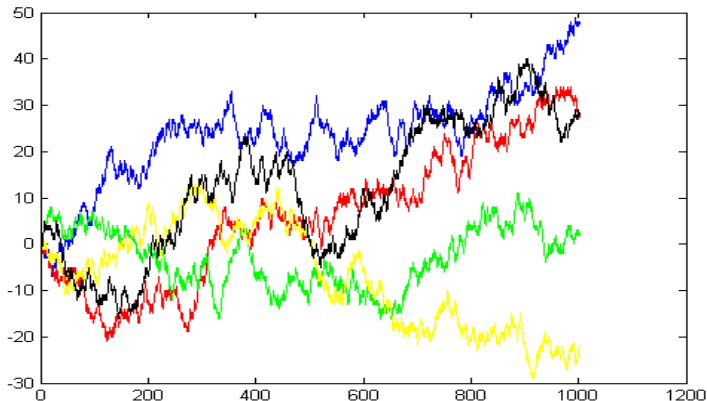
□ Proces so spojitým časem

↔ v případě, že $T \subseteq \mathbb{R}$, pak říkáme, že se jedná o proces se spojitým časem, t.j., hodnota procesu $\{X_t; t \in T\}$ je definována v každém časovém okamžiku;

□ Trajektórie procesu

↔ pro konkrétné $\omega \in \Omega$ (elementární jev) je $X_t(\omega) \equiv X(\omega)(t)$ funkce definována na $T \subset \mathbb{R}$ (t.j., trajektórie procesu – jedna konkrétní realizace);

Trajektorie procesu



Čítací proces

Definice: Čítací proces

Řekneme, že náhodný proces $\{N_t; t \geq 0\}$ (proces se spojitím časem) je **čítací proces**, pokud nabývá celočíselných nezáporných hodnot a zároveň platí, že

$$\text{pokud } s \leq t \quad \implies \quad N(s) \leq N(t).$$

- ❑ Hodnotu $N(t)$ interpretujeme jako počet událostí, které nastaly do času t .
- ❑ Ekvivalentně lze proces $\{N_t; t \geq 0\}$ definovat jako proces, který má zprava spojitě a neklesající trajektorie, nabývá pouze celočíselných hodnot, a začíná z nezáporné hodnoty, t.j. $N(0) \geq 0$;

Proces s nezávislými přírůstky

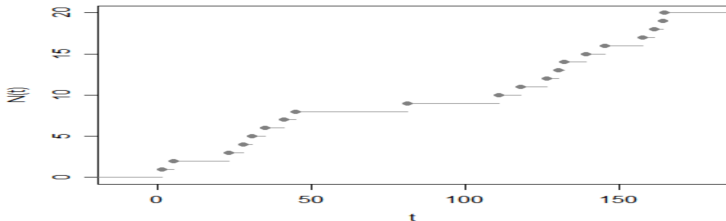
Definice: Nezávislé přírůstky

Řekneme, že proces $\{N(t); t \geq 0\}$ má **nezávislé přírůstky**, pokud pro každé $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, $n \in \mathbb{N}$ a $t_i \in \mathcal{T}$ pro $i = 1, \dots, n$ platí, že $N(t_n) - N(t_{n-1}), \dots, N(t_1) - N(t_0)$ jsou **nezávislé náhodné veličiny**.

Proces s nezávislými přírůstky

Definice: Nezávislé přírůstky

Řekneme, že proces $\{N(t); t \geq 0\}$ má **nezávislé přírůstky**, pokud pro každé $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, $n \in \mathbb{N}$ a $t_i \in T$ pro $i = 1, \dots, n$ platí, že $N(t_n) - N(t_{n-1}), \dots, N(t_1) - N(t_0)$ jsou **nezávislé náhodné veličiny**.



Poissonův proces

Definice: Poissonův proces

Náhodný proces $\{N(t); t \geq 0\}$ se nazývá **homogénní Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$** , pokud platí:

- ❑ $N(0) = 0$;
 - ❑ proces má nezávislé přírůstky;
 - ❑ přírůstky $N(t + h) - N(t)$ mají Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda \cdot h$;
-
- ❑ nezávislé přírůstky Poissonovho procesu mají Poissonovo rozdělení s parametrem, který je přímo úměrný délce časového intervalu;
 - ❑ parameter intenzity, $\lambda > 0$ je střední počet události za jednotku času;
 - ❑ souvislost Poissonovho rozdělení s limitním binomickým rozdělením;

Poissonův proces

- ❑ Poissonův proces je často interpretován jako náhodný **bodový proces** na reální přímce (půlpřímce);
- ❑ Na reální přímce je Poissonův proces speciálním případem Markovského procesu se spojeným časem (Markovská vlastnost);
- ❑ Hodně často používaný náhodný proces s využitím pro modelování náhodných (a na sobě nezávislých) událostí v čase;
 - ❑ pojišťovnictví, systémy obsluhy, atd'.
 - ❑ chování zákazníků, modelování chyb a poruch, atd'.
- ❑ Existuje mnoho různých a užitečných zobecnění Poissonova procesu;
 - ❑ Poissonův proces s variabilní intenzitou $\lambda(t)$;
 - ❑ prostorový Poissonův proces (mnohorozměrná zobecnění);
 - ❑ procesy obnovy a zrodu a zániku (tzv. renewal a birth-death procesy);
 - ❑ značkové Poissonové procesy – napr. Cox proces;
 - ❑ procesy pro závislé události v čase – tzv. Hawkesové procesy;
 - ❑ mnohé další...

Příklad: Poissonův proces

Príklad

Telefonní ústředna a počet hovorů

Jednotlivé přichozí volání jsou na sobě nezávislé. Potenciálně je ale velký počet lidí, kteří mohou zavolat, ale u každého jednotlivce se jedná pouze o hodně malou pravděpodobnost, že skutečně zavolá na ústřednu. Z historických dat např. víme, že na telefonní ústřednu přijde v průměru 5 hovorů za minutu.

- ❑ Jaká je pravděpodobnost, že za půl minuty nepříde žádné volání?
- ❑ Jaká je pravděpodobnost, že během pět sekund přijde alespoň 2 volání?

- ❑ pro Poissonův proces obecně platí, že $N(0) = 0$, proto také platí, že

$$N(t) = N(t) - N(0) \sim Po(\lambda t)$$

a proto také platí, že

$$P[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad \text{pro } k = 0, 1, \dots$$

Doby mezi událostmi v Poissonovém procesu

Věta: Doby mezi událostmi v Poissonovém procesu

Nechť $\{N(t); t \geq 0\}$ je Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$ a necht' $\{\xi_n; n \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost náhodných veličin definovaná předpisem

$$\xi_n = \inf\{t > 0; N(t) = n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Pak náhodné veličiny $T_n = \xi_n - \xi_{n-1}$, pro $n = 1, 2, \dots$, pro $\xi_0 = 0$, jsou **nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda > 0$** a nazývají se **doby mezi událostmi v Poissonovém procesu $\{N(t); t \geq 0\}$** .

Exponenciální a Erlangovo rozdělení

- náhodná veličina ξ_n pro $n \in \mathbb{N}$ se nazývá **doba do n -té události**;
- náhodná veličina ξ_n pro $n \in \mathbb{N}$ má **Erlangovo rozdělení** s hustotou

$$f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad \text{pro } x \geq 0.$$

- **Erlangovo rozdělení** s parametry $\lambda > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ je rozdělení součtu n nezávislých náhodných veličin s exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda > 0$ a jedná se o speciální případ **Gamma rozdělení**;
- exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda > 0$ je **rozdělení bez paměti**, t.j., pro $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ platí, že

$$P[X > s + h | X > s] = P[X > h].$$

Poissonův proces a exponenciální rozdělení

Věta: Exponenciální rozdělení a Poissonův proces

Nechť T_1, T_2, \dots , je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin s exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda > 0$. Nechť $\xi_n = \sum_{k=1}^n T_k$. Pak

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{\xi_k \leq t\}}$$

definuje Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$.

- pokud teda známe počet události do nějakého času $T > 0$, pak je výskyt těchto události v intervalu $[0, T]$ tzv. "binomický", t.j., časy událostí jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, T]$;

Příklad: Binomická vlastnost

Příklad

Nechť $\{N(t); t \geq 0\}$ je Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$ a necht' $N(T) = n$ a $s \in (0, T)$. Pak jednoduchým výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned} P[N(s) = k | N(T) = n] &= \frac{P[N(s) = k, N(T) = n]}{P[N(T) = n]} \\ &= \frac{P[N(s) = k, N(T) - N(s) = n - k]}{P[N(T) = n]} \\ &= \frac{P[N(s) = k] \cdot P[N(T) - N(s) = n - k]}{P[N(T) = n]} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{s}{T}\right)^k \left(1 - \frac{s}{T}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

- Žádná část intervalu $[0, T]$ není preferována a každý podinterval má rovnaku šanci (**úměrnou své délce**), že do něj padne událost. Body jsou do intervalu $[0, T]$ umisťovány nezávisle na sobě.

Poissonův proces s konstantní intenzitou

- Pro obecný Poissonův proces $\{N(t); t \geq 0\}$ s konstantní intenzitou $\lambda > 0$ také platí následující:
 - $P[N(t+h) = n+1 | N(t) = n] = \lambda h + o(h)$
 - $P[N(t+h) = n | N(t) = n] = 1 - \lambda h + o(h)$
 - $P[N(t+h) > n+1 | N(t) = n] = o(h)$

pro funkci $o(h)$ takovou, že

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{o(h)}{h} \rightarrow 0.$$

Samostatný úkol

Ověřte, že uvedené vlastnosti skutečně platí pro obecný Poissonův proces s konstantní intenzitou $\lambda > 0$.

Příklad: Škody v neživotnem pojištění

Příklad

Předpokládáme, že okamžiky pojistných události v čase tvoří Poissonův proces $\{N(t); t \geq 0\}$ s konstantní intenzitou $\lambda > 0$ a výše škod Y_k pro $k \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou $EY_k = \mu$.

- $S(t) = \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k$, pro $t \geq 0$ a $Y_0 = 0$ je tzv. **složený Poissonův proces**;
- veličina $S(t)$ udává **celkovou výši škod** do času $t \geq 0$ a platí

$$\begin{aligned} ES(t) &= E \left[E[S(t)|N(t)] \right] = E \left[E \left[\sum_{k=0}^{N(t)} Y_k | N(t) \right] \right] \\ &= E \left[N(t) \cdot EY_k \right] = EY_k \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} ne^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \right) = \lambda t \mu; \end{aligned}$$

K úhradě škodních nákladů by pojišťovna měla dostávat od pojištěných klientů pojistné ve výši $\lambda\mu$ za jednotku času.

Příklad: Systém obslužní linky

Príklad

Uvažujme obslužní linku, která poskytuje určitou službu (např., pokladna v obchodě, telefonní linka, ...). Chceme modelovat chování takového systému.

- ❑ předpokládáme, že události (t.j., např. příchody zákazníků) v systému tvoří Poissonův proces s konstantní intenzitou $\lambda > 0$;
- ❑ když je linka obsazená, tvoří se fronta;
- ❑ doby obsluhy jednotlivých zákazníků jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem $\mu > 0$;
- ❑ veličina $X(t)$ značí počet zákazníků v systému (ve frontě a při obsluhu);
- ❑ označme $p_k(t) = P[X(t) = k]$, pro $k = 0, 1, \dots$;
- ❑ předpokládáme, že také platí následující:

$$P(X(t+h) = k+1 | X(t) = k) = \lambda h + o(h)$$

$$P(X(t+h) = k | X(t) = k) = 1 - \lambda h + o(h)$$

$$P(X(t+h) > k+1 | X(t) = k) = o(h)$$

Příklad: Systém obslužní linky

Príklad

□ pro doby obsluhy pak platí: $T \sim \text{Exp}(\mu)$ a proto také platí:

$$P(\text{obsluha skončí v čase } (t, t + h] | \text{zákazník je obsluhován v čase } t) = \mu h + o(h)$$

$$P(\text{obsluha neskončí v čase } (t, t + h] | \text{zákazník je obsluhován v čase } t) = 1 - \mu h + o(h)$$

$$P(\text{více zákazníků obsluženo v } (t, t + h] | \text{zákazník je obsluhován v čase } t) = o(h)$$

$$P(\text{přijde a odejde stejný počet v } (t, t + h] | \text{zákazník je obsluhován v čase } t) = o(h)$$

Samostatný úkol

Použijte vlastnosti exponenciálního rozdělení s parametrem $\mu > 0$, aplikujte Taylorův rozvoj a odvoďte vztahy uvedené v příkladu nahoře.

Příklad: Systém obslužní linky

Príklad

- obecně můžeme psát, že v systému obslužní linky (model pro příchod a obsluhu zákazníku) nastane v intervalu $(t, t + h)$ jedna změna (t.j. přijede jeden zákazník nebo odejde jeden zákazník) s pravděpodobností

$$\mu h + \lambda h + o(h);$$

- pravděpodobnost, že v takomto systému nenastane v časovém intervalu $(t, t + h)$ žádná změna (nový zákazník nepřijde a žádný nebude obslužen) je

$$1 - (\mu h + \lambda h) + o(h);$$

- pravděpodobnost, že v systému dojde v časovém intervalu $(t, t + h)$ k nějaké jiné změně (např. přijede více zákazníků, nebo více zákazníků bude obsluženo, nebo zároveň alespoň jeden přijede a alespoň jeden bude obslužen) je zanedbatelná, t.j. řádu $o(h)$;

Příklad: Systém obslužní linky

Príklad

- zajíma nás limitní chování pravděpodobnosti

$$p_k(t) = P[X(t) = k],$$

pro $t \rightarrow \infty$;

- Jaké je limitní rozdělení zákazníků v systému?
(*hromadí se zákazníci ve frontě, nebo je systém prázdný?*)

- Příklad lze řešit pomocí soustavy diferenciálních rovnic...
- ... budeme uvažovat samostatně případ pro $k = 0$ a $k = 1, 2, \dots$;

Řešení pomocí diferenciálních rovnic

□ pro $k = 0$ dostaneme:

$$p_0(t+h) = p_0(t)(1 - \lambda h + o(h)) + p_1(t)(\mu h + o(h)) + \sum_{j=2}^{\infty} p_j(t)o(h)$$

Řešení pomoci diferenciálních rovnic

□ pro $k = 0$ dostaneme:

$$p_0(t+h) = p_0(t)(1 - \lambda h + o(h)) + p_1(t)(\mu h + o(h)) + \sum_{j=2}^{\infty} p_j(t)o(h)$$

□ pro $k = 1, 2, \dots$ dostaneme:

$$\begin{aligned} p_k(t+h) &= \sum_{j=0}^{k-2} p_j(t)o(h) + p_{k-1}(t)(\lambda h + o(h)) \\ &\quad + p_k(t)(1 - \lambda h - \mu h + o(h)) \\ &\quad + p_{k+1}(t)(\mu h + o(h)) + \sum_{j=k+2}^{\infty} p_j(t)o(h) \end{aligned}$$

Řešení pomocí diferenciálních rovnic

- algebraickou úpravou a limitním přechodem pro $h \rightarrow 0_+$ dostaneme diferenciální rovnici pro $k = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

Řešení pomocí diferenciálních rovnic

- algebraickou úpravou a limitním přechodem pro $h \rightarrow 0_+$ dostaneme diferenciální rovnici pro $k = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

- algebraickou úpravou a limitním přechodem pro $h \rightarrow 0_+$ dostaneme diferenciální rovnice pro $k = 1, 2, \dots$:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_k(t) = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + \mu) p_k(t) + \mu p_{k+1}(t)$$

Řešení pomoci diferenciálních rovnic

- Pokud existuje limita $\lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t)$, pak musí platit

$$0 = -\lambda p_0(\infty) + \mu p_1(\infty)$$

$$0 = \lambda p_{k-1}(\infty) - (\lambda + \mu) p_k(\infty) + \mu p_{k+1}(\infty)$$

- Soustava rovnic, jejíž řešením je

$$p_k(\infty) = \rho^k p_0(\infty),$$

kde $\rho = \lambda/\mu$;

- Zároveň musí platit, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(\infty) = 1,$$

jelikož se jedná o pravděpodobnostní rozdělení na množině $\{0, 1, 2, \dots\}$;
(limitné rozdělení teda existuje pro $\rho < 1$ a jde o geometrické rozdělení s
parametrem $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$)

Sjednocení nezávislých Poissonových procesů

- Generická vlastnost Poissonového rozdělení:

$$N_1 \sim \text{Poiss}(\lambda_1) \wedge N_2 \sim \text{Poiss}(\lambda_2) \implies N_1 + N_2 \sim \text{Poiss}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

- Analogický aj pro Poissonov proces

Pro $\{N_1(t); t \geq 0\}$ a $\{N_2(t); t \geq 0\}$ dva nezávislé homogénní Poissonové procesy s intenzitou $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 > 0$, pak aj

$$\{N_1(t) + N_2(t); t \geq 0\}$$

je homogénní Poissonov proces s příslušnou intenzitou $\lambda_1 + \lambda_2$;

Samostatný úkol

Ukážte, že Poissonov proces $\{N_1(t) + N_2(t); t \geq 0\}$ definovaný jako součet dvou vzájemně nezávislých homogénních Poissonových procesů s intenzitami $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 > 0$ splňuje vlastnosti Poissonového procesu.

Zobecnění pro více procesů

- Zjednocení dvou nezávislých Poissonových procesů lze zobecnit na více než dva procesy;
- Obecně, pro $m \in \mathbb{N}$ nezávislých homogenních Poissonových procesů $\{N_1(t); t \geq 0\}, \dots, \{N_m(t); t \geq 0\}$ s intenzitami $\lambda_j > 0$ pro $j = 1, \dots, m$ platí, že

$$N(t) = N_1(t) + \dots + N_m(t)$$

je opět Poissonov proces s příslušnou intenzitou

$$\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_m.$$

Samostatný úkol

Ukážte, že Poissonov proces $\{N_1(t) + \dots + N_m(t); t \geq 0\}$ definovaný jako součet m vzájemně nezávislých homogenních Poissonových procesů s intenzitami $\lambda_j > 0$ pro $j = 1, \dots, m$, splňuje vlastnosti Poissonového procesu.

Nezávislost a podmíněná závislost

- ❑ Necht' $\{N(t); t \geq 0\}$ je Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$;
- ❑ Události v procesu náhodně označíme dvěma různými nálepkami...
- ❑ S pravděpodobnosti $p \in (0, 1)$ označíme událost nálepkou A ;
(výskyt události typu A tvoří čítací proces $\{N_1(t); t \geq 0\}$)
- ❑ S pravděpodobnosti $(1 - p)$ označíme událost nálepkou B ;
(výskyt události typu B tvoří čítací proces $\{N_2(t); t \geq 0\}$)

Věta: Nezávislost rozděleného Poissonového procesu

Čítací procesy $\{N_1(t); t \geq 0\}$ a $\{N_2(t); t \geq 0\}$ jsou vzájemně nezávislé homogénní Poissonové procesy s příslušnými intenzitami $\lambda_1 = \lambda p$ a $\lambda_2 = \lambda(1 - p)$.

Nezávislost a podmíněná závislost

- Poissonové procesy $\{N_1(t); t \geq 0\}$ a $\{N_2(t); t \geq 0\}$ jsou dle předchozí věty **združeně nezávislé**;
- **Podmíněně**, při daném stavu procesu $\{N(t); t \geq 0\}$, jsou ale procesy $\{N_1(t); t \geq 0\}$ a $\{N_2(t); t \geq 0\}$ **vzájemně závislé**;

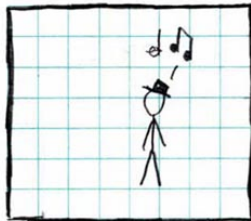
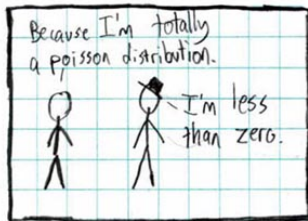
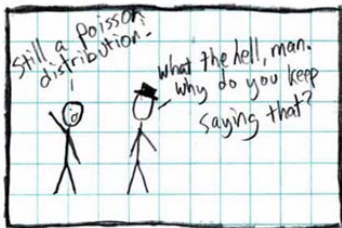
Samostatný úkol

Ukážte, proč jsou procesy $\{N_1(t); t \geq 0\}$ a $\{N_2(t); t \geq 0\}$ při daném $N \in \mathbb{N}$ podmíněně závislé. Dokonca jeden proces zcela určuje ten druhý.

Různá zobecnění Poissonového procesu

- ❑ zobecnění Poissonového procesu v neeuklidovských prostorech;
(*fundamentální nástroj v pravděpodobnosti, teorii míri a topologii*)
- ❑ dvojité stochastický Poissonův proces (Coxův proces);
(*Poissonův proces s náhodnou intenzitou - funkci $\Lambda(t)$*)
- ❑ složený Poissonův proces (tzv. marked process);
(*událost v čase má vlastní náhodnou hodnotu*)
- ❑ Poissonův proces se závislými přírůstky (Hawkesův proces);
(*homogénný nebo nehomogénný, tzv. "self-exciting stochastický proces"*)
- ❑ tzv. compound Poissonův proces;
(*Poissonův proces jako součet několika složených Poissonových procesů*)
- ❑ mnohé další zobecnění a speciální případy;
(*užitečný nástroj pro pravděpodobnostní teorii a stochastické modelování*)

Poisonous Poisson



To conclude...

Závěrečné zkoušky

Zkouškové termíny

Momentálně je k dispozici **5 skúškových termínov**. Prihlasovanie na konkrétny skúškový termín je nutné prostredníctvom systému SIS. Minimálne jeden skúškový termín bude vypísaný v druhej polovine června a minimálne jeden skúškový termín bude vypísaný v září.

Závěrečná zkouška pozostáva z dvou částí:

- ❑ **První část zkoušky**

↔ samostatná písemná práce, teoretické a praktické úlohy v rozsahu odprednášanej látky (2 × 90 minút);

- ❑ **Druhá část zkoušky**

↔ ústní zkouška pouze v případě vypracování písemné části na úrovni alespoň 60 % (individuálně, podle uvážení);