NMFM 332 | Statistika pro finanční matematiky 2

MFF UK | Letný semester 2021/2022

Matúš Maciak | @K151
http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼maciak

Prednáška: Čt: 15:40–17:10 @K5
Cvičenie: Ut: 12:20-13:50 @K6

Harmonogram výuky

- $14\times$ prednáška | 6 tématických okruhov;
- **Korekvizita:** NMFM301 - Statistika pro finanční matematiky;
  (NMFM301 musí být alespoň zapsán současně s předmětem NMFM310)

- **Deterministické modely**
  - Vyrovnávání dat, klouzavé průměry;
  - Diferenciální rovnice a modely růstu;
  - Lineární regulace a lineární soustavy;
- **Stochastické modely**
  - Markovovy řetězce s diskrétním časem a stavovým prostorem;
  - Časové řady, ARMA procesy;
  - Poissonův proces a příbuzné modely;

- **Ďalšie podrobnosti:** http://www.karlin.mff.cuni.cz/~maciak

Doporučená literatúra

- Mandl, P.: **Pravděpodobnostní dynamické modely.** Academia Praha, 1985.
- Prášková, Z., Lachout, P.: **Základy náhodných procesů I.** Matfyzpress, Praha, 2012.
- Prášková, Z.: **Základy náhodných procesů II.** Karolinum, Praha, 2004.

Doporučená literatúra

- Mandl, P.: **Pravděpodobnostní dynamické modely.**
  Academia Praha, 1985.

- Prášková, Z., Lachout, P.: **Základy náhodných procesů I.**
  Matfyzpress, Praha, 2012.

- Prášková, Z.: **Základy náhodných procesů II.**
  Karolinum, Praha, 2004.

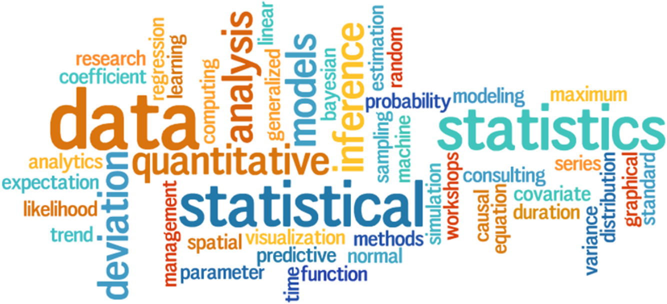
+ doplňujúce bibliografické odkazy a referencie uvedené v priebehu prednášky;

  (Samotný PDF súbor so slidami z prednášky není postačujúcim materiálom pre úspešné zloženie skúšky; Súčasťou skúšky sú aj teoretické odvodenia a dôkazy, ktoré nie sú explicitne uvedené v slidoch, ale budú odvodené vrámci prednášky)

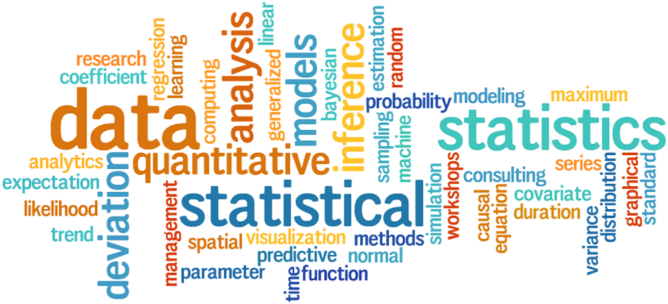
Kapitola 1

Vyrovnávání dat

Čo sú to data? Čo je to model? Big data?



Čo sú to data? Čo je to model? Big data?



- (Anglické) slovo ”data” prvykrát použité v roce 1640;
- V zmysle ”transmittable and storable computer information” v roku 1946;
- V zmysle “data processing” bolo prvykrát použité v roku 1954;
- Data – konkrétne hodnoty kvalitatívnych a kvantitatívnych premenných;
- Merané, zbierané, analyzované, reportované a interpretované hodnoty;
- Big data - objemné, rôznorodé, ale strukturované informace (online);

Data v matematike a štatistike

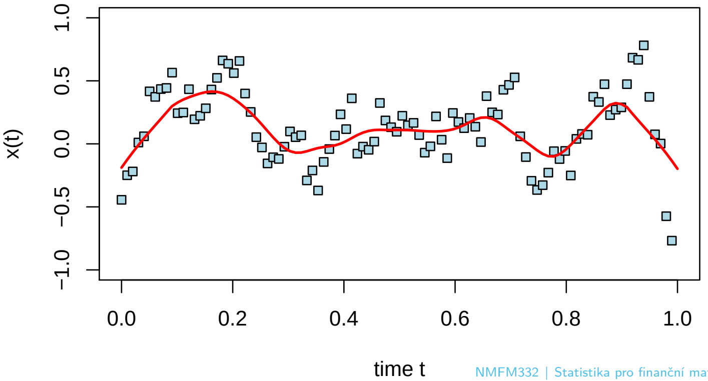
- Data (informace) môžeme kategorizovať podľa rôznych kritérii, ale z hľadiska matematiky/štatistiky je podstatne rozlišovať **deterministický** a **stochastický** charakter dat;
- V štatistike sa často využíva pojem **náhodný výběr**; (nezávisle, stejně rozdělené náhodné veličiny – *i.i.d.* z anglického "*Independent and Identically Distributed* random variables")
- V praxi často **časovo závislá štruktúra pozorovaní** – časové řady; (vývoj hodnot v čase – resp. v diskrétnych časových okamžikoch)
  - napr. hodnota kurzu $x(t)$ pro $t \in \{t_1, \dots, t_n\}$;
  - alebo vzájomne porovnanie, napr. $x(t)$ vs. $y(t)$;
  - alebo data $(x_1, y_1)^\top, \dots, (x_n, y_n)^\top$, pro uspořádané indexy;
- **Závislé** a často **nestejně rozdelené náhodné veličiny** – n.i.n.i.d; (jak takéto data analyzovat a jaké (vhodné) metódy/modely používat?)

Vyrovnávání dat

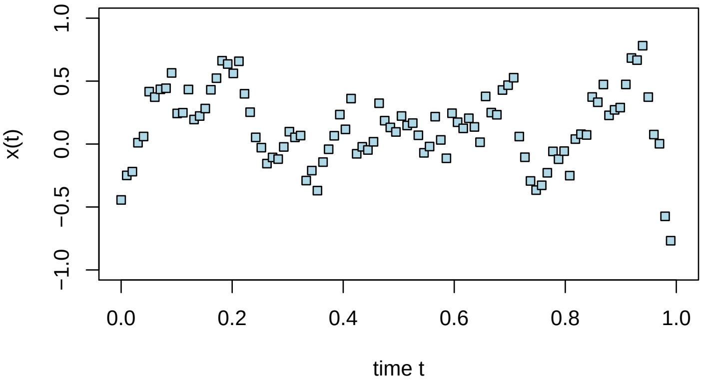
Jedná sa o preloženie dat vhodnou (hladkou) křivkou, která v určitom zmysle vystihuje nejakú základnú vlastnosť dat, ale neberie v potaz drobné chyby, nepresnosti, alebo fluktuace (charakterizace dat).

Vyrovnávání dat

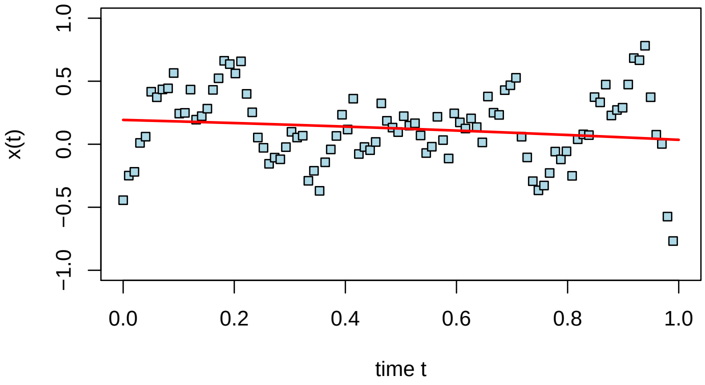
Jedná sa o preloženie dat vhodnou (hladkou) křivkou, která v určitom zmysle vystihuje nejakú základnú vlastnosť dat, ale neberie v potaz drobné chyby, nepresnosti, alebo fluktuace (charakterizace dat).



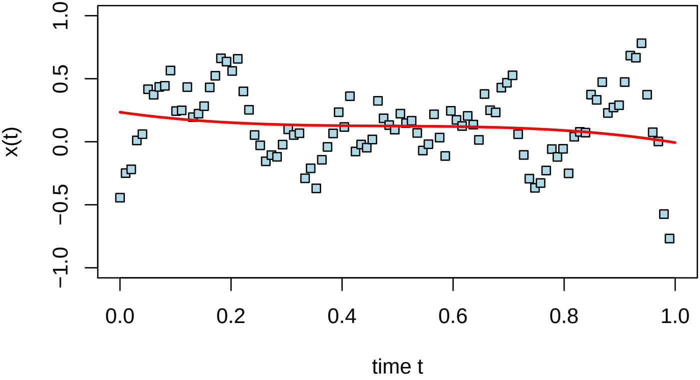
Jak volit "hladku křivku"? A musí byť vždy hladká?



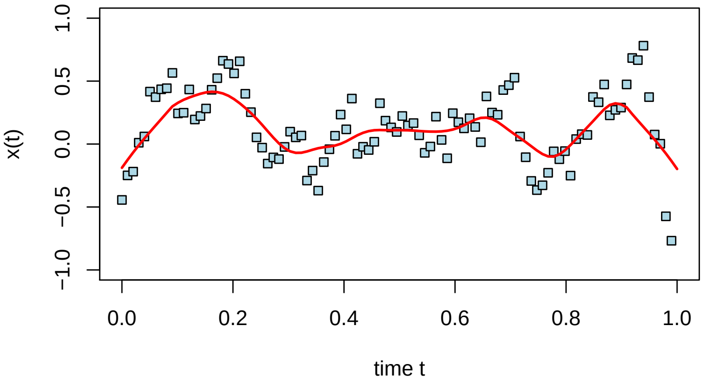
Jak volit "hladku křivku"? A musí byť vždy hladká?



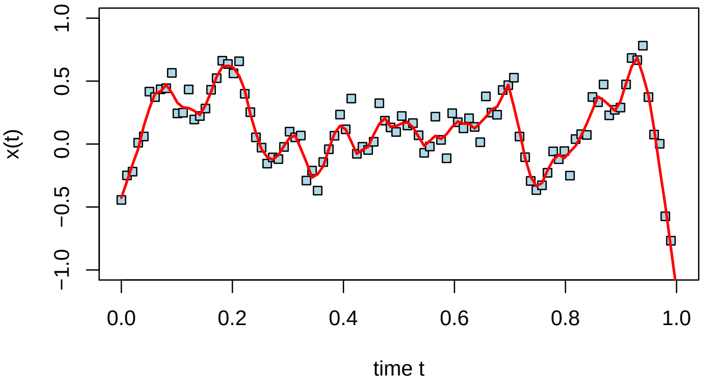
Jak volit "hladku křivku"? A musí byť vždy hladká?



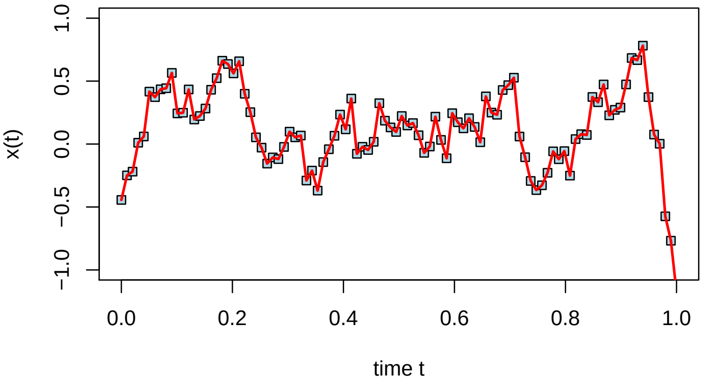
Jak volit "hladku křivku"? A musí byť vždy hladká?



Jak volit "hladku křivku"? A musí být vždy hladká?



Jak volit "hladku křivku"? A musí byť vždy hladká?

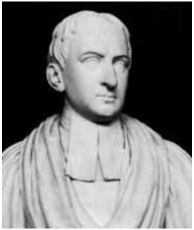


Od parametrických až po neparametrické postupy

V zásade rozlišujeme **tri základné prístupy** pri modelovaní dat, resp. pri překladaní dat (ne nutně hladkou) křivkou. Základný rozdíl je v celkové míře flexibility/adaptivity a zložitosti/komplexity výsledného modelu.

- **Parametrický postup**
  - jednoduchost
    (jednoduchý model, výpočet, aj interpretácia, priamočiaré vlastnosti)
  - málo flexibilný
    (príliš triviálný model, ktorý často nedostatečně vystihuje podstatu dat)
- **Neparametrický postup**
  - výborná flexibilita
    (bez nutných predpokladov na konkrétny parametrický tvar křivky)
  - príliš zložitý
    (pomerne náročný na vypočet, zložité vlastnosti a tiež interpretácia)
- **Semiparametrický postup**
  - dostatečne flexibilný, akceptovatelná zložitost
    (bez predpokladov na konkrétny tvar, ale pomocou (skrytých) parametrov)
  - málo intuitívny
    (kombinácia dobrých, ale aj zlých vlastnosti predchádzajúcich postupov)

Kde, kedy a ako to začalo?



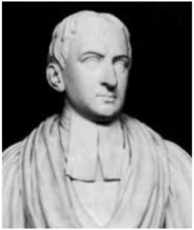
o Roger Cotes (1682 – 1716)

o Tobias Mayer (1723 – 1762)

o Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

o Roger Joseph Boscovich (1711 – 1787)

Kde, kedy a ako to začalo?



o Roger Cotes (1682 – 1716)

o Tobias Mayer (1723 – 1762)

o Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

o Roger Joseph Boscovich (1711 – 1787)

- 1722 – kombinácia viacerých rôzných pozorovaní uskutočnených za stejných podmínek, namiesto presnej replikácie experimentu (method of averages);
- 1750 – štúdium pohybu Mesiaca kolem země v roce 1750 (Tobias Mayer) a sledovanie vzájomného pohybu Jupitera a Saturnu (Laplace);
- 1757 – kombinácia viacerých rôzných pozorovaní uskutočnených za rôznych (kontrolovaných) podmienok pri štúdiu tvaru Zeme Boscovichom (least absolute deviations);
- 1799 – chyba aproximácie meraná ako absulútna vzdialenosť vs. kvadrát vzdialenosti vs. metóda vedúca k jej minimalizácii (Laplace vs. Gauss);

Kalibrácia metódou najmenších štvorcov

Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833)

Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

- **Legendre** využil metódu najmenších štvorcov na fitovanie lineárnych rovníc na rovnaké data, ktoré využil Laplace na meranie veľkosti a tvaru Zeme. Metóda je popísaná ako algebraicka procedúra;
- **Gauss** tvrdil, že metóda je mu známa už od roku 1795. Prepojil metódu najmenších štvorcov least s princípmi teórie pravdepodobnosti a definoval metódu odhadovania, ktorá minimalizuje chybu – normálne rozdelenie;

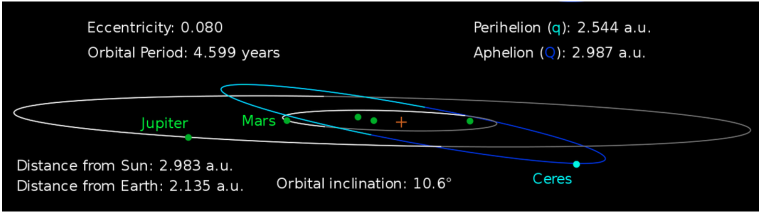
Metóda nejmenších čtverců

Charles Friedrich Gauss (1777 – 1855)

- metóda sa postupne vyvinula v súvislosti s astronómiou a geodéziou pri riešeni problémov s navigáciou lodí;
- P.Laplace a T. Mayer využili tzv. metodu priemerov pre vysvetlenie pohybov nebeských telies již v roce 1750;
- prvykrát publikovaná (Legendre, 1805) ako algebraický nástroj na fitovanie lineárnych rovníc na data;
- C.F. Gauss v 1809 publikuje prácu o metode najmenších štvorcov a dáva ju súvislosti s teóriou pravdepodobnosti a normálnym rozdelením;

Dôkaz fungovania metódy: Znovuobjavenie Ceres

- Talianský astronom Giuseppe Piazzi objavil asteroid Ceres 1. Januára 1801 a sledoval ho 40 dní až kým sa asteroid nestratil za žiarou Slnka – posledné pozorovanie (z celkových 24) urobil 11. Februára, 1801.
- Na základe týchto dat sa astronomovia rozhodli určiť polohu Ceresu po následnom výstupe zpoza Slnka, ale bez nutnosti riešit zložité Keplerové nelineárne rovnice planetárnych pohybov.
- Na základe článku a dat publikovaných v časopise *Monatliche Correspondenz* v Septemberi 1801, J.C.F.Gauss (v tom čase 24 ročný) bol jediný, kto úspšene predikoval polohu pri znovuobjavení Ceresu.
- Maďarský astronón Heinrich W. M. Olbers následne našiel Ceres na odhadnutej polohe 31. Decembera, 1801.



Parametrické vyrovnávanie dat

Křivka jednoznačne určená niekoľkými parametrami

- předem zvolíme tvar hladké křivky napr. parabola $x \longrightarrow a + bx + cx^2$;
- neznáma křivka definovaná pomocou neznámych parametrov $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- parametre majú konkrétnu a často priamočiaru interpretáciu;
- odhady parametrov minimalizáciou súčtu štvorcov odchylek;
- volba počtu parametrů $\Longrightarrow$ konkrétny tvar a flexibilita křivky;
- rozhodnutí mezi celkovým počtem parametrů a velikosti součtu čtverců;

Parametrické vyrovnávanie dat

Křivka jednoznačne určená niekoľkými parametrami

- předem zvolíme tvar hladké křivky napr. parabola $x \longrightarrow a + bx + cx^2$;
- neznáma křivka definovaná pomocou neznámych parametrov $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- parametre majú konkrétnu a často priamočiaru interpretáciu;
- odhady parametrov minimalizáciou súčtu štvorcov odchylek;
- volba počtu parametrů $\Longrightarrow$ konkrétny tvar a flexibilita křivky;
- rozhodnutí mezi celkovým počtem parametrů a velikosti součtu čtverců;

There is no free lunch!

- pro dostatečne velký počet parametrov $\Longrightarrow$ interpolace dat;
- interpolace $\Longrightarrow$ nulový součet čtverců $\Longrightarrow$ žádne vyhlazení dat;
- tzv. **Bias-variance Trade-off** (vychýlenie vs. variabilita);
  (rozhodnutie vzhľadom k celkovej flexibilite a komplexite finálneho modelu)

Metóda nejmenších čtverců – algebraicky

- predpokládame jednoduché data $\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2;\ i = 1, \dots, n\}$;
- obecně předpokládame tvar nějaké (hladké) křivky

$$x \longrightarrow a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_p f_p(x),$$

  pro nějaké neznáme parametry $a_1, \dots a_p \in \mathbb{R}$;
- označme odhadnuté hodnoty parametrov jako $\hat{a}_1, \dots \hat{a}_p \in \mathbb{R}$;
- pak vyrovnanú hodnotu v datech $\{(x_i, y_i);\ i = 1, \dots, n\}$ lze zapsat jako

$$\hat{y}_i = \hat{a}_1 f_1(x_i) + \hat{a}_2 f_2(x_i) + \cdots + \hat{a}_p f_p(x_i),$$

  kde $\hat{y}_i$ značí vyrovnanú hodnotu príslušnú hodnotě y_i;
- pro skrátený zápis pomocou vektorov používame (bold) značení

$$\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top, \qquad \hat{\boldsymbol{y}} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)^\top;$$

Metóda nejmenších čtverců – maticovo

- explicitne po zložkách dostaneme vyrovnané hodnoty jako

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_p(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_p(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \dots & f_p(x_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{pmatrix}$$

- stručný/alternatívny zápis v maticovom tvare jako

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \mathbb{F} \cdot \widehat{\boldsymbol{a}},$$

kde $\widehat{\boldsymbol{a}} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p)^\top$ je vektor odhadnutých parametrov a $\mathbb{F}$ je príslušná matica (niekedy aj tzv. matica modelu);

- odhady neznámych parametrov $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ jsou definované tak, že minimalizují nejmenší čtverce (součet čtverců odchýlek)

$$S(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - \sum_{j=1}^{p} \hat{a}_j f_j(x_i)\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \|\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}\|_2^2$$

$$= (\boldsymbol{y} - \mathbb{F}\hat{\boldsymbol{a}})^\top (\boldsymbol{y} - \mathbb{F}\hat{\boldsymbol{a}}) = SSe;$$

Metóda nejmenších čtverců – formálně

- formálně zapsané, odhady parametrov $a_1, \ldots, a_p$ jsou definované jako riešenie minimalizačného problému

$$(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_p)^\top = \underset{a_1,\ldots,a_p \in \mathbb{R}}{Argmin} \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - \sum_{j=1}^{p} a_j f_j(x_i) \Big)^2 \tag{1}$$

$$= \underset{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^p}{Argmin} \|\boldsymbol{y} - \mathbb{F}\boldsymbol{a}\|_2^2;$$

- Ide o konvexný problém (minimalizácia konvexnej funkcie, cez konvexnú množinu) a teda existuje globálne minimum, ktoré je riešením normálných rovníc. Ak má $\mathbb{F}$ plnú hodnosť, tak existuje jednoznačné riešenie;

Samostatný úkol

- Ukážte, že problém (1) je naozaj konvexný problém. Za akých podmienok má matica $\mathbb{F} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ plnú hodnosť?
- Dokážte, že dosažené řešení je skutečně globálnim minimem.
- Jaké je řešení úlohy (1), ak by $\mathbb{F}$ neměla plnou hodnost?

Metóda nejmenších čtverců – príklad

Príklad

Uvažujte data $(y_1, x_1)^\top, \ldots, (x_n, y_n)^\top$, které chceme preložiť jednoduchou přímkou, t.j. $x \longrightarrow a_1 + a_2 x$, pro dva neznáme parametre $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Nájděte explicitné řešení pro rovnicu vyhlazovací přímky (t.j., odhady $\widehat{a_1}$ a $\widehat{a_2}$).

Metóda nejmenších čtverců – príklad

Príklad

Uvažujte data $(y_1, x_1)^\top, \ldots, (x_n, y_n)^\top$, které chceme preložiť jednoduchou přímkou, t.j. $x \longrightarrow a_1 + a_2 x$, pro dva neznáme parametre $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Nájděte explicitné řešení pro rovnicu vyhlazovací přímky (t.j., odhady $\widehat{a_1}$ a $\widehat{a_2}$).

Pravděpodobnostní/stochastická interpretace:

- náhodný vektor $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^\top$ a jeho realizace $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\top$;
- predpokládame, že platí model $\boldsymbol{Y} = \mathbb{F}\boldsymbol{a} + \varepsilon$;
- vektor náhodných chýb $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)^\top \sim (\boldsymbol{0}, \sigma^2 \mathbb{I})$;
- z vlastnosti střední hodnoty a rozptylu lze přepsát jako

$$\mathsf{E}\boldsymbol{Y} = \mathbb{F}\boldsymbol{a} \qquad \mathsf{Var}\,\boldsymbol{Y} = \sigma^2 \mathbb{I},$$

pro jednotkovou matici $\mathbb{I} = Diag\{1, \ldots, 1\}$, typu $n \times n$;

Regresní model – teoretické vlastnosti odhadu

Věta: Střední hodnota a rozptyl odhadu parametru v lineárni regrese

Mějme lineárny regresný model $\boldsymbol{Y} = \mathbb{F}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\varepsilon}$, pro vektor náhodných chýb se složkami s nulovou střední hodnotou $\mathsf{E}\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathsf{E}\varepsilon_1, \dots, \mathsf{E}\varepsilon_n)^\top = (0, \dots, 0)^\top$ a rozptylovou matici $\mathrm{Var}\,\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma^2\mathbb{I}$. Pak platí, že

- odhad parametru $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^p$ metódou nejmenších čtverců je nestranný a jeho rozptyl je $\sigma^2(\mathbb{F}^\top\mathbb{F})^{-1}$;
- jsou-li navíc $(y_i, \varepsilon_i)^\top$, pro $i = 1, \dots, n$ nezávislé a stejně rozdelené (*i.i.d.*), pak je $\hat{\boldsymbol{a}}$ (silne) konzistentní odhad vektoru $\boldsymbol{a}$;
- plati-li navíc $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ pak odhady parametrů $a_1, \dots, a_p$ mají také normálné rozdělení a platí, že $\hat{\boldsymbol{a}} \sim N_p(\boldsymbol{a}, \sigma^2(\mathbb{F}^\top\mathbb{F})^{-1})$;

Gauss-Marková věta říka, že odhad $\hat{\boldsymbol{a}}$ je **nejlepší**, **nestranný**, **lineární** odhad vektoru parametrov $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^p$ (tzv. BLUE – Best Linear Unbiased Estimate)

Parametricky ⇒ Semiparametrický postup

Parametre, ktoré sa nachádzajú v modeli nemajú priamy vzťah na tvar neznámej křivky a taktiež nemajú intuitívnu interpretáciu, jako tomu bylo v případě parametrických modelov.

- **SPLINY - po částech (lokálne) parametrické vyhlazování;**
  (neznáma křivka je pořád definovaná pomoci parametrů, ale parametre nedefinují přímo tvar dané křivky)

- **Vhlazování je proto mnohem flexibilnejší a adaptívnejší;**
  (kromě samotných neznámych parametrů jsou ale potřebné dodatečné parametry – tzv. uzly a tiež množina tzv. bázických funkcii—resp. splinová báze)

- **uzly definují podintervaly definičného oboru křivky;**
  (důležitá je pak otázka, jak uzly správně volit; v podintervalech jsou časti křivky definované různe, ale celková křivka ma hezké, předem dané vlastnosti)

Lokální vyhlazování pomoci Splinů

Definice: Spline

Nechť $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_k$ je posloupnost vnitřních uzlů (bodů) z definičního oboru $\mathcal{D} = [\xi_0, \xi_{k+1}]$. Pak splinem řádu $\ell \in \mathbb{N}$ nazveme nazveme libovolnou funkci f takovou, která je v každém intervalu $[\xi_j, \xi_{j+1}]$, pro $j = 0, \ldots, k$ polynomem stupně ℓ a která ma v celém definičním oboru $\mathcal{D} = \cup_{j=0}^{k}[\xi_j, \xi_{j+1}]$ spojité derivace (jednostranné derivace v krajních bodech) až do řádu $(\ell - 1)$ (včetně).

Lokální vyhlazování pomoci Splinů

Definice: Spline

Nechť $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_k$ je posloupnost vnitřních uzlů (bodů) z definičního oboru $\mathcal{D} = [\xi_0, \xi_{k+1}]$. Pak splinem řádu $\ell \in \mathbb{N}$ nazveme nazveme libovolnou funkci f takovou, která je v každém intervalu $[\xi_j, \xi_{j+1}]$, pro $j = 0, \ldots, k$ polynomem stupně ℓ a která ma v celém definičním oboru $\mathcal{D} = \cup_{j=0}^{k}[\xi_j, \xi_{j+1}]$ spojité derivace (jednostranné derivace v krajních bodech) až do řádu $(\ell - 1)$ (včetně).

Príklad

Uvažujte interval $(0, 1)$ jako definičný obor $\mathcal{D}$. Definujte posloupnost uzlů $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$ a navrhněte spline třetího řadu $(\ell = 3)$ na $\mathcal{D}$ tak, aby splňoval definici.

Různe splinové bázy

Existuje celá řada různych způsobů, jak definovat splinovu bazu a sestrojit spline. Některé metody jsou intuitivné a jednoduché, ale výpočetně náročné pro velké $n \in \mathbb{N}$. Jiné jsou pomerně zložite a hodně špatně interpretovatelné, ale zase výpočetně stabilnější.

- **Truncated Splines**
  - jednoduché, intuitívne, jednoduché na odvodenie;
  - výpočetne nestabilné hlavne pre velké $n \in \mathbb{N}$ (alebo/a veľké $p \in \mathbb{N}$);
- **B-Splines**
  - vypočetně stabilné a jednoduché pro invertování $\mathbb{F}$;
  - obecně pro $\ell \in \mathbb{N}$ nelze explicitně vyjádřit (napr. De Boor rekurze);
- **Ortogonálne spliny**
  - výpočetne veľmi jednoduché, okamžítá invertibilita, numerická stabilita;
  - netriviálne na vytvorenie, náročné na interpretáciu;

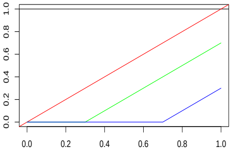
Různe splinové bázy

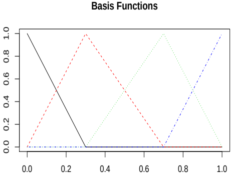
Existuje celá řada různych způsobů, jak definovat splinovu bazu a sestrojit spline. Nektěré metody jsou intuitivné a jednoduché, ale výpočetně náročné pro velké $n \in \mathbb{N}$. Jiné jsou pomerně zložite a hodně špatně interpretovatelné, ale zase výpočetně stabilnější.

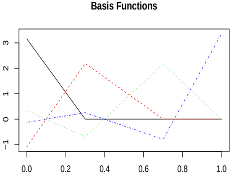
- **Truncated Splines**
  - jednoduché, intuitívne, jednoduché na odvodenie;
  - výpočetne nestabilné hlavne pre velké $n \in \mathbb{N}$ (alebo/a veľké $p \in \mathbb{N}$);
- **B-Splines**
  - vypočetně stabilné a jednoduché pro invertování $\mathbb{F}$;
  - obecně pro $\ell \in \mathbb{N}$ nelze explicitně vyjádřit (napr. De Boor rekurze);
- **Ortogonálne spliny**
  - výpočetne veľmi jednoduché, okamžítá invertibilita, numerická stabilita;
  - netriviálne na vytvorenie, náročné na interpretáciu;
- **Mnoho jiných ...**
  - Box spliny, M-Spliny, T-Spliny;
  - ... ...

Porovnání: T-spliny, B-spliny, O-spliny

- Uzly: $\xi_1 = 0.3, \xi_2 = 0.7$; Stupeň $\ell = 1$ (lineárne spliny (báze));

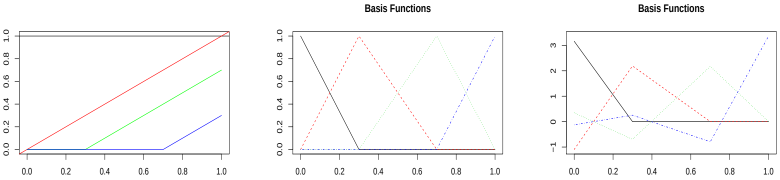




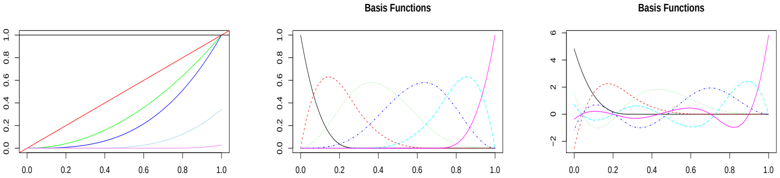


Porovnání: T-spliny, B-spliny, O-spliny

- Uzly: $\xi_1 = 0.3, \xi_2 = 0.7$; Stupeň $\ell = 1$ (lineárne spliny (báze));



- Uzly: $\xi_1 = 0.3, \xi_2 = 0.7$; Stupeň $\ell = 3$ (kubické spliny (báze));



Truncated splines – ”zkosené” spliny

Príklad

- mějme uzly $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ uvnitř $\mathcal{D}$, a nechť $\ell = 1$ (lineární spliny);
  Pak příslučné funkce $f_1(x), \ldots, f_p(x)$ mají následujíci tvar:

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x, \qquad \begin{aligned} f_3(x) &= (x - \xi_1)_+, \\ f_4(x) &= (x - \xi_2)_+, \\ f_5(x) &= (x - \xi_3)_+ \end{aligned}$$

- pro stejné uzly $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ uvnitř $\mathcal{D}$, a řád $\ell = 3$ (kubické spliny);
  Příslušné funkce $f_1(x), \ldots, f_p(x)$ mají tvar:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1, & f_2(x) &= x, & f_5(x) &= (x - \xi_1)_+^3, \\ f_3(x) &= x^2, & f_4(x) &= x^3, & f_6(x) &= (x - \xi_2)_+^3, \\ & & & & f_7(x) &= (x - \xi_3)_+^3 \end{aligned}$$

Pro splinové bázy obecně platí, že $p = \ell + k + 1$, kde $\ell \in \mathbb{N}$ je stupeň splinové bázy,resp. řád splinu a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je počet vnítřních uzlů $\xi_1 < \cdots < \xi_k \in \mathcal{D}$.

Semiparametrický $\Rightarrow$ Neparametrický postup

Bez parametrov - žádny konkrétny tvar neznáme křivky, ani zápis neznámej křivky pomoci lineárnej kombinace funkci bázy.

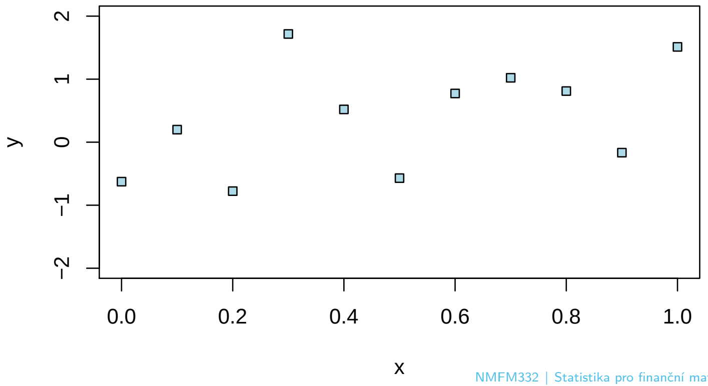
- **Klouzavé průměry (KP)** – lokálny neparametrický postup vyhlazování; *(schopný zachytit trend – t.j. směr a míru pohybu pozorovaných hodnot)*
- nevystupují tady žádne neznáme parametre, které bychom odhadovali; *(výsledná vyhlazovací křivka je pouze funkci pozorovaných dat)*
- jedná se o tzv. **lokální vyrovnávání** pozorovaných dat; *(v daném bodě $x \in \mathcal{D}$ závisí výrovnání pouze od několika sousedů)*
- formálně zapsáno, pro pozorování y_i získame hodnotu $\hat{y}_i$ jako

$$\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j} \qquad \text{pro } i = r+1, \ldots, n-r,$$

  čo je vlastne vážený priemer niekoľko predchádzajúcich pozorovaní a rovnakého počtu následujúcich pozorovaní;
- pro váhy w_j platí, že $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$; *(číslo $r \in \mathbb{N}$ se nazýva délka klouzavého průměru)*

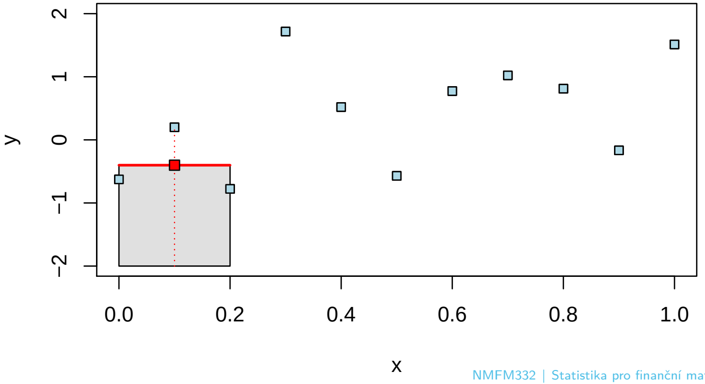
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definováný jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r+1, \ldots, n-r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme $\hat{y}_i$ pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



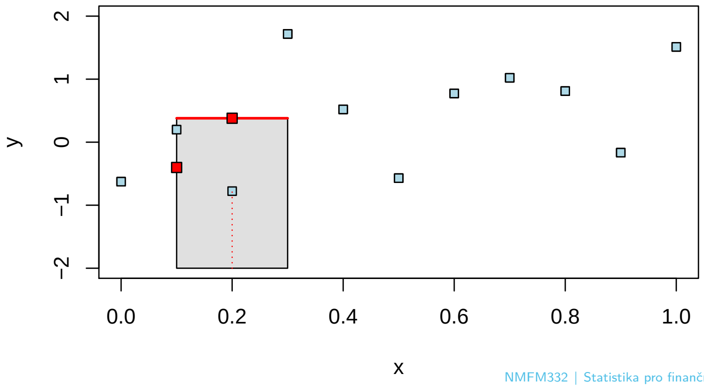
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r+1, \ldots, n-r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme $\hat{y}_i$ pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



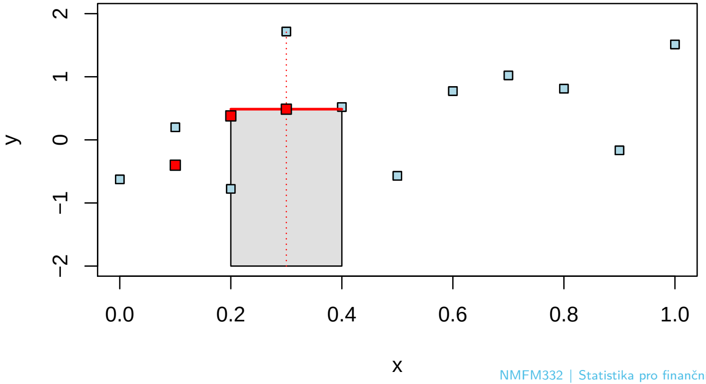
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definováný jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r+1, \ldots, n-r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme $\hat{y}_i$ pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



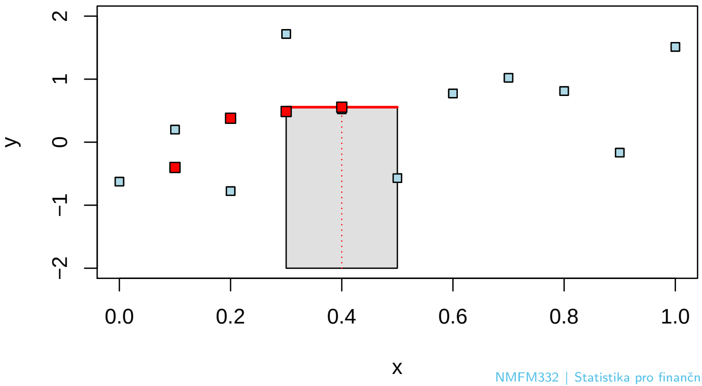
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definováný jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r+1, \ldots, n-r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme $\hat{y}_i$ pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



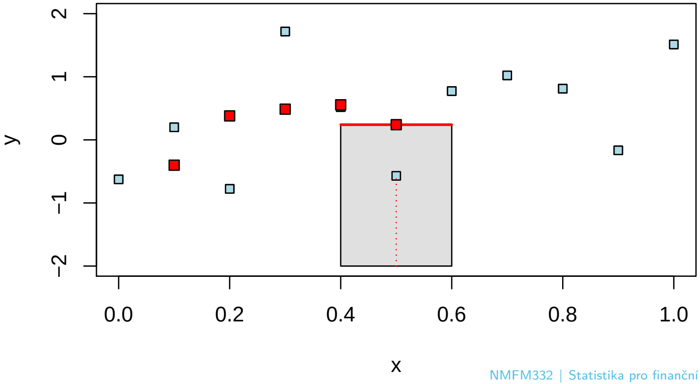
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definováný jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r+1, \ldots, n-r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme $\hat{y}_i$ pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



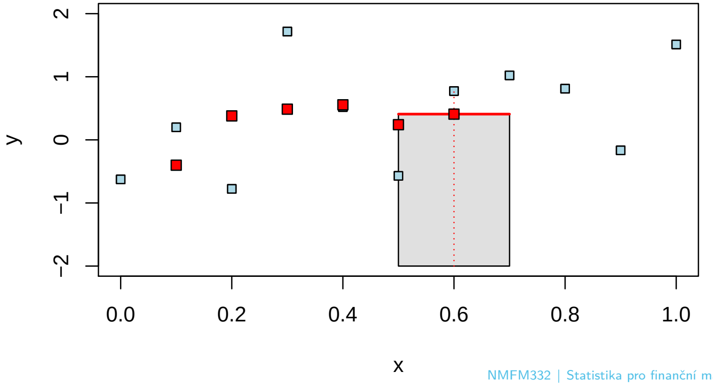
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definováný jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r+1, \ldots, n-r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme $\hat{y}_i$ pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



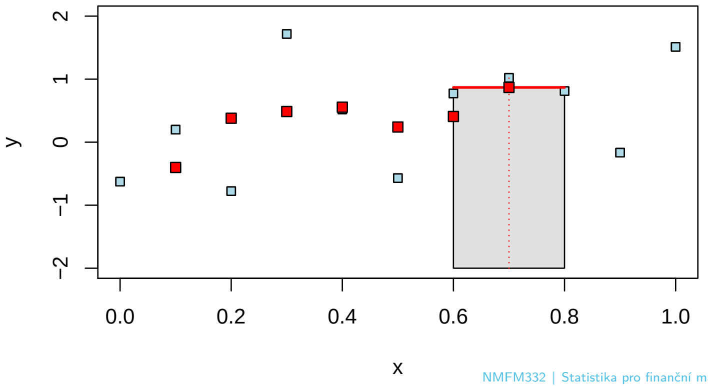
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definováný jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r+1, \ldots, n-r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme $\hat{y}_i$ pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



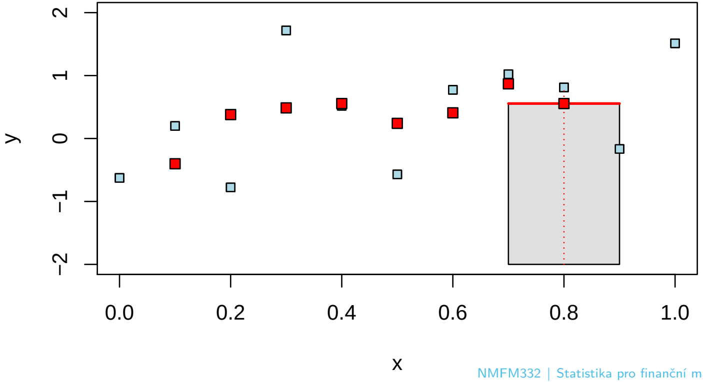
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definováný jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r+1, \ldots, n-r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme $\hat{y}_i$ pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



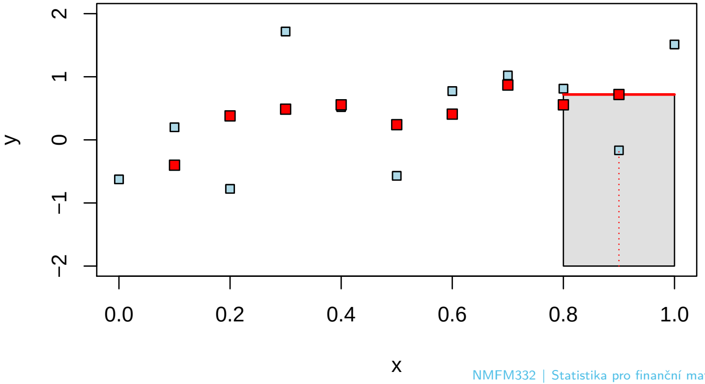
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definováný jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r+1, \ldots, n-r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme $\hat{y}_i$ pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



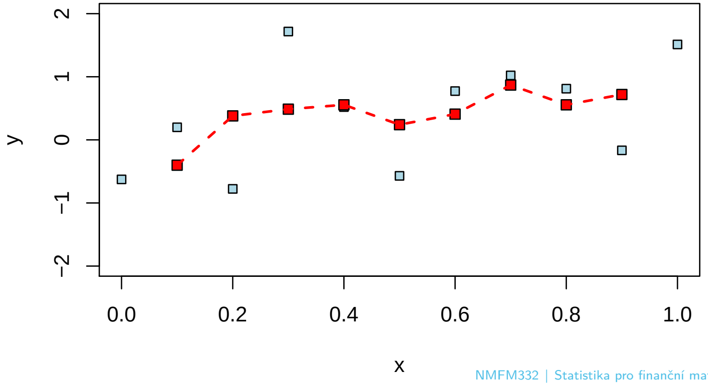
Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definováný jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r+1, \ldots, n-r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme $\hat{y}_i$ pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



Obyčejné (aritmetické) klouzavé průměry (KP)

- vyhlazené hodnoty jsou definovány jako $\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j}$, ale pouze pro data y_i kde $i = r+1, \ldots, n-r$;
- pro váhy w_j platí, že $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a tiež $\sum_{j=-r}^{r} w_j = 1$;
- pro $r = 1$ dostaneme $\hat{y}_i$ pomoci y_i a dvou vedlejších sousedů;



Jak definovat váhy w_j pro KP?

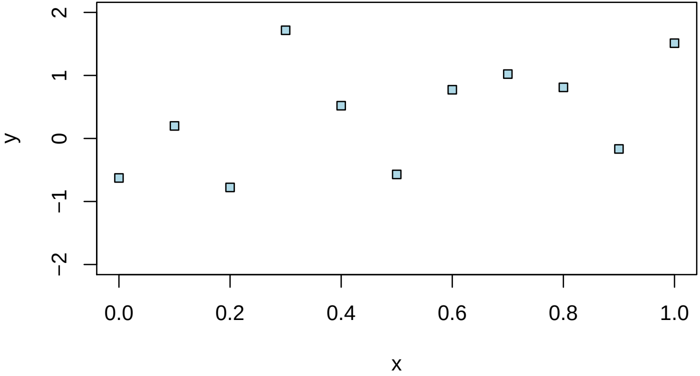
- **Stejné váhy pro všechny $j = -r, \ldots, r$;**
  - jednoduchost, $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a vyrovnaná hodnota $\hat{y}_i$ je pouze obyčejný aritmetický průmer z $2r + 1$ okolních hodnot, navíc nezáporne váhy;
  - není vyrovnán počáteční a koncový úsek dat (potřebná data nejsou k dispozicii) a obecně se nejedná o hladkou křivku v $\mathcal{D}$;

Jak definovat váhy w_j pro KP?

- **Stejné váhy pro všechny $j = -r, \dots, r$;**
  - jednoduchost, $w_j = \frac{1}{2r+1}$ a vyrovnaná hodnota $\hat{y}_i$ je pouze obyčejný aritmetický průmer z $2r + 1$ okolních hodnot, navíc nezáporne váhy;
  - není vyrovnán počáteční a koncový úsek dat (potřebná data nejsou k dispozicii) a obecně se nejedná o hladkou křivku v $\mathcal{D}$;
- **Obecně různe váhy pro w_j, $j = -r, \dots, r$;**
  - při správne volbě lze dosáhnout hladkou křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$ a lze vyrovnát aj počátečné a koncové hodnoty;
  - nutnost dodatečných výpočtov, prípadně zavedenie nějakých ďalších (rušivých/ladiacích) parametrů;

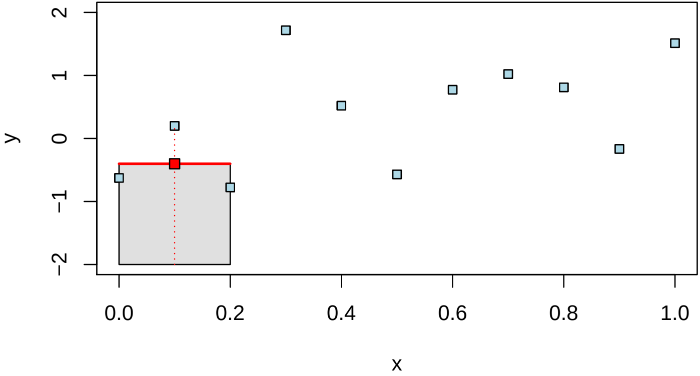
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



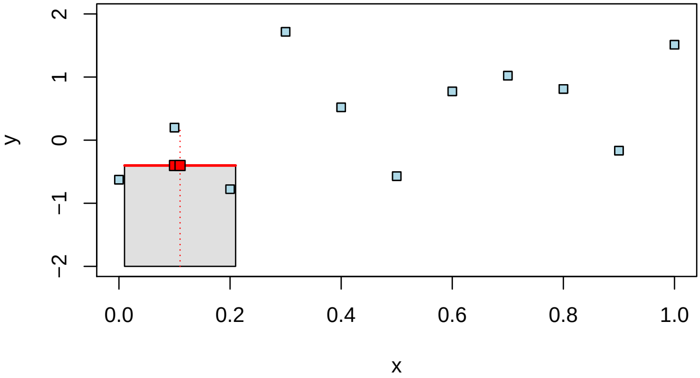
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



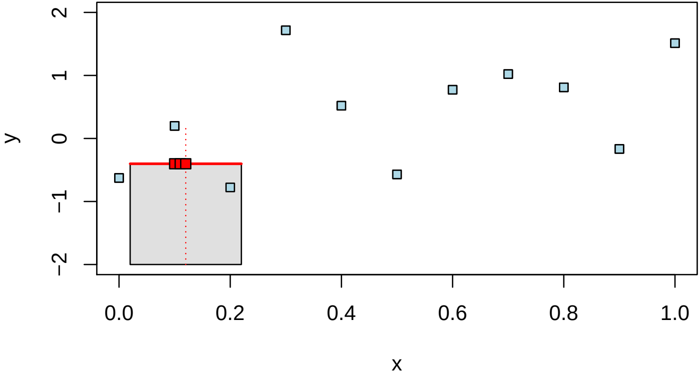
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



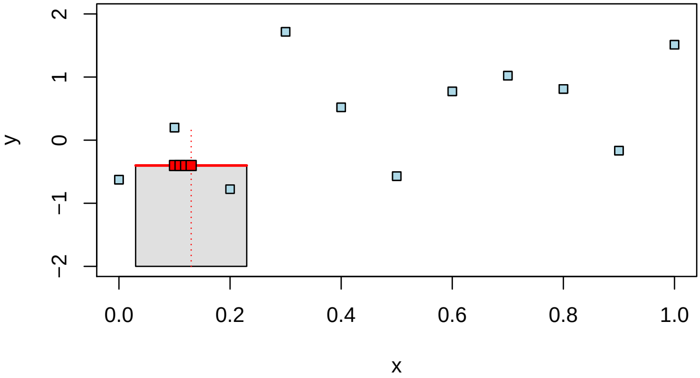
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



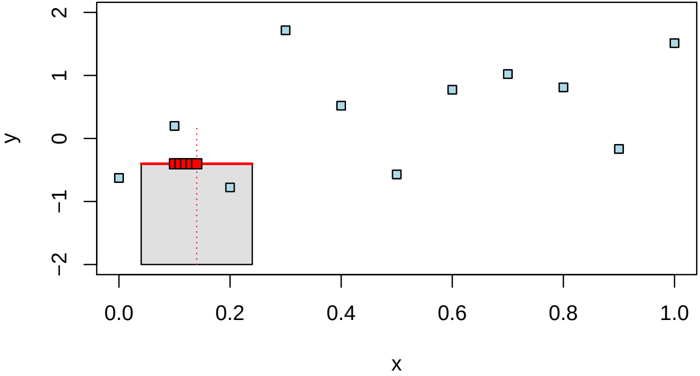
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



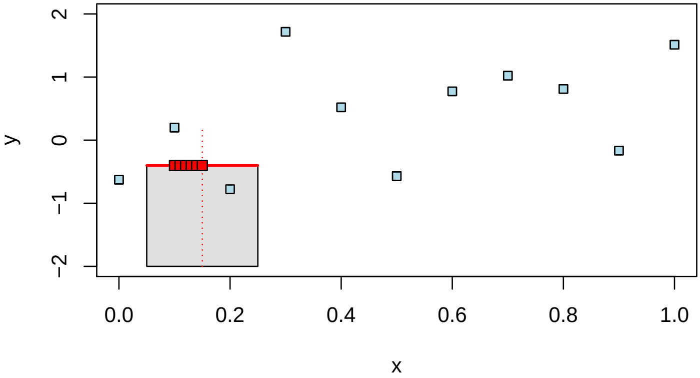
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



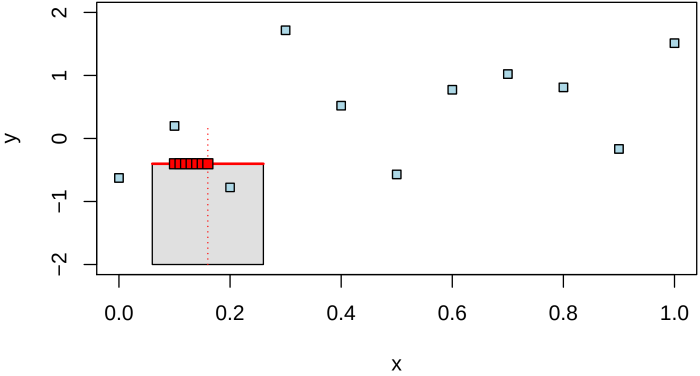
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



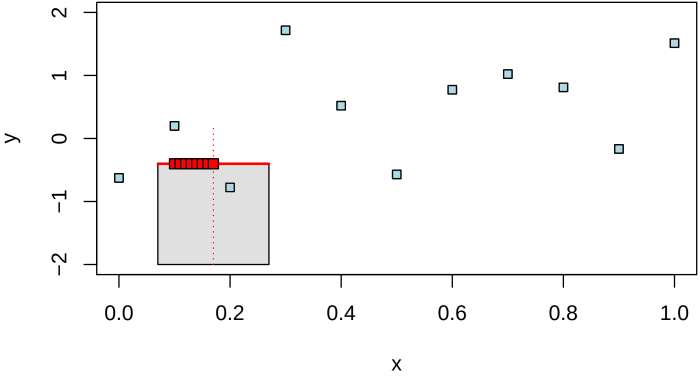
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



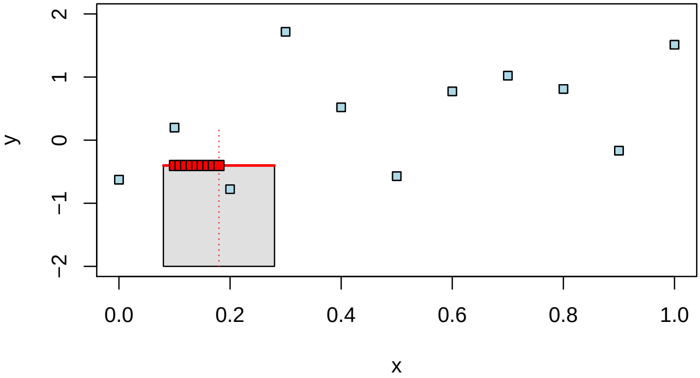
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



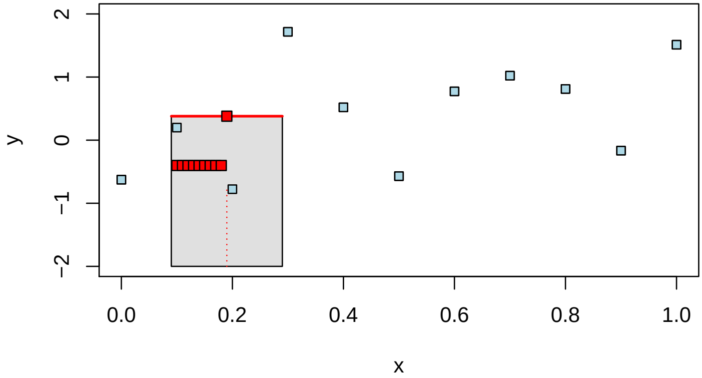
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



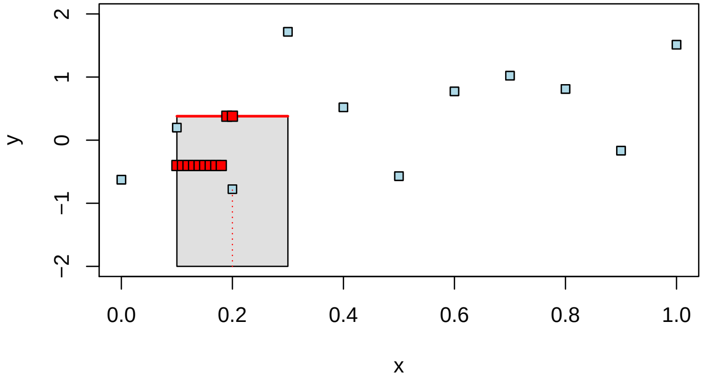
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



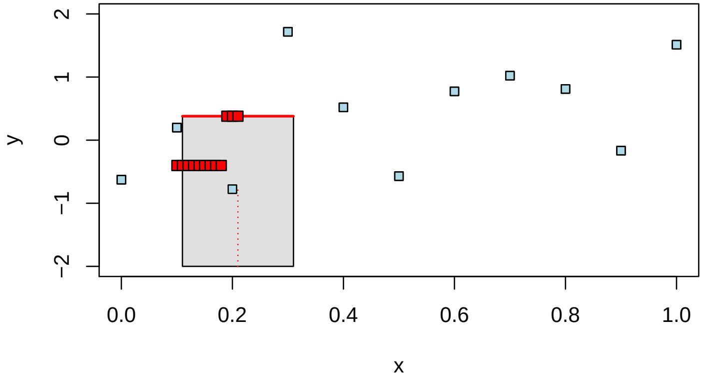
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



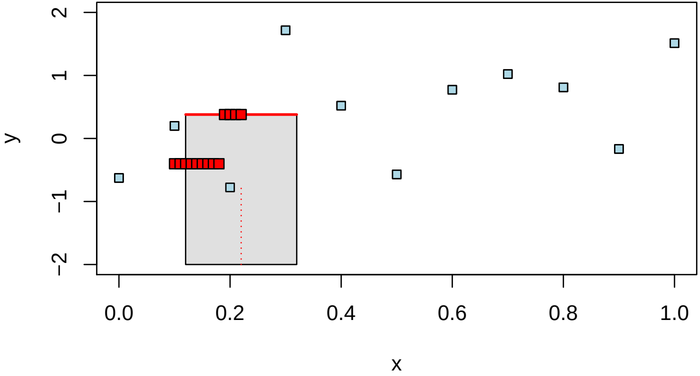
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



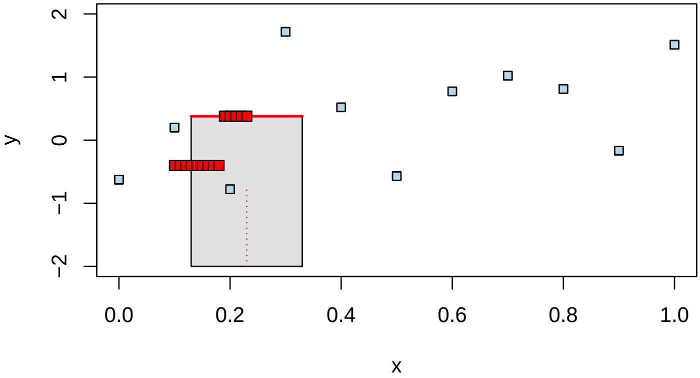
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



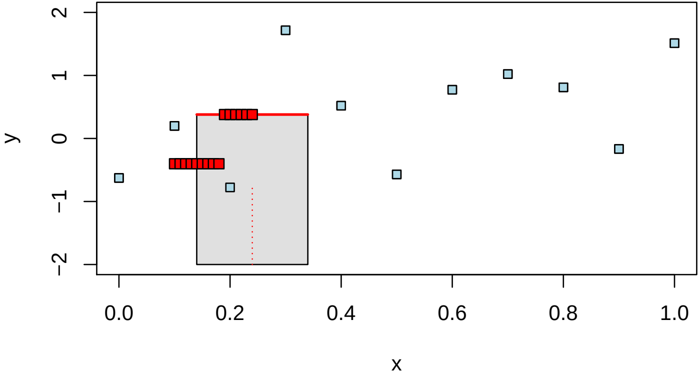
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



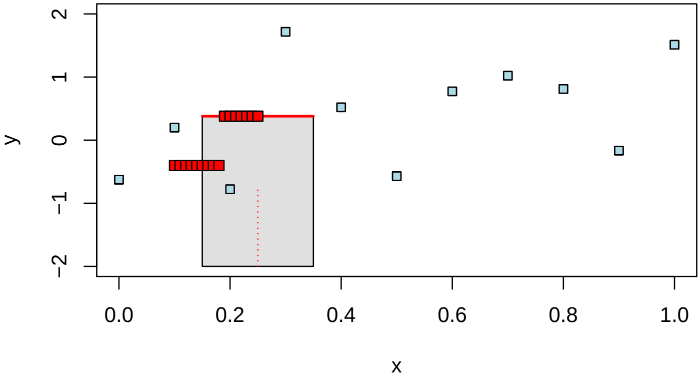
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



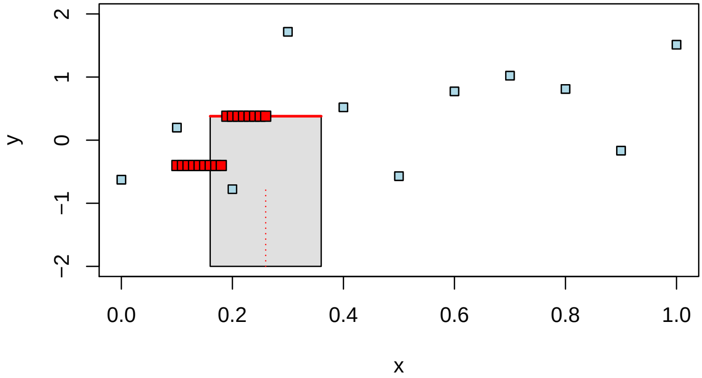
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



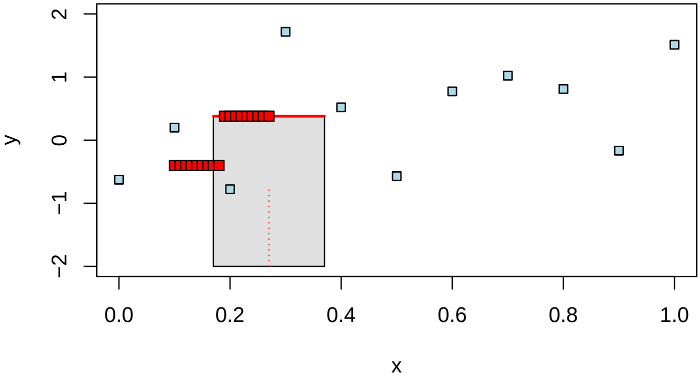
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



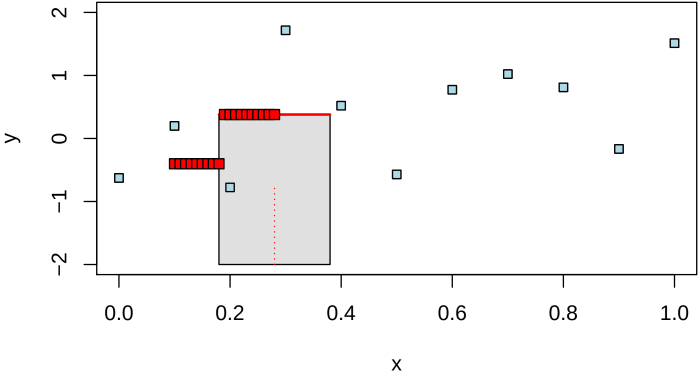
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



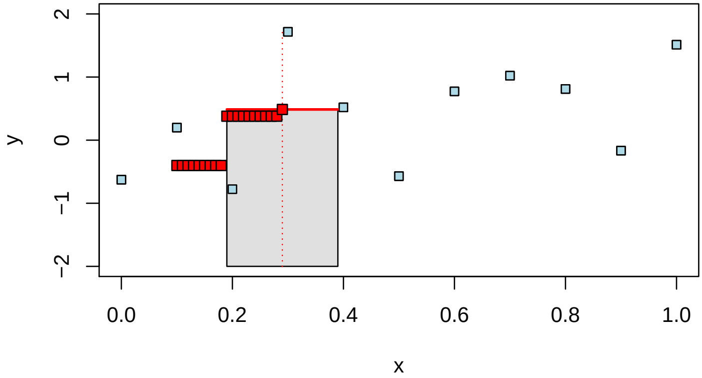
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



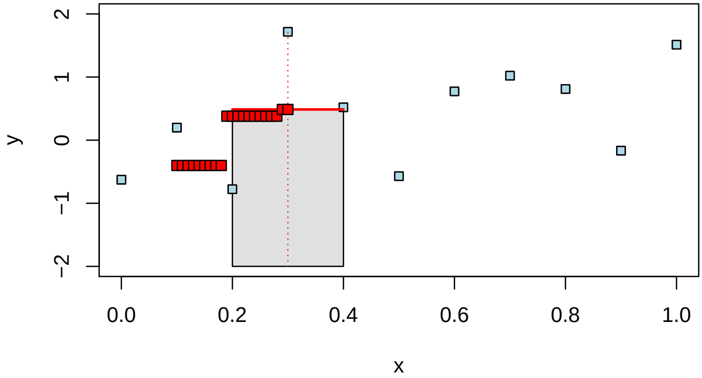
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



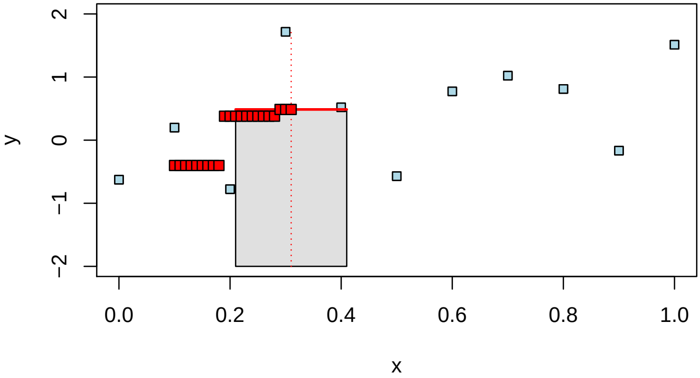
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



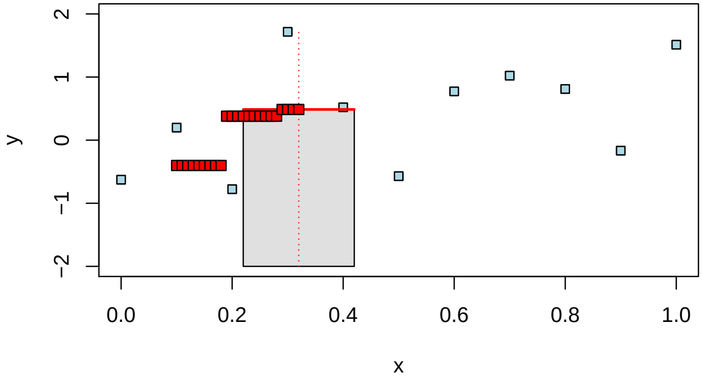
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



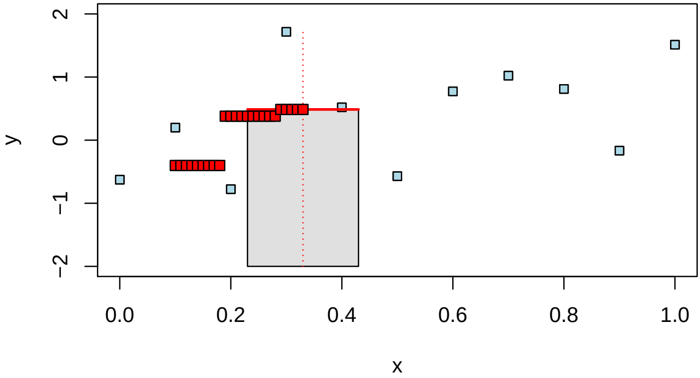
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



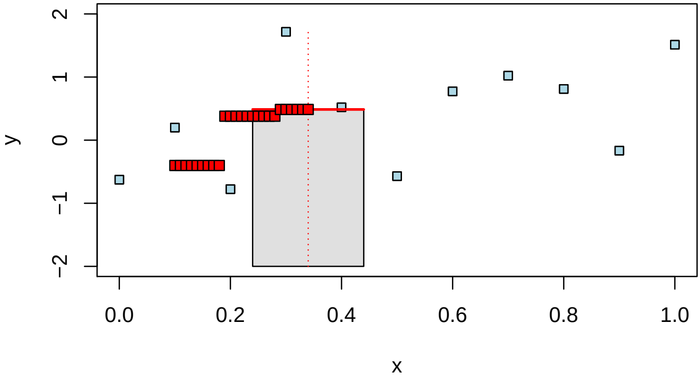
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



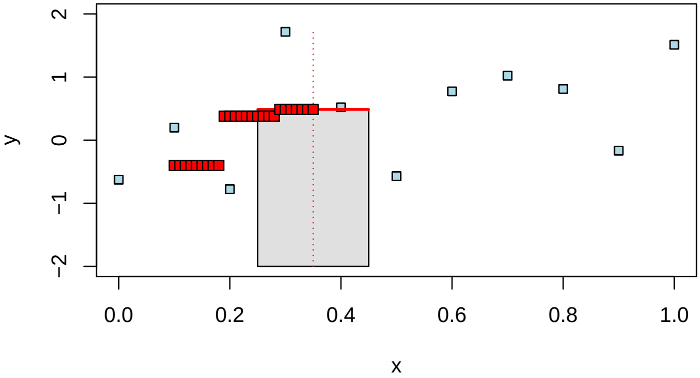
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



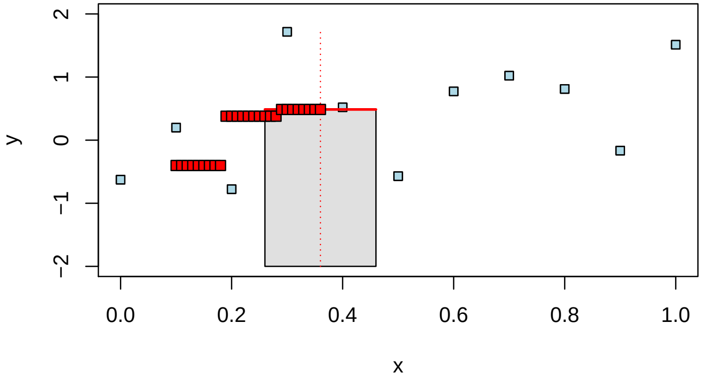
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



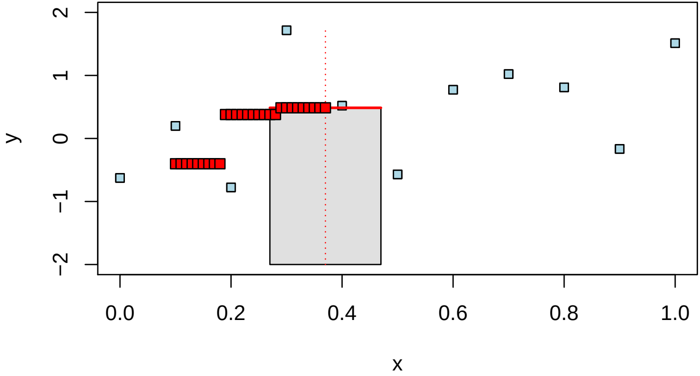
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



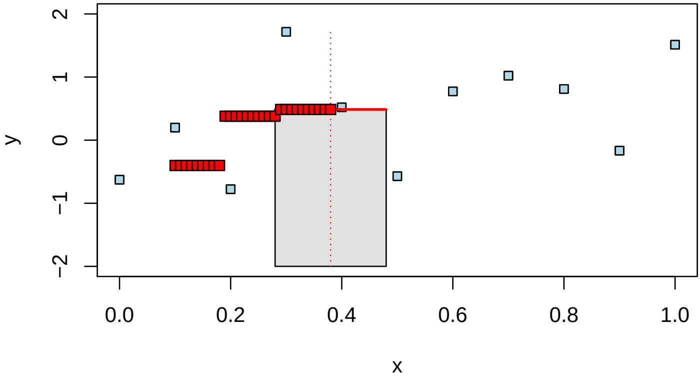
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



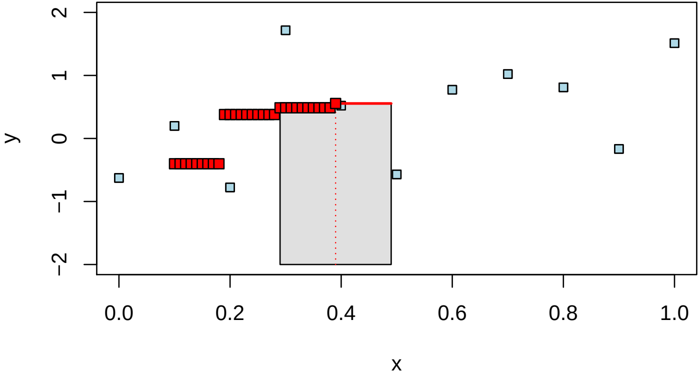
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



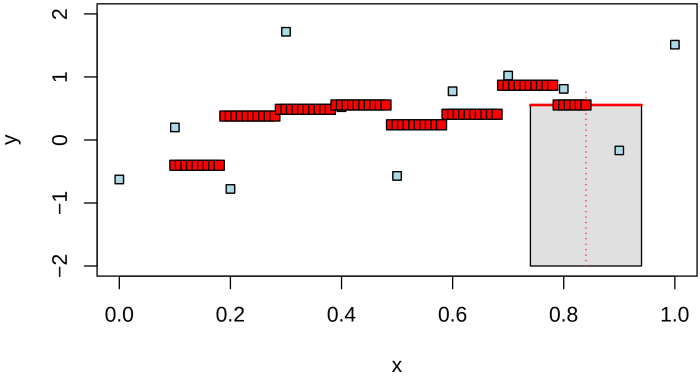
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



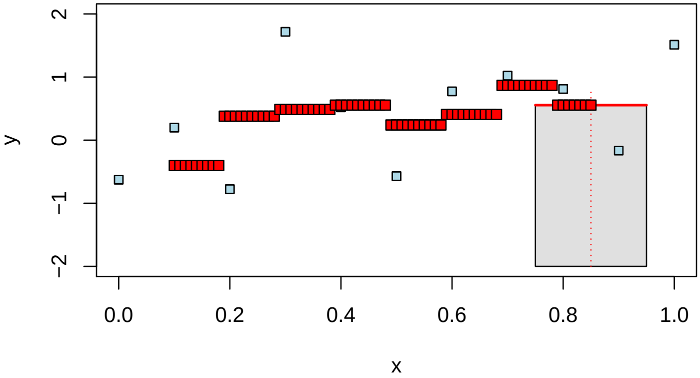
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



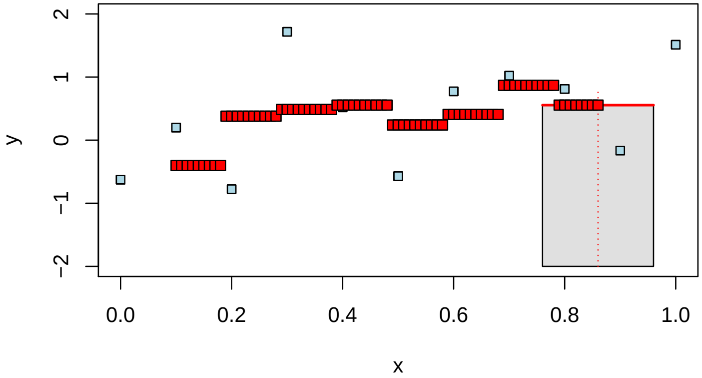
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



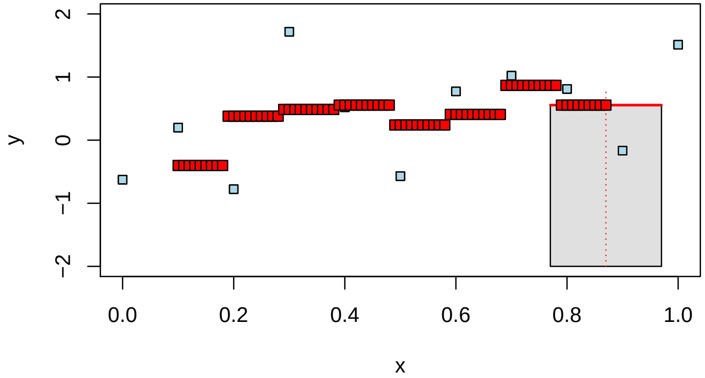
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



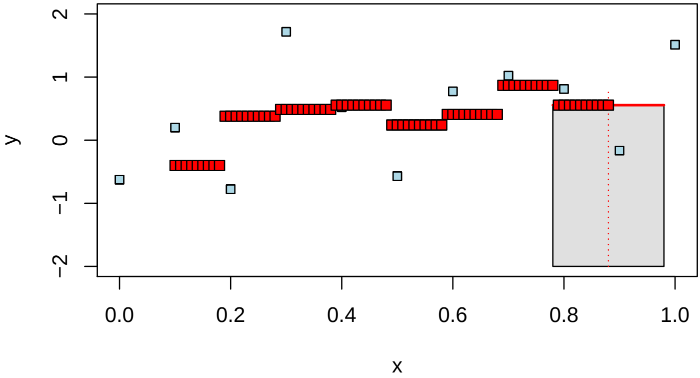
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



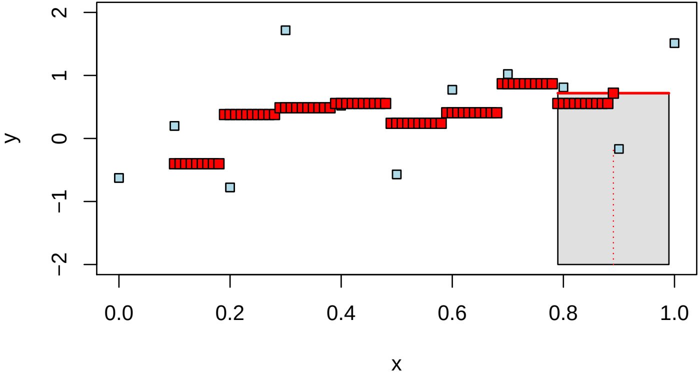
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



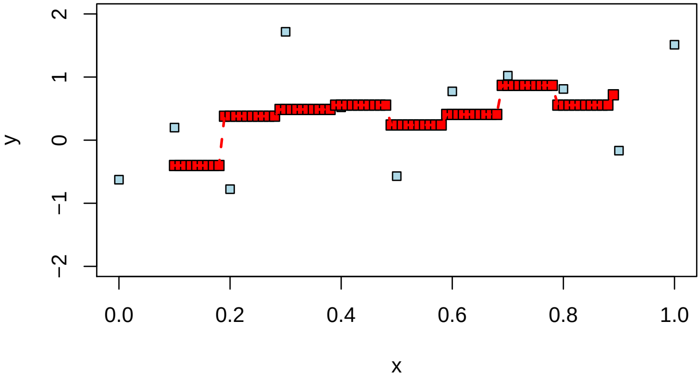
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



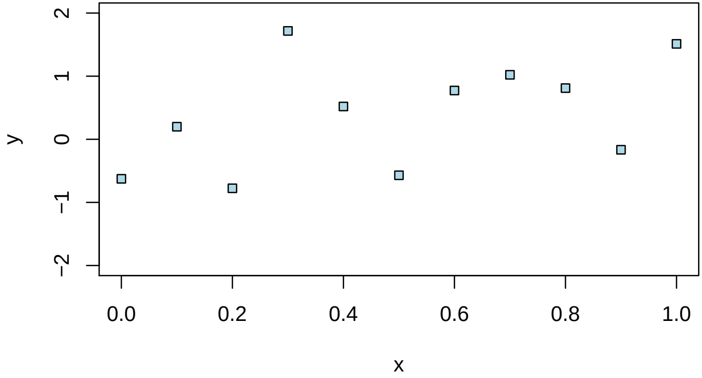
Obyčejné aritmetické klouzavé průměry

- Pri určitém zobecnění pro libovolné $x \in \mathcal{D}$ nedostaneme nutně hladkou křivku, ale pouze po částech konstantné "vyhlazení".



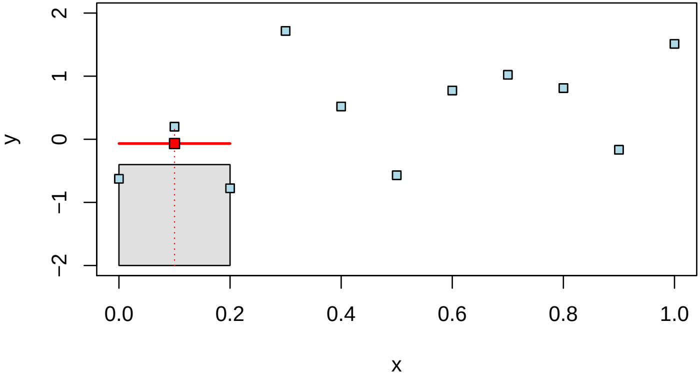
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



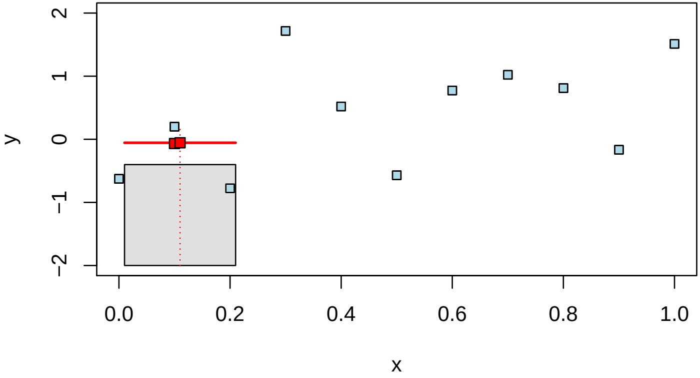
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



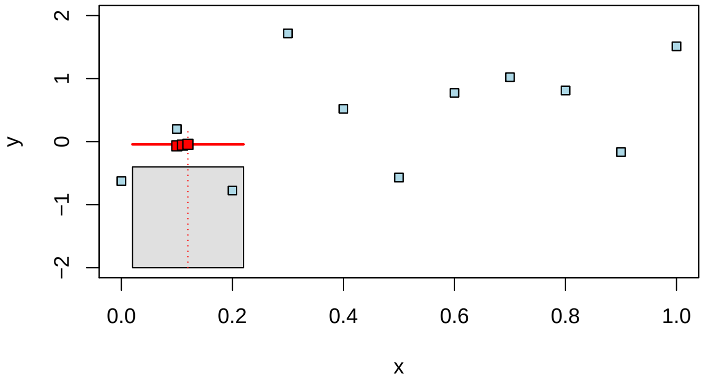
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



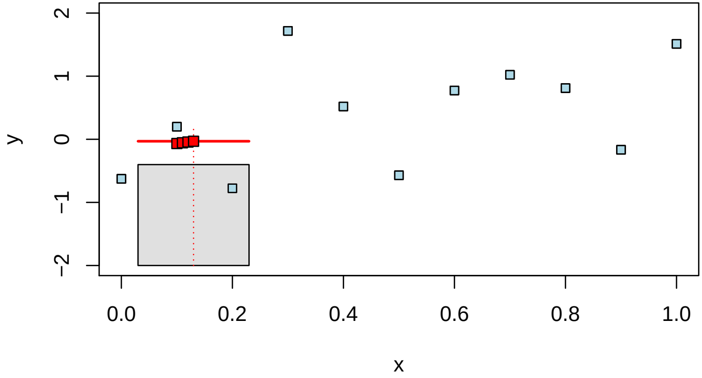
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



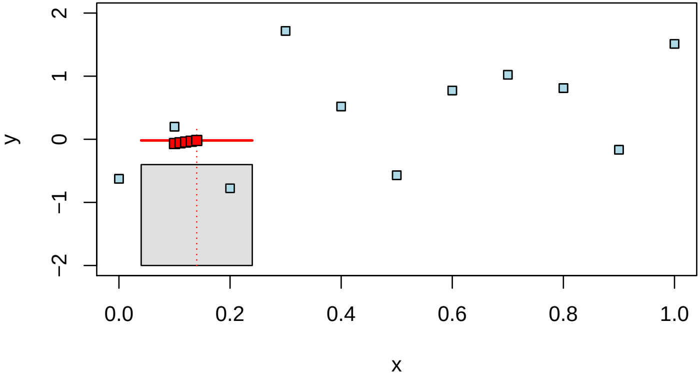
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



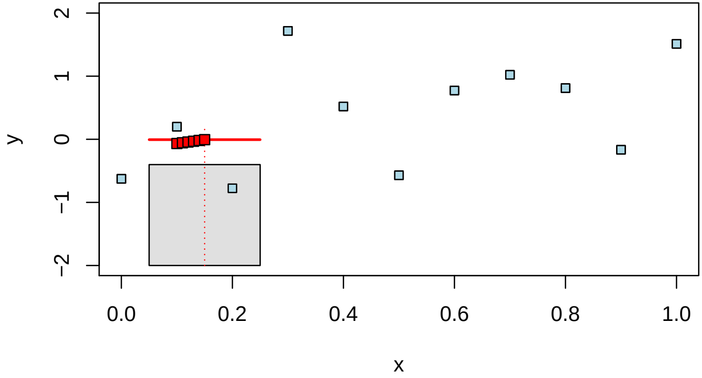
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



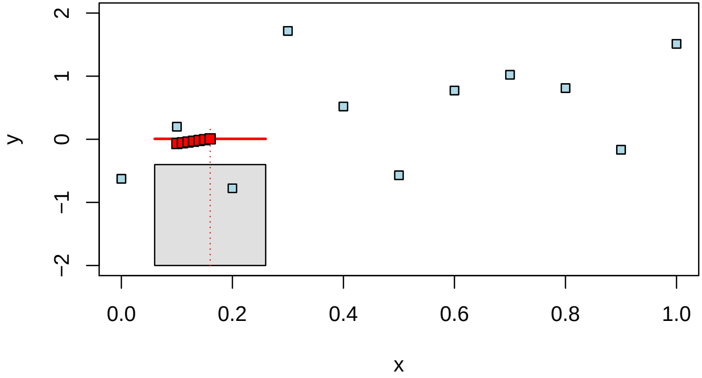
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



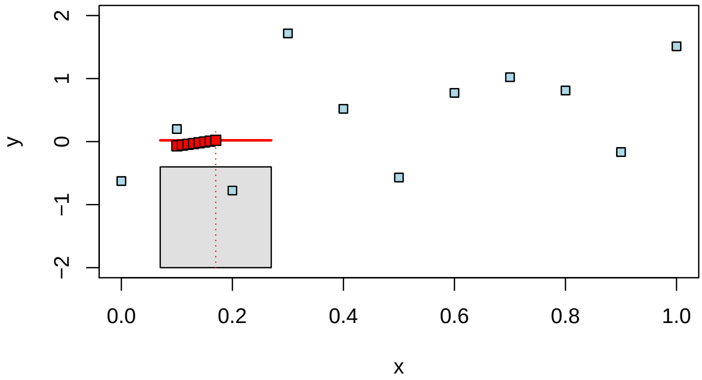
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



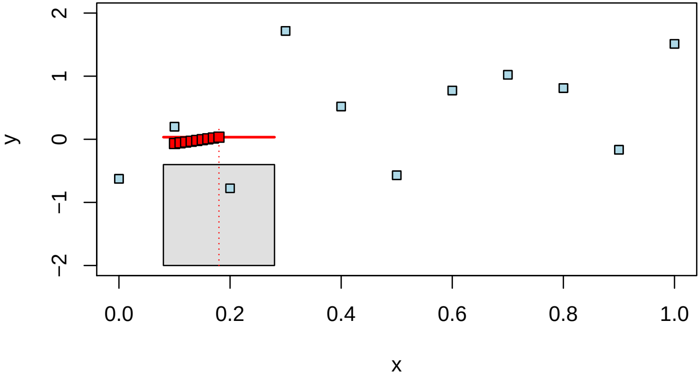
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



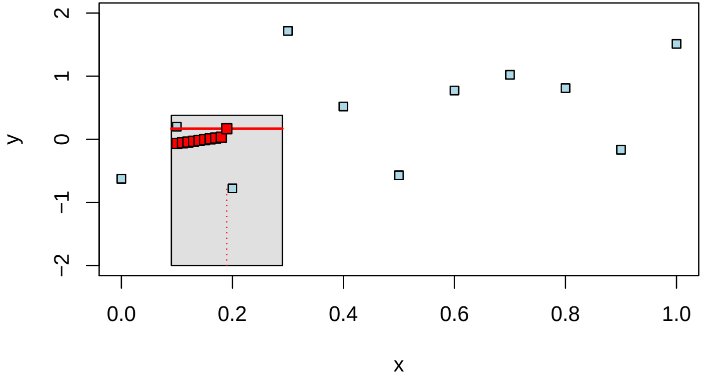
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



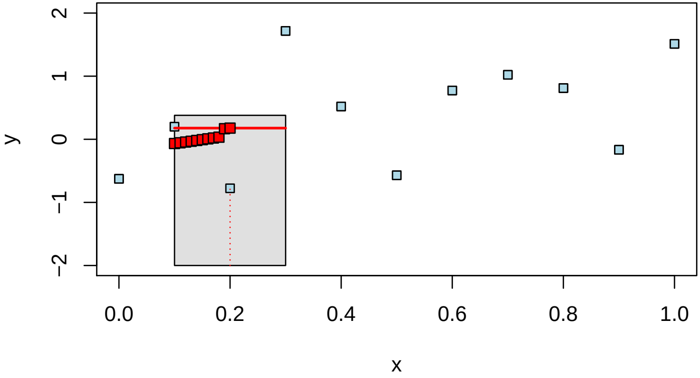
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



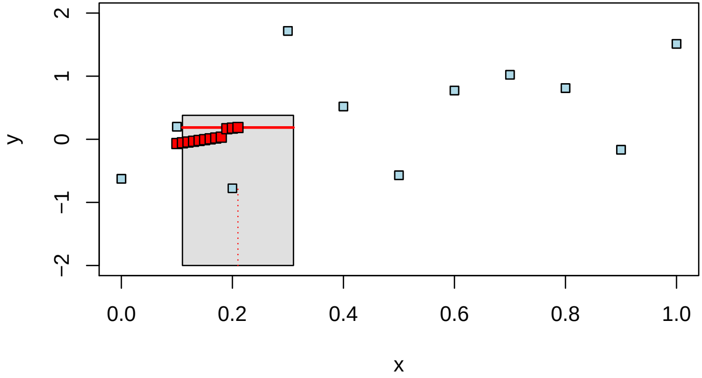
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



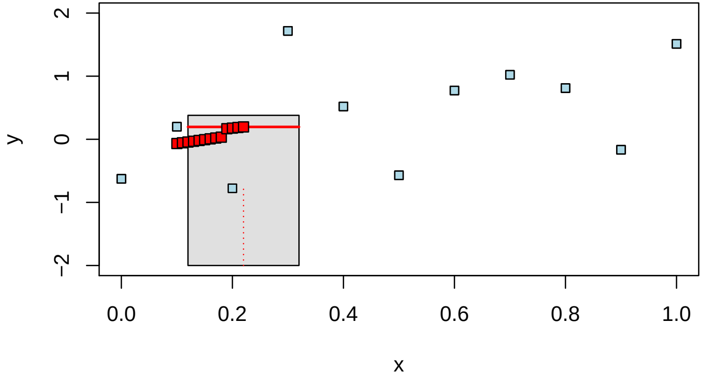
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



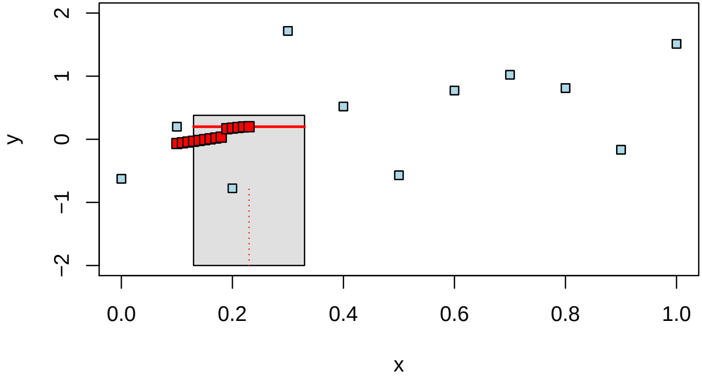
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



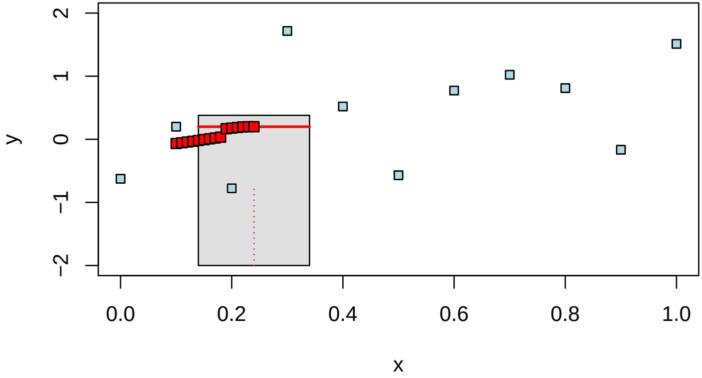
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



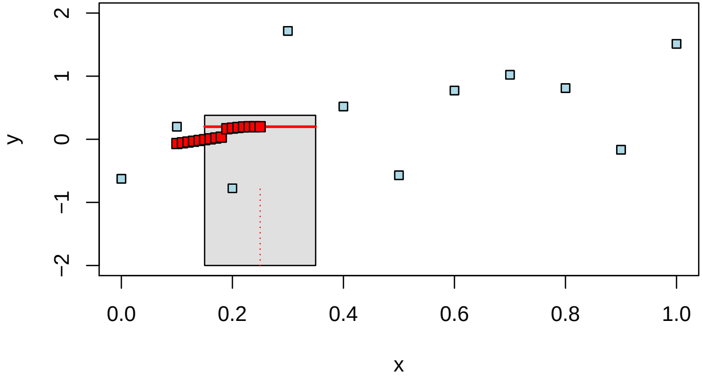
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



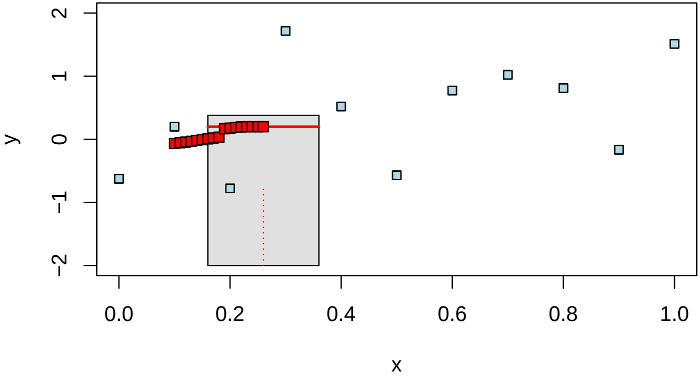
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



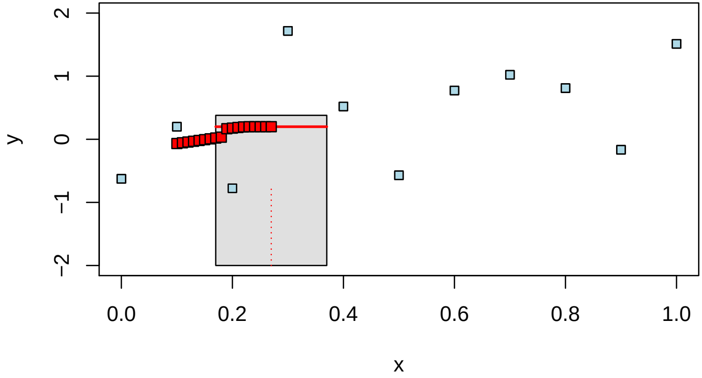
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



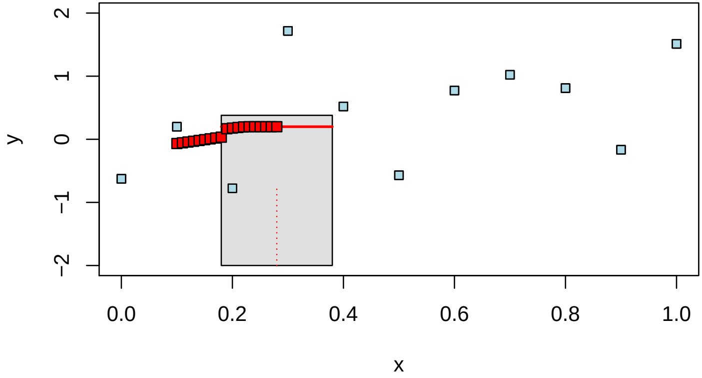
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



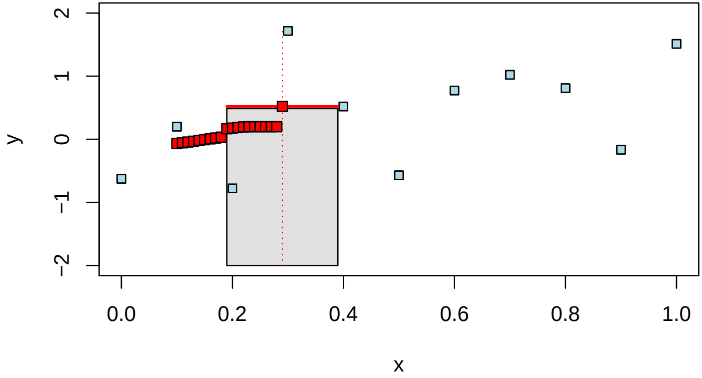
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



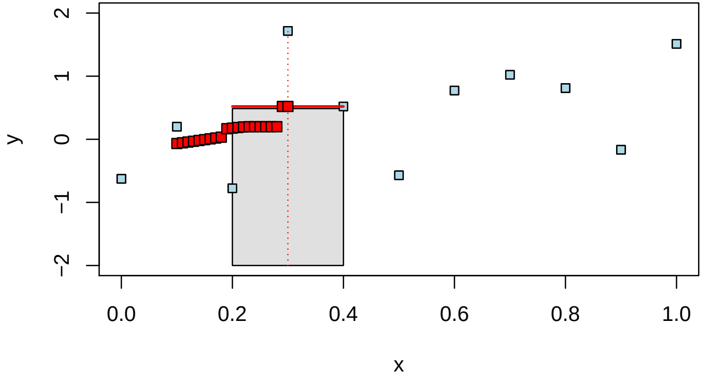
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



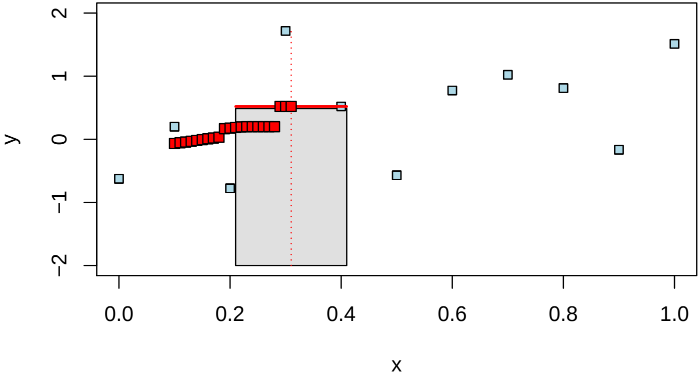
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



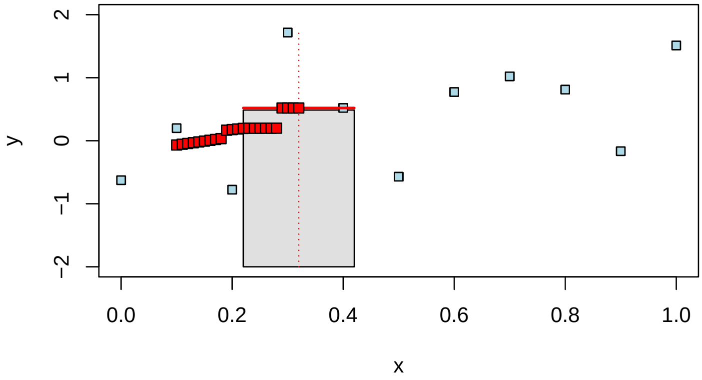
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



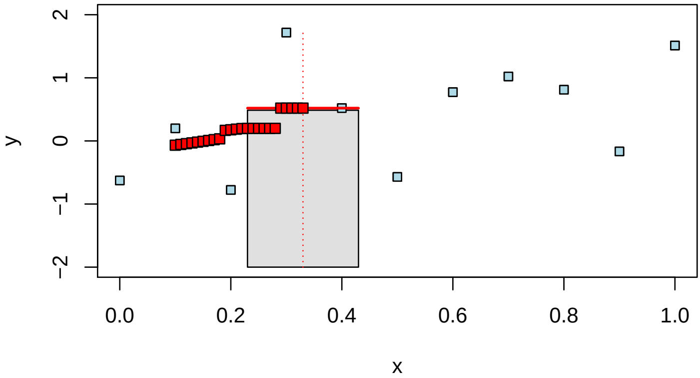
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



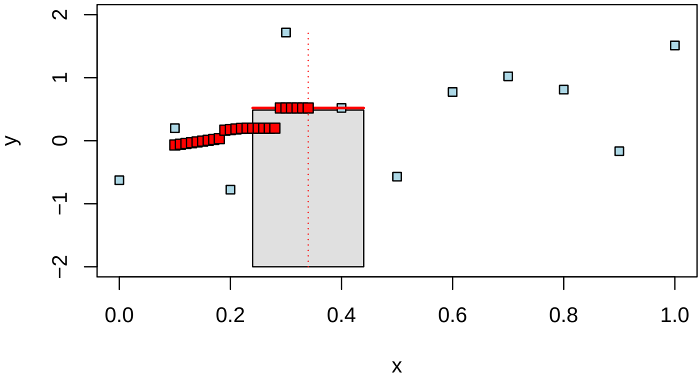
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



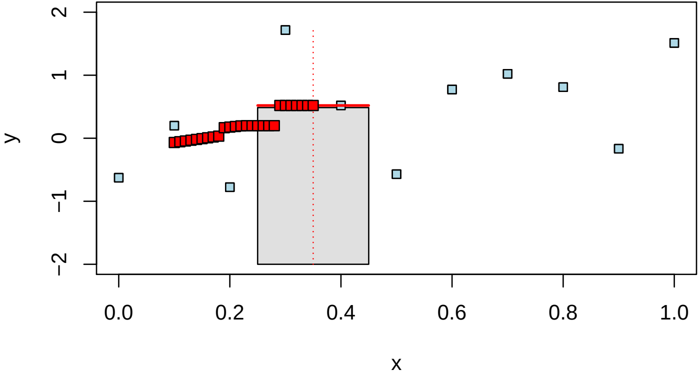
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



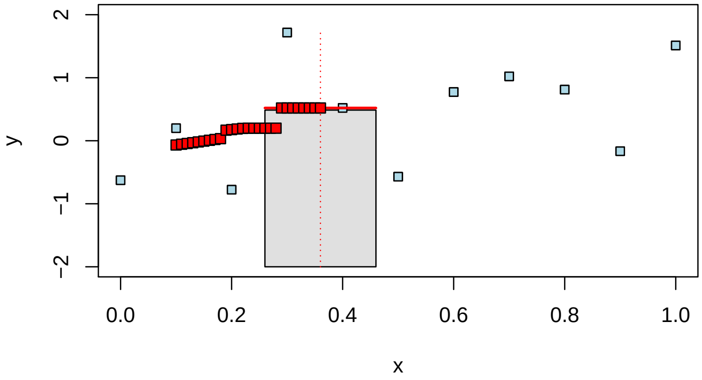
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



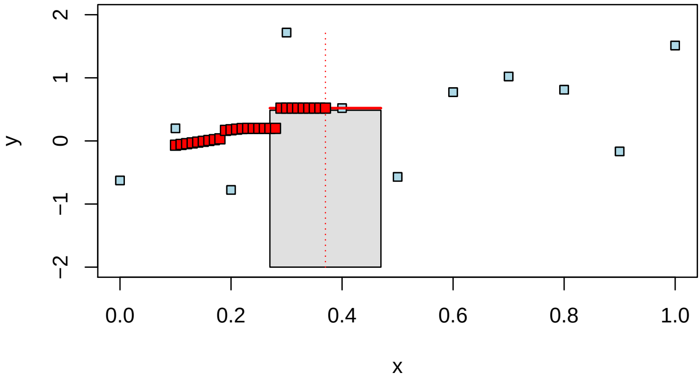
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



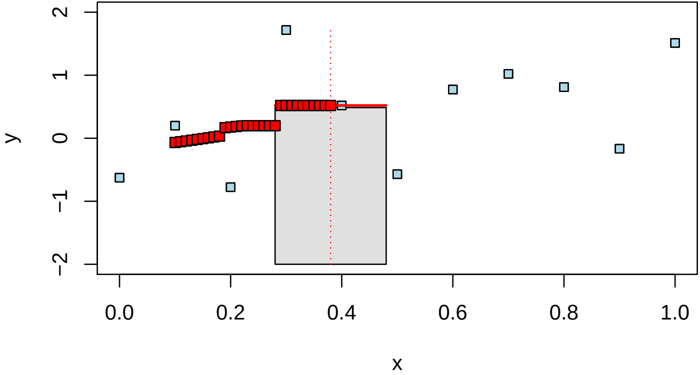
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



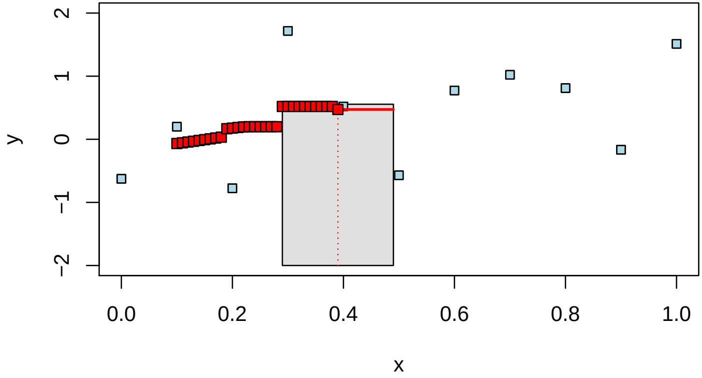
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



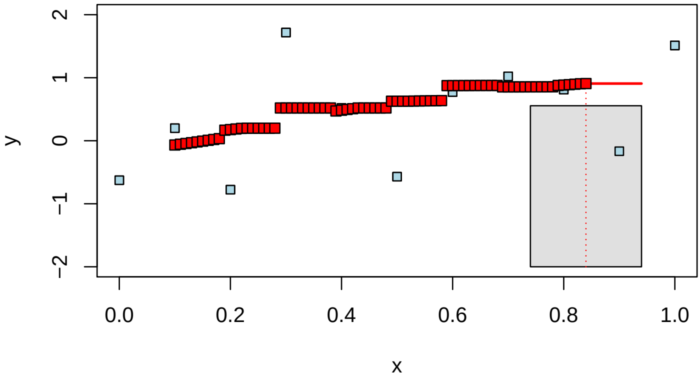
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



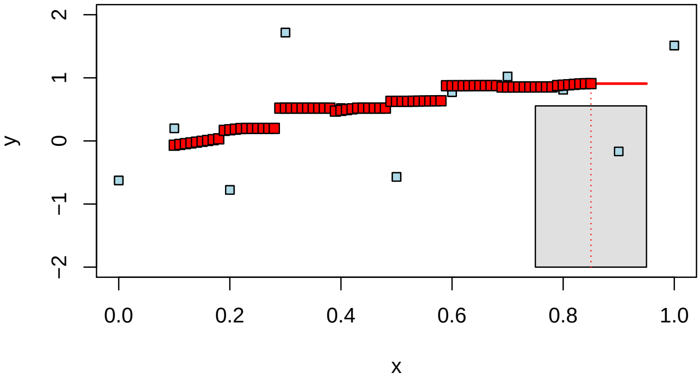
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



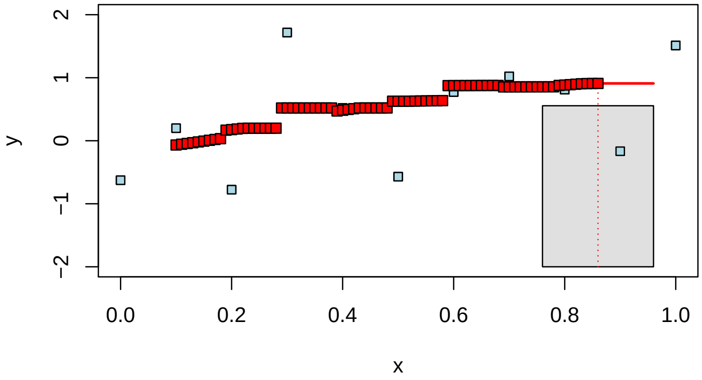
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



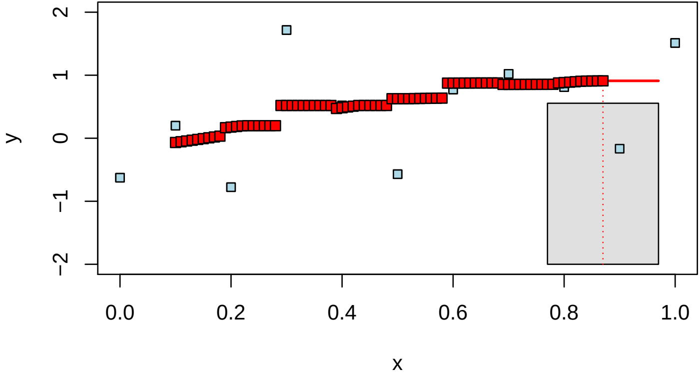
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



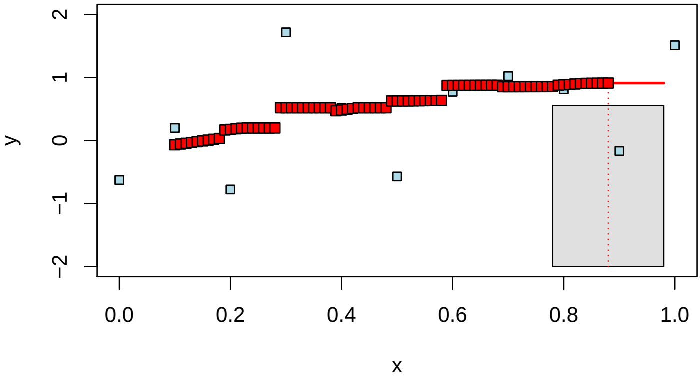
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



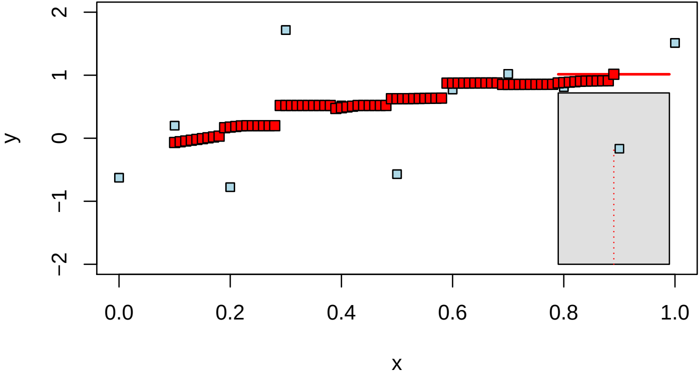
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



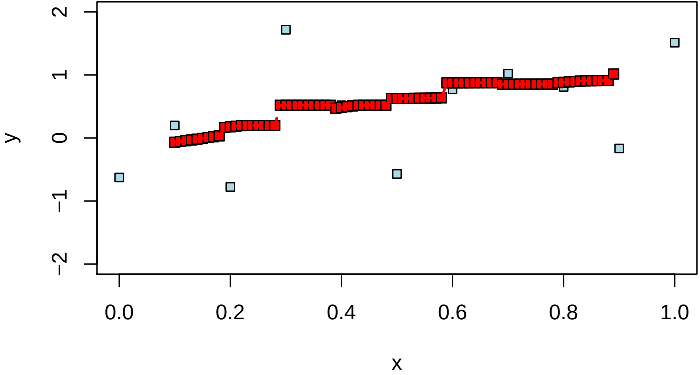
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



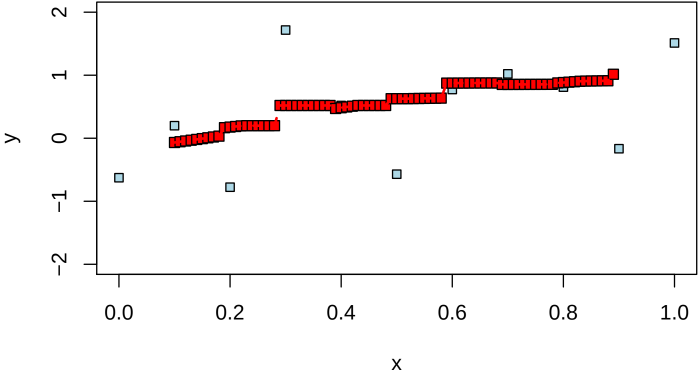
Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



Vážené klouzavé průměry

- Avšak pro vhodnú volbu vyhlazovacích váh je možné získat určitým zobecněním hladkú křivku v celém definičním oboru $\mathcal{D}$.



- Výsledná křivka nevypadá úplně hladce, ale to je z důvodu příliš hrubého gridu bodů z $\mathcal{D}$) v kterých počítame vážený průměr.

Konstrukce KP vyrovnáním úseků polynomy

- **IDEA:** váhy w_j pro vyrovnání hodnot y_i volíme tak, že $2r+1$ členů řady, t.j. hodnoty $y_{i-r}, \ldots, y_i, \ldots, y_{i+r}$, aproximujeme vhodným polynomem stupně $p \in \mathbb{N}$; Vyrovnána hodnota $\hat{y}_i$ je pak hodnota polynomu, ktorá odpovída pozorování y_i.
- hodnota $p \in \mathbb{N}$ se nazýva řád klouzavého průměru;
- formálně zapsáno, pro pozorování $y_{i-r}, \ldots, y_{i+r}$ uvažujeme polynom

$$y_{i+u} \approx c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \cdots + c_p u^p \qquad \text{pro } u = -r, \ldots, r; \tag{2}$$

- resp. zapsáno v maticovem tvaře $\boldsymbol{y}_{(i:r)} \approx \mathbb{F}\boldsymbol{c}$, kde

$$\boldsymbol{y}_{(i:r)} = \begin{pmatrix} y_{i-r} \\ \vdots \\ y_{i+r} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & (-r) & (-r)^2 & \ldots & (-r)^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & r & r^2 & \ldots & r^p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$$

- vyrovnanou hodnotu $\hat{y}_i$ pro y_i pak dostaneme dosazením $u = 0$ do (2);

Váhy pomoci projekční matice

- pro čast pozorování $\boldsymbol{y}_{(i:r)} = (y_{i-r}, \ldots, y_{i+r})^\top$ máme pro vyrovnání vztah
$$\hat{\boldsymbol{y}}_{(i:r)} = \mathbb{F} \cdot \hat{\boldsymbol{c}};$$
- pro odhadnuté parametry $\hat{\boldsymbol{c}} = (\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_p)^\top$ zase platí
$$\hat{\boldsymbol{c}} = (\mathbb{F}^\top \mathbb{F})^{-1} \mathbb{F}^\top \boldsymbol{y}_{(i:r)};$$
- pro vyrovnané hodnoty $\hat{\boldsymbol{y}}_{(i:r)} = (\hat{y}_{i-r}, \ldots, \hat{y}_{i+r})^\top$ proto dostaneme
$$\hat{\boldsymbol{y}}_{(i:r)} = \mathbb{F}(\mathbb{F}^\top \mathbb{F})^{-1} \mathbb{F}^\top \boldsymbol{y}_{(i:r)} = \mathbb{H} \boldsymbol{y}_{(i:r)};$$
- matice $\mathbb{H} = \mathbb{F}(\mathbb{F}^\top \mathbb{F})^{-1} \mathbb{F}^\top$ se nazýva projekční matice;
- projekční matice definuje linárne zobrazení z $\mathbb{R}^{2r+1}$ do $p+1$ rozměrného podprostoru (projekce z $\mathbb{R}^{2r+1}$ do $\mathbb{R}^{p+1}$) v $\mathbb{R}^{2r+1}$;
- projekční matice $\mathbb{H}$ je typu $(2r+1) \times (p+1)$ a v prostředním řádku obsahuje váhy pro vyrovnání hodnoty y_i;

Váhy w_j vs. parametre $c_1, \ldots c_p$

- pro vyhladené hodnoty $\hat{y}_i$, pro $i = r+1, \ldots, n-r$, máme obecně

$$\hat{y}_i = \sum_{j=-r}^{r} w_j y_{i+j} = \boldsymbol{h}_{r+1}^\top \boldsymbol{y}_{(i:r)} = \hat{c}_1,$$

  kde $\boldsymbol{h}_{r+1} = (h_{(r+1)1}, \ldots, h_{(r+1)(2r+1)})^\top = (w_{-r}, \ldots, w_r)^\top$, je $(r+1)$-ní řádek projekční matice $\mathbb{H} = (\boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_{2r+1})^\top$;
- maticově můžeme taktiež použít vyjádření ve tvaru

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{(i:r)} = \mathbb{H}\boldsymbol{y}_{(i:r)} = \mathbb{F}(\mathbb{F}^\top\mathbb{F})^{-1}\mathbb{F}^\top\boldsymbol{y}_{(i:r)} = \mathbb{F}\hat{\boldsymbol{c}},$$

  přičemž vyhlazená hodnota $\hat{y}_i$, která nás zajíma, je $(r+1)$-ní element vektoru $\hat{\boldsymbol{y}}_{(i:r)} = (\hat{y}_{i-r}, \ldots, \hat{y}_{i+r})^\top$;
- je důležité si uvědomit, že váhy $w_{-r}, \ldots, w_r$ nezávisí na indexu $i = r+1, \ldots, n-r$ a pro každou vyhlazenú hodnotu $\hat{y}_i$ jsou stejné; *(váhy $w_{-r}, \ldots, w_r$ závisí pouze na matici $\mathbb{F}$, která je pořád stejná)*
- naproti tomu odhadnuté parametre $\hat{c} = (\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_p)^\top$ na indexu $i = r+1, \ldots, n-r$ závisí, a pro každé $\hat{y}_i$ jsou parametry obecně různe; *(odhady $\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_p$ totíž závisia na matici $\mathbb{F}$, ale tiež na vektore $\boldsymbol{y}_{(i:r)}$)*

Odhad parametrů $c_0, \ldots, c_p$

- odhad parametrov $c_0, \ldots, c_p$ pomocou metódy nejmenších čtverců;

Samostatný úkol

Jak vypadá v tomhle případě matice $\mathbb{F}$ a jak se mení v závislosti na požadovanej hodnote y_i, pro $i = -r, \ldots, r$, kterú chceme vyhlazovat?

Jak vypadá soustava normálných rovníc a příslušná projekční matice?

Príklad

Uvažujte kubický polynom pro $p = 3$ a $r = 2$. Polynom pro určení váh je ve tvaru $y_{i+u} \approx c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3$, kde $c_0, \ldots, c_3 \in \mathbb{R}$ jsou neznáme parametry.

- sestavte příslušnou matici $\mathbb{F}$;
- nájděte projekčnou matici $\mathbb{H} = \mathbb{F}(\mathbb{F}^\top \mathbb{F})^{-1}\mathbb{F}^\top$;
- nájděte váhy w_j, pro $j = -2, 1, 0, 1, 2$ a spočtěte $\hat{y}_i$, pro $i = 3, \ldots, n-2$;

Vyrovnané hodnoty a predikce

- na rozdíl od klasických aritmetických klouzavých průměrů je možné využit vážené klouzavé průměry aj k vyrovnání počátečných a koncových hodnot;
- pro vyhlazení napr. koncového úseku stačí v (2) vhodne dosadit za u;

  Napr. pro $r = 1$ a $p = 1$, máme $y_{i+u} \approx c_0 + c_1 u$, pro $u = -1, 0, 1$ a $i = 2, \ldots, n-1$;
  Pro vylazení y_n dosadíme: $i \leftarrow n-1$ a $u \leftarrow 1 \Rightarrow y_n = y_{(n-1)+1} \approx c_0 + c_1$ a $\hat{y}_n = \hat{c}_0 + \hat{c}_1$;
- analogicky lze použít výraz (2) i pro budoucí predikce;

  Napr. pro $r = 2$ a $p = 2$, máme $y_{i+u} \approx c_0 + c_1 u + c_2 u^2$, pro $u = -2, \ldots, 2$ a $i = 3, \ldots, n-2$;
  Predikce y_{n+1}: $i \leftarrow n-2$ a $u \leftarrow 3 \Rightarrow y_{n+1} = y_{(n-2)+3} \approx c_0 + 3c_1 + 9c_2$ a $\hat{y}_{n+1} = \hat{c}_0 + 3\hat{c}_1 + 9\hat{c}_2$;

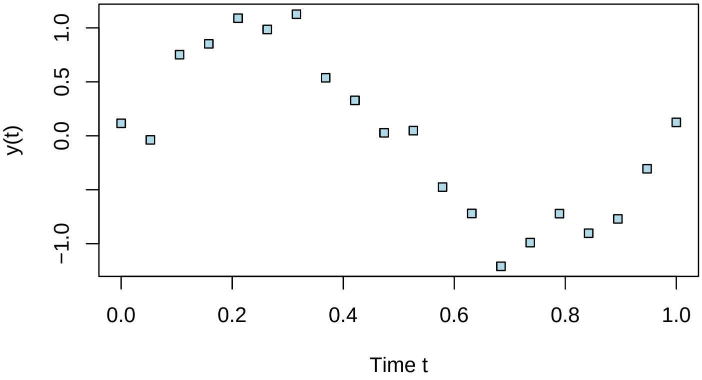
Príklad

Uvažujte kubický polynom pro $p = 3$ a $r = 2$. Polynom pro určení váh je ve tvaru $y_{i+u} \approx c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3$, kde $c_0, \ldots, c_3 \in \mathbb{R}$ jsou neznáme parametry.

- spočtěte predikci o jeden krok dopředu a explicitně vyjadřite váhy pro vážený průměr;

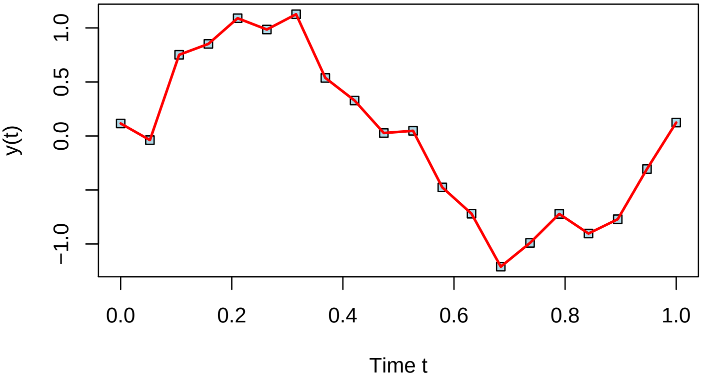
Vychýlení vs. variabilita

- Jak zvolit/vybrat vhodnou míru vyhlazení?
- Lze aplikovat nějaké optimálne kritérum pomoci kterého se rozhodnout?



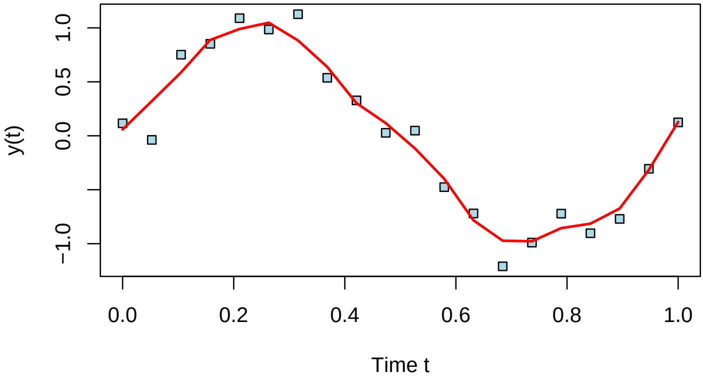
Vychýlení vs. variabilita

- Jak zvolit/vybrat vhodnou míru vyhlazení?
- Lze aplikovat nějaké optimálne kritérum pomoci kterého se rozhodnout?



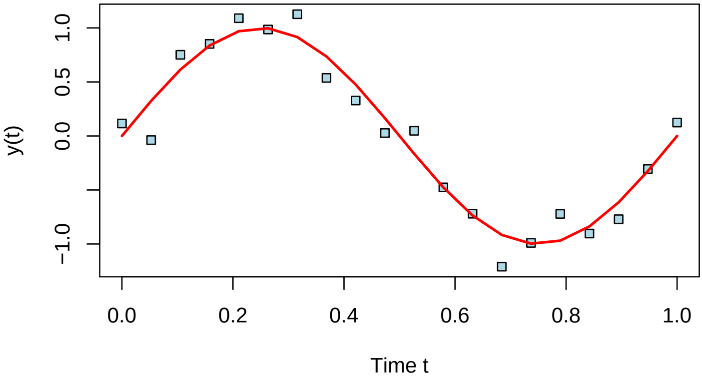
Vychýlení vs. variabilita

- Jak zvolit/vybrat vhodnou míru vyhlazení?
- Lze aplikovat nějaké optimálne kritérum pomoci kterého se rozhodnout?



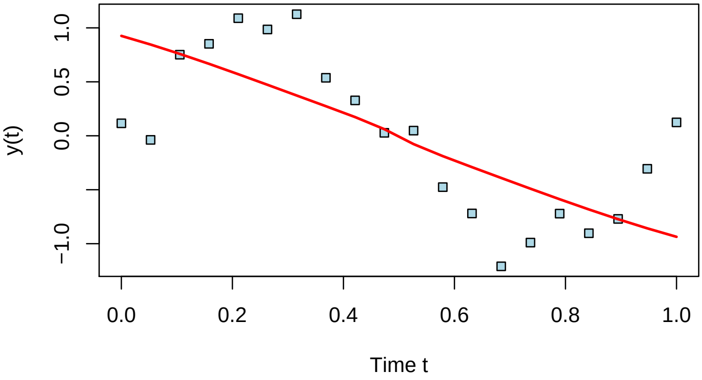
Vychýlení vs. variabilita

- Jak zvolit/vybrat vhodnou míru vyhlazení?
- Lze aplikovat nějaké optimálne kritérum pomoci kterého se rozhodnout?



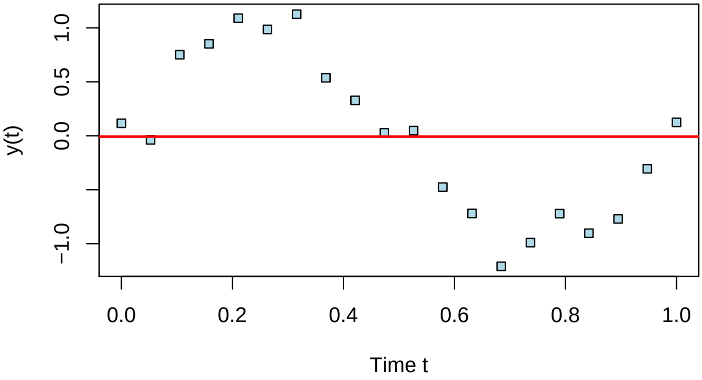
Vychýlení vs. variabilita

- Jak zvolit/vybrat vhodnou míru vyhlazení?
- Lze aplikovat nějaké optimálne kritérum pomoci kterého se rozhodnout?



Vychýlení vs. variabilita

- Jak zvolit/vybrat vhodnou míru vyhlazení?
- Lze aplikovat nějaké optimálne kritérum pomoci kterého se rozhodnout?



Whitttacker-Hendersonová metoda

Základnou úlohou vyhlazování dat je odhadnout hladký, pomalu se měníci trend. Zároveň cheme dosáhnout co nejlepší zhodu mezi původními daty a vylazenými daty (zhodu mezi daty a modelem);

- **Dokonalé vyhlazení**
  $\Rightarrow$ příliš velký součet čtverců odchylek, a malá zhoda s původními daty;
- **Dokonalá zhoda s daty**
  $\Rightarrow$ nulový součet čtverců odchylek, príliš velká variabilita, interpolace;

Whitttacker-Hendersonová metoda

Základnou úlohou vyhlazování dat je odhadnout hladký, pomalu se měníci trend. Zároveň cheme dosáhnout co nejlepší zhodu mezi původními daty a vylazenými daty (zhodu mezi daty a modelem);

- **Dokonalé vyhlazení**
  $\Rightarrow$ příliš velký součet čtverců odchylek, a malá zhoda s původními daty;
- **Dokonalá zhoda s daty**
  $\Rightarrow$ nulový součet čtverců odchylek, príliš velká variabilita, interpolace;

Whittacker/Hendersonova metoda

Metoda, která umožňuje hledat kompromis mezi těmeto dvěma požadavky tím, že jim přiděluje rozdílnou váhu. Výrovnané hodnoty minimalizují kritérium

$$M(\hat{\boldsymbol{y}}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}_{\text{součet čtverců}} + \lambda \cdot \underbrace{\sum_{i=r+1}^{n}(\Delta^r \hat{y}_i)^2}_{\text{penalta}},$$

kde $\lambda > 0$ je nějaký vhodně zvolený ladící parametr.

Whitttacker-Hendersonová metoda

- W-H metoda nepředpokláda žádny konkrétny tvar prokladané křivky;
- symbol $\Delta^r \hat{y}_i$ označuje rekuzivnou r-tou zpětnou diferenci posloupnosti $\hat{y}_i$;
- obecně platí, že $\Delta^0 \hat{y}_i = \hat{y}_i$ a $\Delta^1 \hat{y}_i = \Delta \hat{y}_i = \hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}$;
- pro r-tou zpětnou diferenci platí $\Delta^r \hat{y}_i = \Delta^{r-1} \hat{y}_i - \Delta^{r-1} \hat{y}_{i-1}$;
- obecně lze také zapsat pomoci binomické formule

$$\Delta^r \hat{y}_i = \binom{r}{0} \hat{y}_i - \binom{r}{1} \hat{y}_{i-1} + \cdots + (-1)^r \binom{r}{r} \hat{y}_{i-r},$$

Whitttacker-Hendersonová metoda

- W-H metoda nepředpokláda žádny konkrétny tvar prokladané křivky;
- symbol $\Delta^r \hat{y}_i$ označuje rekuzivnou r-tou zpětnou diferenci posloupnosti $\hat{y}_i$;
- obecně platí, že $\Delta^0 \hat{y}_i = \hat{y}_i$ a $\Delta^1 \hat{y}_i = \Delta \hat{y}_i = \hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}$;
- pro r-tou zpětnou diferenci platí $\Delta^r \hat{y}_i = \Delta^{r-1} \hat{y}_i - \Delta^{r-1} \hat{y}_{i-1}$;
- obecně lze také zapsat pomoci binomické formule

$$\Delta^r \hat{y}_i = \binom{r}{0} \hat{y}_i - \binom{r}{1} \hat{y}_{i-1} + \cdots + (-1)^r \binom{r}{r} \hat{y}_{i-r},$$

IDEA:
Rekurzívní zpětná diference je diskrétné zobecnění pojmu derivace. Základnou myšlienkou je penalizovať príliš veľké rozdiely v danej r-tej diferencii. Napr. pro $r = 1$ penalizujeme príliš veľké rozdiely v první diferenci, t.j. pro $\lambda \to \infty$ dostaneme vyhlazení ve tvaru prímky.

Whitttacker-Hendersonová metoda

- kritérium $M(\hat{\boldsymbol{y}})$ lze zapsát aj v maticovém tvaru jako

$$M(\hat{\boldsymbol{y}}) = (\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}})^\top (\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}) + \lambda \cdot \hat{\boldsymbol{y}}^\top \mathbb{K}^\top \mathbb{K} \hat{\boldsymbol{y}};$$

- matice $\mathbb{K}$ je typu $(n-r) \times n$ a ma tvar

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} (-1)^r & \dots & -\binom{r}{1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & (-1)^r & \dots & -\binom{r}{1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & (-1)^r & \dots & -\binom{r}{1} & 1 \end{pmatrix}$$

- derivováním podle $\hat{\boldsymbol{y}}$ dostaneme soustavu normálních rovníc

$$\nabla_{\hat{y}} M(\hat{\boldsymbol{y}}) = \left(\frac{\partial M(\hat{\boldsymbol{y}})}{\partial \hat{y}_1}, \dots, \frac{\partial M(\hat{\boldsymbol{y}})}{\partial \hat{y}_n} \right) = 2\boldsymbol{y} - 2\hat{\boldsymbol{y}} + 2\lambda \mathbb{K}^\top \mathbb{K} \hat{\boldsymbol{y}}$$

- riešime soustavu rovníc $\nabla_{\hat{y}} M(\hat{\boldsymbol{y}}) = 0 \implies$ řešení ve tvaru

$$\hat{\boldsymbol{y}} = (\mathbb{I} + \lambda \mathbb{K}^\top \mathbb{K})^{-1} \boldsymbol{y};$$

Zhrnutí

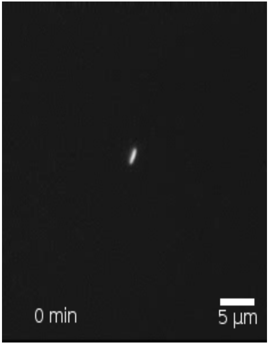
- Data jako posloupnost deterministických nebo stochastických veličiny;
- Různe metody vyhlazování dat – prokladání vhodnou hladkou křivkou;
  - **Parametrické metody**
    (jednoduché, ale málo flexibilné)
  - **Semiparametrické metody**
    (vyrovnání jako lineární kombinace fukci báze, pomerně dobrá flexibilita)
  - **Neparametrické metody**
    (bez omezení na tvar prokladáné křivky, nelze ale vyjadřit explicitně)
- V některých připadech lze dokonce konstruovat predikci do budoucnosti;
  (není vhodné používat na predikci o moc kroků dopredu...)
- Základným rozhodovacím kritériom pre dobrý model je jeho využitie;
  (flexibilita/adaptivita modelu vs. jeho zložitosť/komplexita)
- Při vyhlazování dat pamatovat na vztah medzi vychýlením a variabilitou;
  (prílišné vyhlazení $\equiv$ *malá variabilita a příliš velké odchýlky* $|$ *vice versa)*
- Whitttacker-Henderson - regularizační neparametrický postup;
  (vhodnou volbou $\lambda > 0$ *a* $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *lze dosáhnout požadovaný tvar)*

Kapitola 2

Diferenciální rovnice a modely růstu

Modely růstu – motivace

Modely velikosti populace, kde velikost změny (růstu/poklesu) závisí na aktuálnem stavu (velikosti) populace.
(obecně řečeno, jedná se o model dynamiky nějaké populace)



Široké uplatnění týchto modelů v ...

- **mikrológii, virológii, či biológii**
  (pandemický vývoj, napr. Covid-19 ...)
- **fyzika, chémia, alebo mechanika**
  (štiepenie, nukleárne reakcie, lavíny, ...)
- **mikro/makro ekonómia a finance**
  (pyramidové schémy, modely kapitálu, ...)
- **IT, informatika, technika**
  (výpočetná sila a zložitost, singularity, ...)

Modely růstu – formálně

- jedná se víceparametrický deterministický (nelineární) model pro modelování růstu (stavu) nějaké populace (počet obyvatelstva, zásoby nějakého statku, objem komodity, atď) v závislosti na velikosti;
- zaužívané značení: $y(t) \geq 0$ jako stav (velikost) populace v čase $t \in \mathbb{R}$;
- model určen pomoci deferenciální rovnice, čo umožňuje vyjádřit závislost rychlosti růstu na velikosti populace v čase $t \in \mathbb{R}$;
- IDEA: očekáváme, že populace by měla růst rýchleji, když je velká, a naopak zase pomalejí, když je malá;
- diferenciální rovnice často v tvaru, který v určitem zmyslu modeluje lineární závislost růstu na velikosti:

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \cdot g\left(\frac{y}{k}\right)$$

kde $y \equiv y(t)$ je funkce $t \in \mathbb{R}$ a $a, k > 0$ jsou neznáme parametry;

Korekce lineární závislosti růstu na velikosti

Funkce $g(\cdot)$ v zápisu diferenciální rovnice se používa ke korekci lineární závislosti růstu na velikosti populace – bez tehle korekce je totiž většina modelů praktický nesmyslných;

- **Volba $g(x) = 1$: Klasický model exponenciálního růstu**

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \quad \Longrightarrow \text{řešení} \quad y(t) = be^{at};$$

$\rightarrow$ pro nějaké parametry $a, b > 0$;

- **Volba $g(x) = 1 - x$: Model logistického růstu**

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{k}\right) \quad \Longrightarrow \text{řešení} \quad y(t) = \frac{k}{1 + be^{-at}};$$

$\rightarrow$ pro nějaké parametry $a, b, k > 0$;

- **Volba $g(x) = -\log x$: Model Gomertzovej křivky**

$$\frac{dy}{dt} = -a \cdot y \cdot \log\left(\frac{y}{k}\right) \quad \Longrightarrow \text{řešení} \quad y(t) = k \cdot exp\{be^{-at}\};$$

$\rightarrow$ pro nějaké parametry $a, b, k > 0$;

Modely růstu

Príklad

Uvažujte jednoduchý model exponencialního růstu. Ukážte, že funkce

$$y(t) = be^{at}$$

je skutečně řešením diferenciální rovnice $dy/dt = ay$.

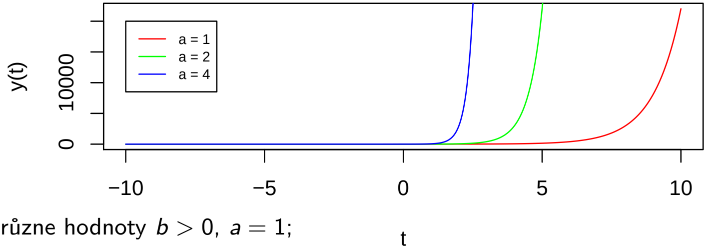
Príklad

Uvažujte model logistického růstu pro nějaké obecné $k > 0$.

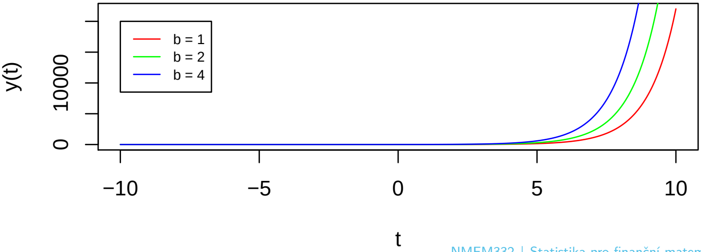
- ukážte, že funkce $y(t) = \frac{k}{1+be^{-at}}$ je řešením diferenciální rovnice $dy/dt = ay(1 - y/k)$
- nájděte inflexní bod a dokážte, že křivka logistického růstu je symetrická kolem tohto bodu;

Modely exponenciálního růstu

- různe hodnoty $a > 0$, $b = 1$;

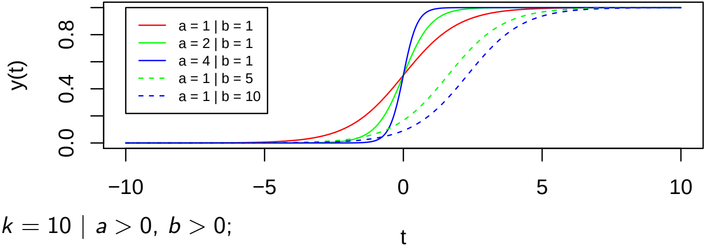


- různe hodnoty $b > 0$, $a = 1$;

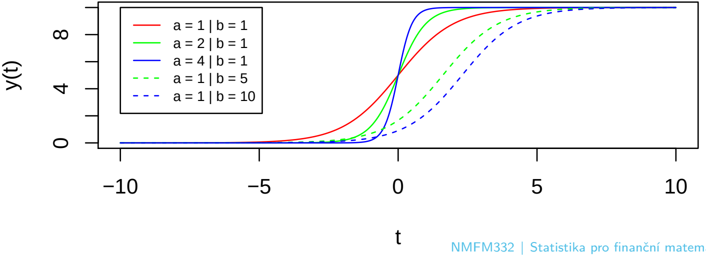


Modely logistického růstu

- $k = 1 \mid a > 0,\ b > 0;$

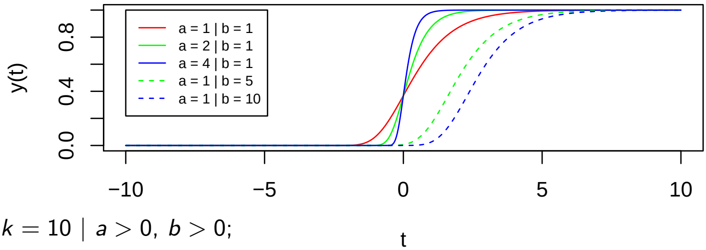


- $k = 10 \mid a > 0,\ b > 0;$

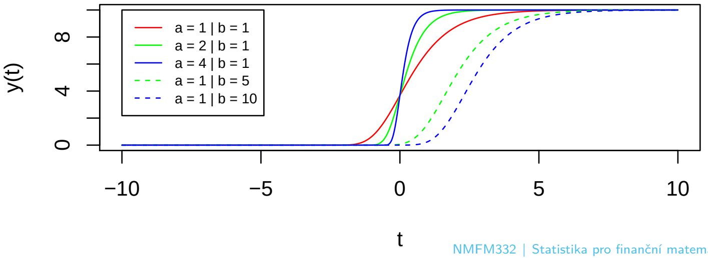


Modely Gompertzové křivky

- $k = 1 \mid a > 0,\ b > 0;$



- $k = 10 \mid a > 0,\ b > 0;$



Modely růstu – aplikace

- **Model exponenciálního růstu**
  - model neomezeného růstu při neomezených zdrojích;
  - aplikovatelný pouze v krátkodobem časovem horizontu;
  - v praxi většinou nedostupnost zdrojů při určitem stavu populace;
- **Model logistického růstu**
  - model s korekci pro saturovanou hodnotu – parametr $k > 0$;
  - inflexní bod pro $t_0 = \frac{\ln b}{a}$, kde $y(t_0) = k/2$ (symetrie vzhledem k t_0);
  - pro celkový stav populace vždy platí, že $0 < y(t) < k$ pro $t \in \mathbb{R}$;
  - hodnota $(1 - y/k)$ omezuje nové přirůstky pro velkou populaci (málo zdrojů) – jedná se o tzv. sigmoidální křivku (sigmoid function);
- **Gompertzová křivka**
  - zbecněná sigmoidální křivka (prudký nárůst, pomalejší saturace);
  - inflexní bod pro $t \in \mathbb{R}$, kde $y(t) = k/e$ (ale není symetrická;)
  - častá aplikace např. pro tabulky úmrtnosti, růst nádorů, počet mobilních telefónů v populaci, a pod.;

Odhady parametrů v nelineárních modelech růstu

Základný problém spočíva v tom, že funkce, kterou chceme proložit daty, není lineární funkcí hledaných (neznámych) parametrů – koeficientů. Nelze proto přímo aplikovat metodu nejmenších čtverců a stejně tak nelze získat explicitní řešení.

Co lze využít?

- preparametrizování modelu do lineárního tvaru;
- aproximace modelu a aplikace iteratívních postupů;
- numerické (aproximatívní) řešení pomoci počítačů;

Odhady parametrů v nelineárních modelech růstu

Základný problém spočíva v tom, že funkce, kterou chceme proložit daty, není lineární funkcí hledaných (neznámych) parametrů – koeficientů. Nelze proto přímo aplikovat metodu nejmenších čtverců a stejně tak nelze získat explicitní řešení.

Co lze využít?

- preparametrizování modelu do lineárního tvaru;
- aproximace modelu a aplikace iteratívních postupů;
- numerické (aproximatívní) řešení pomoci počítačů;

Aplikace na data

$\boldsymbol{t}$	t_1	t_2	t_3	$\dots$	t_n
$\boldsymbol{y}$	$y(t_1)$	$y(t_2)$	$y(t_3)$	$\dots$	$y(t_n)$

Odhad parametrů pro exponenciální růst

- základní diferenciální rovnice a příslušné řešení:

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \quad \text{a} \quad y(t) = be^{at},$$

pro nějaké neznáme parametry $a, b > 0$;

- rovnici lze logaritmovat a vyjádřit ve tvaru

$$\log(y(t)) = \log(b) + at;$$

- následně lze metodu nejmenšich čtverců aplikovat na data

$$(t_1, \log(y(t_1)))^\top, \ldots, (t_n, \log(y(t_n)))^\top,$$

a odhadnout neznáme parametry $a, \tilde{b} \in \mathbb{R}$, pro $\tilde{b} = \log(b)$

Samostatný úkol

Uvažujte jednoduchý exponenciální růst a nájděte řešení pro odhad parametrů $\log(b) \in \mathbb{R}$ a $a > 0$. Vyjádřete příslušnú matici $\mathbb{F}$ a spočtěte také projekční matici $\mathbb{H}$. Nájděte vhodné odhady pro $a, b > 0$.

Odhad parametrů pro logistický růst

- základní diferenciální rovnice a příslušné řešení:

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{k}\right) \quad \text{a} \quad y(t) = \frac{k}{1 + be^{-at}};$$

  pro nějaké neznáme parametry $a, b > 0$;

- diferenciální rovnici lze aproximovat pomoci diferenční rovnice

$$\frac{\Delta y_{t_i}}{\Delta t_i} = a y_{t_i} \left(1 - \frac{y_{t_i}}{k}\right)$$

- následně lze metodu nejmenšich čtverců aplikovat na data

$$(y_{t_2}, \frac{\Delta y_{t_2}}{\Delta t_2 y_{t_2}})^\top, \ldots, (y_{t_n}, \frac{\Delta y_{t_n}}{\Delta t_n y_{t_n}})^\top; \tag{3}$$

  pro parametre a a a/k. Parametr $b > 0$ pak vyjádřit z rovnice pro řešení.

Samostatný úkol

Uvažujte jednoduchý logistický růst a nájděte řešení pro odhad parametrů $a, k > 0$. Nájděte také vhodný odhad pro parametr $b > 0$.

Vylepšení odhadů pro logistický růst

Odhady parametrů $a, b, k > 0$ získané v předchozím kroku jsou hodně hrubé jelikož jsme diferenciální rovnici diskretizovali – t.j. aproximovali pomoci diferenční rovnice. Získané odhady ale lze vylepšit – opět pomoci metody nejmenších čtverců.

- řešení diferenciální rovnice lze také parametrizovat jako

$$y(t) = \frac{k}{1 + be^{-at}} = \frac{d}{c + e^{-(\hat{a}_1 + \epsilon)t}},$$

  pro $a = \hat{a}_1 + \epsilon$, $b = \frac{1}{c}$ a $k = \frac{d}{c}$ (kde $\hat{a}_1$ je odhad z předchozího kroku).
- pro hodnoty ϵt hodně malé, lze použít Taylorov rozvoj

$$e^{-\epsilon t} \approx 1 - \epsilon t;$$

- následně dostaneme aproximaci pro y_{t_i} ve tvaru

$$y_{t_i} \approx \frac{d}{c + e^{-\hat{a}_1 t_i}(1 - \epsilon t_i)}, \quad i = 1, \ldots, n;$$

- metodu nejmenších čtverců následně aplikovat na model

$$y_{t_i} e^{-\hat{a}_1 t_i} \approx d - c y_{t_i} + \epsilon t_i y_{t_i} e^{-\hat{a}_1 t_i}, \quad i = 1, \ldots, n;$$

Vylepšení odhadů pro logistický růst

Samostatný úkol

Uvažujte logistický model růstu a navrhněte, jak by měla vypadat matice $\mathbb{F}$ pro vylepšení odhadu parametrů $a, b, k > 0$ pomoci nové parametrizace

$$y(t) = \frac{k}{1 + be^{-at}} = \frac{d}{c + e^{-(\hat{a}_1 + \epsilon)t}},$$

pro $a = \hat{a}_1 + \epsilon$, $b = \frac{1}{c}$ a $k = \frac{d}{c}$, kde $\hat{a}_1$ je odhad získaný metodou nejmenších čtevrů, aplikovaných na data v (3). Nájděte soustavu lineárních rovníc pro odhad neznámych parametrů d, c a ϵ.

- dosazením odhadov $\hat{d}, \hat{c}$ a $\hat{\epsilon}$ do vyjadření původních parametrů a, b a k dostaneme vylepšené odhady $\hat{a}, \hat{b}$ a $\hat{k}$;
- tenhle postup lze iteratívne opakovat a získat ještě přesnější odhady;

Odhad parametrů pre Gomertzov model

- základní diferenciální rovnice a příslušné řešení:

$$\frac{dy}{dt} == a \cdot y \cdot \log(y/k) \quad \text{a} \quad y(t) = k \cdot \exp\{be^{-at}\};$$

  pro nějaké neznáme parametry $a, b, k > 0$;

- nelze efektivně využít ani logaritmování, ani aproximaci pomoci diferencí;
- riešenie lze získat riešením problému **nelinerných najmenších štvorcov** a to pomocou počítačov a numerických—iteratívných postupov;
- v praxi sa využívajú numerické postupy založené na rozličných modeloch a rôznych teoretických predpokladoch...

Odhad parametrů pre Gomertzov model

- základní diferenciální rovnice a příslušné řešení:

$$\frac{dy}{dt} == a \cdot y \cdot \log(y/k) \quad \text{a} \quad y(t) = k \cdot \exp\{be^{-at}\};$$

  pro nějaké neznáme parametry $a, b, k > 0$;

- nelze efektivně využít ani logaritmování, ani aproximaci pomoci diferencí;
- riešenie lze získat riešením problému **nelinerných najmenších štvorcov** a to pomocou počítačov a numerických—iteratívných postupov;
- v praxi sa využívajú numerické postupy založené na rozličných modeloch a rôznych teoretických predpokladoch...
  - nelineárne najmenšie štvorce
  - metóda maximálnej vierohodnosti
  - Kalmanov filter
  - rôzne kombinácie predchádzajúcich metód

Numerické porovnanie rôznych postupov napr. v článku Patmanidis et al.(2017): Comparing Methods for Parameter Estimation of theGompertz Tumor Growth Model. *20th IFAC World Congress, Jul 2017, Toulouse, France. pp.12203 - 12209*. DOI:10.1016/j.ifacol.2017.08.2289

Newton-Raphson: Algoritmus

IDEA: Odhad neznámych parametrů pomoci minimalizace součtu čtverců—hledáme ale argument minima nelineární funkce (ne nutně konvexní). Napr. pro logistickou křivku řešíme

$$S(a, b, k) = \underset{a,b,k>0}{Argmin} \quad \sum_{i=1}^{n} \left(y_{t_i} - \frac{k}{1 + be^{-at_i}} \right)^2,$$

kde předpokládame, že máme pozorování $y_{t_1}, \ldots, y_{t_n}$ v časech $t_1, \ldots, t_n$;

- předpokládame, že existují nějaké počáteční hodnoty $a_0, b_0, k_0 > 0$, které jsou dostatečne blízko skutečným (neznámym) hodnotám, pro které je dosaženo minimum;
- Newton-Raphsonová metoda pak spočíva v aproximaci $S(a, b, k)$ pomoci Taylorovej řady v okolí bodu $(a_0, b_0, k_0)^\top$;
- opakovaným postupom – iteracemi – získame finálné řešení; *(finálné řešení je pouze aproximace skutečného řešení... dokonalost aproximace závisí od volby počátečných hodnot $a_0, b_0, k_0 > 0$ a také od celkového počtů uskutečněných iteraci)*

Newton-Raphson: Teoretické odvození

- Taylorov rozvoj pro $S(a, b, k)$ v bodě (a_0, b_0, k_0):

$$\begin{aligned} S(a, b, k) = {} & S(a_0, b_0, k_0) + \nabla S(a_0, b_0, k_0)^\top (a - a_0, b - b_0, k - k_0)^\top \\ & + \frac{1}{2}(a - a_0, b - b_0, k - k_0)\nabla^2 S(a_0, b_0, k_0)(a - a_0, b - b_0, k - k_0)^\top \\ & + R(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{k}); \end{aligned}$$

- Hledáme bod, pro který $\nabla S(a, b, k) = 0 \Rightarrow$ obe strany derivujeme a položíme rovné hodnote $(0, 0, 0)^\top$;
- Po úprave dostaneme rovnicu

$$\nabla S(a_0, b_0, k_0) = (-1) \cdot \nabla^2 S(a_0, b_0, k_0)(a - a_0, b - b_0, k - k_0)^\top$$

a řešíme jako soustavu rovníc pro neznáme parametry $a, b, k \in \mathbb{R}$;
- Pro iterovaný postup definujeme obecně krok $\ell \in \mathbb{N}$ následovně:

$$\nabla S(a_{\ell-1}, b_{\ell-1}, k_{\ell-1}) = -\nabla^2 S(a_{\ell-1}, b_{\ell-1}, k_{\ell-1})(a_\ell - a_{\ell-1}, b_\ell - b_{\ell-1}, k_\ell - k_{\ell-1})^\top;$$

- postup opakujeme, až kým nedosáhneme požadovanou přesnost, t.j. $|a_\ell - a_{\ell-1}| < \epsilon$, $|b_\ell - b_{\ell-1}| < \epsilon$ a $|k_\ell - k_{\ell-1}| < \epsilon$, pro nějaké malé $\epsilon > 0$;

Obecné modely růstu populace

- Dynamika populace lineárne závisla na velikosti populace:

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y \cdot g\left(\frac{y}{k}\right)$$

- Dynamika populace v obecnom modelu:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t)$$

Funkcia $f(y, t)$ môže obecně predstavovať ľubovolnú známu/neznámu, parametrickú/neparametrickú, lineárnu/nelineárnu funkciu, ktorá vyjadruje rýchlosť rastu populácie v čase t, v závislosti na aktuálnej veľkosti populácie y.

Príklad: Covid-19 pandémia v USA

- **Data:** analýza na základe denných prírastkov novo-nakazených v Spojených štátoch (US) v čase od 22.Januára 2020 do 6.Apríla 2020;
- Logistický (viac-parametrický) model rastu populácie infikovaných:

$$y(t) = y_{min} + \frac{y_{max} - y_{min}}{(1 + e^{-R(t - t_{mid})})^{\alpha}}$$

  - $y(t)$ celkové počty nakazených obyvateľov v jednotlivých dňoch;
  - y_{min}, y_{max} minimálny a maximálny počet nakazených v US počas pandémie;
  - R miera denného exponenciálneho nárastu (číslo R);
  - t_{mid} odhadnutý vrchol pandémie (stabilné denné prírastky);
  - α parameter asymetrie vzhľadom k vrcholu pandémie t_{mid};
- Denný nárast nových prípadov—prvá derivácia $y'(t)$;
  (vyjadrením prvej derivácie dostaneme rovnicu pre dynamiku)

Chen et al. (2020). Reconstructing and forecasting the COVID-19 epidemic in the United States using a 5-parameter logistic growth model, *Global Health Research and Policy*, 5:25. DOI: 10.1186/s41256-020-00152-5

Covid-19 pandémia – celková predikcia

Data Usage	Days	Date	Reported Cases		Predicted		Under-reported
			Total	Daily	Daily	Total	
Reconstruction	54	3/15/2020	3487	1253	3108	19,781	16,294
	55	3/16/2020	4226	739	3623	23,141	18,915
	56	3/17/2020	7038	2812	4218	27,054	20,016
	57	3/18/2020	10,442	3404	4902	31,606	21,164
	58	3/19/2020	15,219	4777	5687	36,892	21,673
	59	3/20/2020	18,747	3528	6584	43,019	24,272
Fitting	**60**	**3/21/2020**	**24,583**	**5836**	**7603**	**50,102**	**25,519**
	61	**3/22/2020**	**33,404**	**8821**	**8755**	**58,269**	**24,865**
	62	**3/23/2020**	**44,183**	**10,779**	**10,047**	**67,658**	**23,475**
	63	**3/24/2020**	**54,453**	**10,270**	**11,485**	**78,411**	**23,958**
	64	**3/25/2020**	**68,440**	**13,987**	**13,070**	**90,676**	**22,236**
	65	**3/26/2020**	**85,356**	**16,916**	**14,797**	**104,598**	**19,242**
	66	**3/27/2020**	**103,321**	**17,965**	**16,656**	**120,315**	**16,994**
	67	**3/28/2020**	**122,653**	**19,332**	**18,624**	**137,947**	**15,294**
	68	**3/29/2020**	**140,904**	**18,251**	**20,670**	**157,589**	**16,685**
	69	**3/30/2020**	**163,539**	**22,635**	**22,750**	**179,298**	**15,759**
	70	**3/31/2020**	**186,101**	**22,562**	**24,810**	**203,082**	**16,981**
	71	**4/1/2020**	**213,144**	**27,043**	**26,784**	**228,889**	**15,745**
	72	**4/2/2020**	**239,279**	**26,135**	**28,600**	**256,597**	**17,318**
	73	**4/3/2020**	**277,205**	**37,926**	**30,180**	**286,010**	**8805**
	74	**4/4/2020**	**304,826**	**27,621**	**31,453**	**316,855**	**12,029**
Forecast	75	4/5/2020	330,891	26,065	32,352	348,791	17,900
	76	4/6/2020	374,329	43,438	32,830	381,419	7090
	77	4/7/2020	395,011	20,682	32,860	414,302	19,291
	78	4/8/2020	427,460	32,449	32,436	446,987	19,527
	79	4/9/2020	459,165	31,705	31,582	479,030	19,865
	80	4/10/2020	492,416	33,251	30,340	510,021	17,605

Covid-19 pandémia – celková predikcia

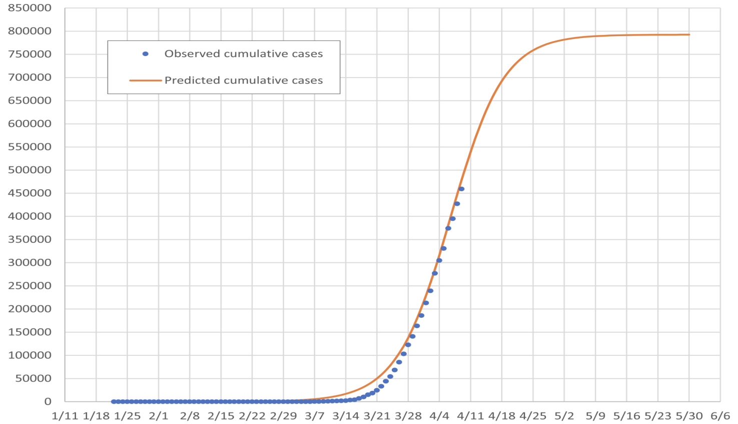


Fig. 2 Observed vs. model-estimated and forecasted daily cumulative COVID-19 cases, January 22–May 30, U.S.A

- Celkový predikovaný počet Covid-19 prípadov v US v priebehu celej pandémie: 792 548;

Covid-19 pandémia – celková predikcia

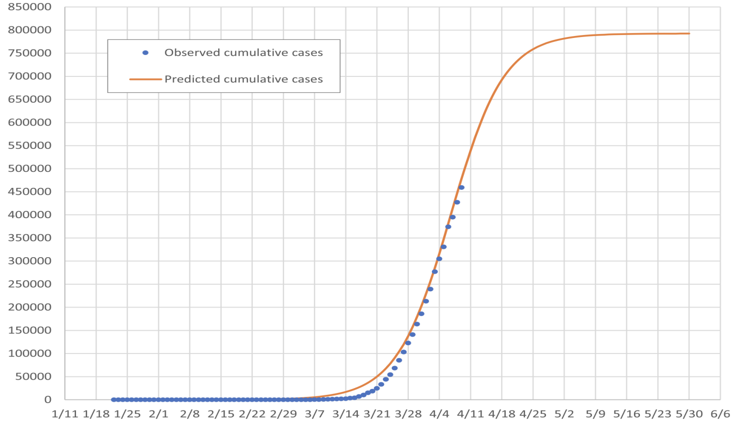


Fig. 2 Observed vs. model-estimated and forecasted daily cumulative COVID-19 cases, January 22–May 30, U.S.A

- Celkový predikovaný počet Covid-19 prípadov v US v priebehu celej pandémie: 792 548;
- Aktuálny celkový počet Covid-19 prípadov v US: 79 mil. a takmer jeden milión úmrtí;

To conclude...

- Diferencialní modely a modely růstu jako vhodné a užitečné nástroje pro modelování růstu populací v závislosti na jejích velikosti.
- Jedná sa o nelineárné parametrické modely, přičemž na odhad neznámych parametrů nelze přímo aplikovat metodu nejmenších čtverců.
  - **Model exponenciálního růstu** – jednoduchý model ale aplikovatelný pouze v krátkodobem časovem horizontu (předpoklad neomezeného (lineárního) růstů při neomezených zdrojích);
  - **Model logistického růstu** – modifikace předchozího modelu pomoci dodatečného parametru – tzv. saturačnej hladiny pro maximální úroveň modelované populace;
  - **Model Gompertzovej křivky** – rozšíření modelu logistického růstu pro případy s nesymetickým počátečným nárůstem a konečnou saturaci – model asymetrický kolem inflexního bodu;
- Odhady neznámych parametrů v těchto modelech pomoci iteratívnych postupov, aproximaci, nebo přeparametrizování původních rovníc, tak aby bylo možné aplikovat metodu nejmenších čtverců;
- Nutné používať premyslene a veľmi opatrne hlavne vzhľadom k predikciám.

Kapitola 3

Systémy Lineární Regulace

Čo to je?

- matematický model pre dynamiku rôznych systémov/procesov;
  (sústavy rovníc, diferenciálne alebo diferenčné rovnice)
- matematická teória systémov s dôrazom na ich kontrolu (reguláciu);
  (predikcia reakcie systému na základe jeho stavu a daných vstupov)
- interný/externý popis (charakterizácia) dynamických procesov;
  (teoretické aj empirické vlastnosti systému, stabilita procesu)
- konečne rozmerné, lineárne, diskrétne a časovo invariantné systémy;
  (lineárizácia nelineárnych systémov, approximácia)

Čo to je?

- matematický model pre dynamiku rôznych systémov/procesov;
  (sústavy rovníc, diferenciálne alebo diferenčné rovnice)
- matematická teória systémov s dôrazom na ich kontrolu (reguláciu);
  (predikcia reakcie systému na základe jeho stavu a daných vstupov)
- interný/externý popis (charakterizácia) dynamických procesov;
  (teoretické aj empirické vlastnosti systému, stabilita procesu)
- konečne rozmerné, lineárne, diskrétne a časovo invariantné systémy;
  (lineárizácia nelineárnych systémov, approximácia)

Matematický model pre fyzikálne zákonitosti, chemické reakcie, biológiu a chovanie jedincov (sociológia), ekonomické procesy a finančné trhy... vývoj určitej charakteristiky v čase (dynamika) na základě znalosti určujúcich premenných...

Antsaklis P. and Michel A. (2007). A Linear System Primer. Birkhäuser Boston.
ISBN-13: 978-0-8176-4460-4

Model lineární regulace

- budeme uvažovať deterministické data (posloupnost) $\{y_t, u_t\}_{t=0}^{\infty}$;
- definujeme **model lineární regulace**, ktorý vstupné data – t.j. posloupnost $u_0, u_1, u_2, \ldots,$ převádí na výstupne data – posloupnost $y_0, y_1, y_2, \ldots,$ a to pomoci specifické lineární transformace – tzv. **lineární regulace**;
- matematicky lze model lineární regulace zapísať formálne jako

$$y_t = \sum_{j=0}^{t} h_j u_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} h_j u_{t-j},$$

pre čas $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, alebo $t \in \mathbb{Z}$ ak $y_{-j} = u_{-j} = 0$ pre $j \in \mathbb{N}$;
(t.j. hodnoty pre záporné indexy sú dodefinované nulou)

- neznáme parametre h_j pro $j = 0, 1, \ldots,$ určují konkrétní tvar výsledného modelu lineární regulace (kontrola/regulace systému);
- vliv posloupnosti $u_0, u_1, u_2, \ldots$ na $y_0, y_1, y_2, \ldots$ nemusí byt přímy, ale napr. prostřednictvím dalších stavov systému – tzv. lineární soustavy;

Příklad 1: Model jednotkového impulzu

Definice: Model jednotkového impulzu (unit pulse)

Vstupní posloupnost ve tvaru $u_0 = 1, u_1 = 0, u_2 = 0, \ldots,$ nazývame **jednotkový impulz**. Odezvou systému lineárni regulace na jednotkový impulz (vstup) je pak posloupnost $h_0, h_1, h_2, \ldots$ (výstup), která se nazýva **impulzní charakteristika** soustavy lineární regulace.

Samostatný úkol

Z definice modelu lineární regulace lze okamžite ověřit, že plati:

- pro $t = 0$: $y_0 = h_0 u_0 = h_0$;
- pro $t = 1$: $y_1 = h_0 u_1 + h_1 u_0 = h_1$;
- pro $t = 2$: $y_2 = h_0 u_2 + h_1 u_1 + h_2 u_0 = h_2$;
- pro $t \in \mathbb{N}$: $y_t = h_0 u_t + \cdots + h_t u_0 = h_t$;

Příklad 2: Model jednotkového skoku

Definice: Model jednotkového skoku (unit step)

Vstupní posloupnost ve tvaru $u_t = 1$ pro $t = 0, 1, 2, \ldots$ nazýváme **jednotkový skok** (t.j. v čase $t = 0$ se hodnoty u_t změní z 0 na 1). Odezvou systému lineárni regulace na jednotkový skok je pak posloupnost, která se nazýva **přechodová charakteristika** soustavy lineární regulace. Navíc platí, že

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j u_{t-j} = \sum_{j=0}^{t} h_j u_{t-j} = \sum_{j=0}^{t} h_j.$$

K analýze linárních soustav se obecně hodí používat tzv. vytvořující funkce pro číselné posloupnosti a speciálně tzv. z-transformace.

Z-transformace

Z-transformace se obecně používa pro vyjádření signálu s diskrétním časem (t.j. posloupnosti reálních, nebo komplexních čísel) pomoci reprezentácie vrámci komplexnej frekvenčnej domény. Jedná se o diskrétni verzi Laplacovej transformáce.

Definice: Z-transformace (jednostranná)

Pro libovolnou posloupnost reálných čísel $\{a_k;\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ definujeme její z-transformaci jako funkci

$$A(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{-j}, \quad \text{obecně pro libovolné } z \in \mathbb{C}.$$

- V teórii se také používa tzv. bilaterální (oboustranná) z-transformace; Pro oboustrannú z-transformaci platí $A(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^{-j}$, pro $z \in \mathbb{C}$;

Definice značení pro z-transformaci

Samostatný úkol *(opakování)*

- Nekonečná řada $A(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{-j}$ konverguje pro $|z| > z_0$ a diverguje pro $|z| < z_0$, pro nějaké $z_0 \in [0, \infty]$;
- Množina $\{z \in \mathbb{C};\ |A(z)| < \infty\}$ se často v literatúře značí jako ROC oblast (tzn. "Region Of Convergence");
- na kružnici $|z| = z_0$ se řada může chovat libovolně (konvergovat pro některé body a divergovat pro jiné);

- pro posloupnost vstupů $\{u_t;\ t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ budeme značit příslušnú z-transformaci jako funkci $U(z)$ (t.j. $U(z) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j z^{-j}$);
- pro posloupnost výstupů $\{y_t;\ t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ budeme značit příslušnú z-transformaci jako funkci $Y(z)$ (t.j. $Y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} y_j z^{-j}$);
- pro impulzní charakteristiku $\{h_t;\ t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ budeme značit příslušnú z-transformaci jako funkci $H(z)$ (t.j. $H(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^{-j}$);

Impulzní přenosová funkce soustavy

Definice: Impulzní přenosová funkce (transfer function)

Funkce

$$H(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^{-j}, \quad \text{pro } z \in \mathbb{C}$$

se nazýva **(impulzní) přenosová funkce (lineární) soustavy**.

Samostatný úkol

Ukážte, že pro impulzní přenosovou funkci soustavy platí, že

$$Y(z) = H(z) \cdot U(z),$$

pro taková $z \in \mathbb{C}$, že $H(z)$ a $U(z)$ konvergují.

Impulzní přenosová funkce soustavy

Definice: Impulzní přenosová funkce (transfer function)

Funkce

$$H(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^{-j}, \quad \text{pro } z \in \mathbb{C}$$

se nazýva **(impulzní) přenosová funkce (lineární) soustavy**.

Samostatný úkol

Ukážte, že pro impulzní přenosovou funkci soustavy platí, že

$$Y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} y_j z^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} h_\ell u_{j-\ell} \right) z^{-j} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h_\ell z^{-\ell} \left(\sum_{j=0}^{\infty} u_{j-\ell} z^{-(j-\ell)} \right)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} h_\ell z^{-\ell} \cdot \sum_{j=-\ell}^{\infty} u_j z^{-j} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h_\ell z^{-\ell} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} u_j z^{-j} = H(z) \cdot U(z),$$

pro taková $z \in \mathbb{C}$, že $H(z)$ a $U(z)$ konvergují.

Příklad: Bakaláři na australské univerzitě

Príklad

Chceme modelovať závislost počtu bakalářských promoci na počtu studentů zapsaných v předchozích letech do prvního ročníka.

- počet studentů zapsaných do studia v roce t je u_t (vstup);
  (do prvního ročníku teda nastoupí v roce $t+1$)
- počet studentů, který v roce t ukončí stúdium je y_t (výstup);

Příklad: Bakaláři na australské univerzitě

Príklad

Chceme modelovať závislost počtu bakalářských promoci na počtu studentů zapsaných v předchozích letech do prvního ročníka.

- počet studentů zapsaných do studia v roce t je u_t (vstup); (do prvního ročníku teda nastoupí v roce $t+1$)
- počet studentů, který v roce t ukončí stúdium je y_t (výstup);
- celkový system stúdia je ale omnoho komplikovanejší a mezi počtom zapísaných študentov (hodnotou u_t) a počtom promovaných študentov (hodnota y_t) existuje niekoľko ďalších "medzistavov systému" (t.j. jednotlivé ročníky štúdia);
- po prvom ročníku student buď pokračuje ve stúdiu v druhom ročníku, prípadne prvý ročník opakuje (analogicky aj u nasledujúcich ročníkov);
- jak tieto stavy zahrnúť do celkového systému?

Aplikace: Bakaláři na univerzitě v Austrálii

Príklad

- bakalářský titul lze na austrálskej univerzitě získat ve třetím roce studia (tzv. Pass Degree), nebo pokračovat ve čtvrtem roce a získat výšší, tzv. Honours Degree;
- nechť počet studentů v i-tém ročníku v roce t je $x_t^{(i)}$ pro $i = 1, \ldots, 4$;
- nechť podíl studentů, kteří přejdou z i-tého do j-tého ročníka v následujícím školním roce je p_{ij} a podíl studentů, kteří skončí v i-tém ročníku: q_i (odsledované/odhadnuté z historických dat);
- zřejme platí, že $p_{ii} + p_{i(i+1)} + q_i = 1$ pro všechny $i = 1, 2, 3, 4$; (niektoré pravdepodobnosti vhodne dodefinujeme nulou)

Příklad: Bakaláři na australských univerzitách

Príklad

- vzhľadom k systému bakalářského stúdia v Austrálii lze psát, že

$$y_t = c_3 x_t^{(3)} + c_4 x_t^{(4)},$$

  pro $c_3, c_4 \in (0, 1)$ proporce studentu, kteří v třetím a čtvrtém roce promují (odsledované z historických dat).

- zřejme také platí následující:

$$x_{t+1}^{(1)} = u_t + p_{11} x_t^{(1)}; \tag{4}$$

$$x_{t+1}^{(i+1)} = p_{i(i+1)} x_t^{(i)} + p_{(i+1)(i+1)} x_t^{(i+1)}, \quad \text{pro } i = 1, 2, 3; \tag{5}$$

- proporce odhadnuté pomoci historických statistik na univerzitách:
  $p_{12} = 0.61$; $p_{23} = 0.71$; $p_{34} = 0.16$; $c_3 = 0.81$; $c_4 = 0.91$;
  $p_{11} = 0.15$; $p_{22} = 0.11$; $p_{33} = 0.10$; $p_{44} = 0.05$;

Jak teda závisí $\{y_t\}$ na posloupnosti $\{u_t\}$?

Príklad

- Obecně můžeme pro $x_t^{(i)}$ psát, že

$$x_t^{(i)} = \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(i)} u_{t-j}, \qquad (6)$$

kde $f_j^{(i)}$ je podíl těch, co se zapsali před j lety a teď jsou v i-tém ročníku a platí, že $f_0^{(i)} = 0$ pro všechny $i = 1, 2, 3, 4$;

- Přímym dosazením do (4) dostaneme

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(1)} u_{t+1-j} = u_t + p_{11} \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(1)} u_{t-j};$$

- Porovnáním koeficientu dostaneme:
$f_1^{(1)} = 1,\ f_2^{(1)} = p_{11} f_1^{(1)} = p_{11},\ f_3^{(1)} = p_{11} f_2^{(1)} = p_{11}^2,\ \ldots,\ f_n^{(1)} = p_{11}^{n-1};$

Příklad: Bakaláři na australských univerzitách

Príklad

- celkový počet studentů v prvním ročníku v roce t lze vyjádřit jako součet nově zapsaných a recyklovaných studentů:

$$x_t^{(1)} = u_{t-1} + \sum_{j=2}^{\infty} (p_{11})^{j-1} u_{t-j};$$

- Následně dosadíme (6) do výrazu (5):

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(i+1)} u_{t+1-j} = p_{i(i+1)} \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(i)} u_{t-j} + p_{(i+1)(i+1)} \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(i+1)} u_{t-j};$$

- Zjednodušení: obecně předpokládame, že $f_j^{(i)} = 0$, pro $j < i$;

Příklad: Bakaláři na australských univerzitách

Príklad

- Postupně dostaneme:

$$f_2^{(2)} = p_{12} f_1^{(1)} + p_{22} f_1^{(2)} = p_{12}$$
$$f_3^{(3)} = p_{23} f_2^{(2)} + p_{33} f_2^{(3)} = p_{23} f_2^{(2)} = p_{12} p_{23}$$

a obecně:

$$f_{j+1}^{(i+1)} = p_{i(i+1)} f_j^{(i)} + p_{(i+1)(i+1)} f_j^{(i+1)}$$

- Celkově pro y_t teda máme:

$$y_t = c_3 x_t^{(3)} + c_4 x_t^{(4)} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(c_3 f_j^{(3)} + c_4 f_j^{(4)} \right) u_{t-j}$$
$$= 0.3508 u_{t-3} + 0.1901 u_{t-4} + 0.0567 u_{t-5} + 0.0131 u_{t-6} + \dots$$

Maticový zápis | Stavový model

- Příklad o bakalářích na australských univerzitách lze také zapsát i pomoci alternatívného maticového zápisu (více kompaktně);
- Nechť $\boldsymbol{x}_t = (x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(4)})^\top$ jsou stavy systému. Pak celý problém lze zapsat jako

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & p_{23} & p_{33} & 0 \\ 0 & 0 & p_{34} & p_{44} \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}} \boldsymbol{x}_t + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}} u_t;$$

$$y_t = \underbrace{(0, 0, c_3, c_4)}_{\boldsymbol{c}} \cdot \boldsymbol{x}_t + \underbrace{0}_{d} \cdot u_t.$$

- Uveděný zápis definuje **lineární stavovou soustavu** v obecnem tvaru; (vstupní posloupnost u_t, stavy systému $\boldsymbol{x}_t$, výstupná posloupnost y_t)

Stavový model – obecně

- uvažujeme systém, jehož stav lze popsat vektorem $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^r$;
- vývoj systému pak definujeme pomoci posloupnosti $\{\boldsymbol{x}_t;\ t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$;
- předpokládame, že stav systému v čase $t = 0$ je $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^r$;
- následující stavy systému v čase $t + 1$ jsou popsány pomoci modelu

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathbb{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}u_t,$$

pre vstupnú hodnotu u_t, nějakou čtvercovou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ a vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^r$;

- nepozorujeme ale přímo stavy systému, ale pouze výstup y_t ve tvaru

$$y_t = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}_t + du_t,$$

opět pro vstup u_t, nějaký vektor $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^r$ a skalár $d \in \mathbb{R}$;

Stavový model – obecně

- uvažujeme systém, jehož stav lze popsat vektorem $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^r$;
- vývoj systému pak definujeme pomoci posloupnosti $\{\boldsymbol{x}_t;\ t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$;
- předpokládame, že stav systému v čase $t = 0$ je $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^r$;
- následující stavy systému v čase $t+1$ jsou popsány pomoci modelu

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathbb{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}u_t,$$

  pre vstupnú hodnotu u_t, nějakou čtvercovou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ a vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^r$;
- nepozorujeme ale přímo stavy systému, ale pouze výstup y_t ve tvaru

$$y_t = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}_t + du_t,$$

  opět pro vstup u_t, nějaký vektor $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^r$ a skalár $d \in \mathbb{R}$;
  (lze samozřejme zobecnit i pro vícerozměrný výstup systému $\boldsymbol{y}_t \in \mathbb{R}^q$)

Stavový model – obecně

- uvažujeme systém, jehož stav lze popsat vektorem $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^r$;
- vývoj systému pak definujeme pomoci posloupnosti $\{\boldsymbol{x}_t;\ t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$;
- předpokládame, že stav systému v čase $t = 0$ je $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^r$;
- následující stavy systému v čase $t + 1$ jsou popsány pomoci modelu

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathbb{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}u_t,$$

  pre vstupnú hodnotu u_t, nějakou čtvercovou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ a vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^r$;
- nepozorujeme ale přímo stavy systému, ale pouze výstup y_t ve tvaru

$$y_t = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}_t + du_t,$$

  opět pro vstup u_t, nějaký vektor $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^r$ a skalár $d \in \mathbb{R}$;
  (lze samozřejme zobecnit i pro vícerozměrný výstup systému $\boldsymbol{y}_t \in \mathbb{R}^q$)
- Jak získat z tohto modelu přímou závislost výstupní posloupnosti y_t na vstupních datech u_t ve tvaru $y_t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j u_{t-j}$?

Obecný model systému lineární regulace

- namísto původního systemu rovníc stačí uvažovat obecný zápis ve tvaru

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathbb{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}u_t$$
$$y_t = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}_t + du_t$$

- pro posloupnost vstupov $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$ a výstupov $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$;
- pro (skryté/nepozorované) stavy systému – t.j. posloupnost $\{\boldsymbol{x}_t\}_{t=0}^{\infty}$;
- pro obecnou matici $\mathbb{A}$ typu $r \times r$ která modeluje vztahy (zavislosti) medzi jednotlivými stavmi systému;
- vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^r$ (ktorý modeluje závislost stavov systému na vstupnej posloupnosti) a vektor $\boldsymbol{c}$ (ktorý modeluje závislost výstupu na jednotlivých stavoch systemu);
- konstana $d \in \mathbb{R}$, ktorá modeluje priamu závislosť výstupu na vstupných hodnotách;

Stavový model a stavové rovnice

- namísto původního systemu rovníc máme obecný tvar

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{t+1} &= \mathbb{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}u_t \\ y_t &= \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}_t + du_t \end{aligned}$$

- budeme uvažovat systém rovníc ve tvaru

$$\sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_{t+1} z^{-t} = \mathbb{A} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_t z^{-t}}_{\boldsymbol{X}(z)} + \boldsymbol{b} \underbrace{\sum_{t=0^{\infty}} u_t z^{-t}}_{U(z)}$$

$$\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} y_t z^{-t}}_{Y(z)} = \boldsymbol{c}^\top \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_t z^{-t}}_{\boldsymbol{X}(z)} + d \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)}$$

$\hookrightarrow$ kde jsme původní rovnice postupně vynásobili faktorem z^{-t} a pak sečetli přez všechny možné hodnoty pro $t = 0, 1, 2, \dots;$

Stavový model a stavové rovnice

- namísto původního systemu rovníc máme obecný tvar

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{t+1} &= \mathbb{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}u_t \\ y_t &= \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}_t + du_t \end{aligned}$$

- budeme uvažovat systém rovníc ve tvaru

$$z\sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_{t+1} z^{-t-1} = \mathbb{A}\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_t z^{-t}}_{\boldsymbol{X}(z)} + \boldsymbol{b}\underbrace{\sum_{t=0^{\infty}} u_t z^{-t}}_{U(z)}$$

$$\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} y_t z^{-t}}_{Y(z)} = \boldsymbol{c}^\top \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_t z^{-t}}_{\boldsymbol{X}(z)} + d\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)}$$

$\hookrightarrow$ kde jsme původní rovnice postupně vynásobili faktorem z^{-t} a pak sečetli přez všechny možné hodnoty pro $t = 0, 1, 2, \ldots;$

Stavový model a stavové rovnice

- namísto původního systemu rovníc máme obecný tvar

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{t+1} &= \mathbb{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}u_t \\ y_t &= \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}_t + du_t \end{aligned}$$

- budeme uvažovat systém rovníc ve tvaru

$$z \sum_{t=-1}^{\infty} \boldsymbol{x}_{t+1} z^{-t-1} = \mathbb{A} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_t z^{-t}}_{\boldsymbol{X}(z)} + \boldsymbol{b} \underbrace{\sum_{t=0\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)}$$

$$\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} y_t z^{-t}}_{Y(z)} = \boldsymbol{c}^\top \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_t z^{-t}}_{\boldsymbol{X}(z)} + d \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}}_{U(z)}$$

$\hookrightarrow$ kde jsme původní rovnice postupně vynásobili faktorem z^{-t} a pak sečetli přez všechny možné hodnoty pro $t = 0, 1, 2, \ldots;$

Stavový model a stavové rovnice

- namísto původního systemu rovníc

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathbb{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}u_t$$
$$y_t = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}_t + du_t$$

- budeme uvažovat systém rovníc ve tvaru

$$\underbrace{z \sum_{t=-1}^{\infty} \boldsymbol{x}_{t+1} z^{-t-1}}_{\boldsymbol{X}(z)} = \mathbb{A} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_t z^{-t}}_{\boldsymbol{X}(z)} + \boldsymbol{b} \underbrace{\sum_{t=0^{\infty}} u_t z^{-t}}_{U(z)}$$

$$\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} y_t z^{-t}}_{Y(z)} = \boldsymbol{c}^\top \sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{x}_t z^{-t} + d \sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}$$

$\hookrightarrow$ kde jsme původní rovnice postupně vynásobili faktorem z^{-t} a pak sečetli přez všechny hodnoty pro $t = 0, 1, 2, \ldots;$

Stavový model – řešení

- systém rovníc v maticovem zápisu:

$$
\begin{aligned}
z\boldsymbol{X}(z) &= \mathbb{A}\boldsymbol{X}(z) + \boldsymbol{b}U(z) \\
Y(z) &= \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{X}(z) + dU(z)
\end{aligned}
$$

- pokud existuje inverze $(z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}$, lze řešení pro $\boldsymbol{X}(z)$ získat jako:

$$
\begin{aligned}
z\boldsymbol{X}(z) - \mathbb{A}\boldsymbol{X}(z) &= \boldsymbol{b}U(z) \\
(z\mathbb{I} - \mathbb{A})\boldsymbol{X}(z) &= \boldsymbol{b}U(z) \\
\boldsymbol{X}(z) &= (z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{b}U(z)
\end{aligned}
$$

- následně pak pro $Y(z)$ získame řešení ve tvaru:

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{X}(z) + dU(z) \\
&= \left[\boldsymbol{c}^\top \cdot (z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\boldsymbol{b} + d\right] U(z)
\end{aligned}
$$

Přenosová funkce soustavy

Definice: Přenosová funkce soustavy (transfer function)

Funkce $H(z) = \left[\boldsymbol{c}^\top \cdot (z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\boldsymbol{b} + d\right]$ se nazýva **přenosová funkce soustavy** a platí, že

$$Y(z) = H(z)U(z),$$

pro každé $z \in \mathbb{C}$, pro které funkce $Y(z)$ a $U(z)$ konvergují.

Samostatný úkol

Ověrte, že pro libovolnou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, vektory $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^r$ a reálný číslo $d \in \mathbb{R}$, takové, že inverzní matice $(z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}$ existuje, je funkce $H(z)$ funkci z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, pro $z \in \mathbb{R}$ (tzn., ověrte příslušné rozměry v zápisu funkce H).

Přenosová funkce soustavy – vyjádření

Samostatný úkol

Přenosovou funkci soustavy lze také vyjádřit jako podíl dvou polynomů stupně nejvýše r. Platí, že

$$H(z) = \left[\boldsymbol{c}^\top \cdot (z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\boldsymbol{b} + d\right] = \frac{\boldsymbol{c}^\top Adj(z\mathbb{I} - \mathbb{A})\boldsymbol{b} + d \cdot det(z\mathbb{I} - \mathbb{A})}{det(z\mathbb{I} - \mathbb{A})}$$

$$= \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{n_0 z^r + \cdots + n_r}{d_0 z^r + \cdots + d_r} = \frac{n_0 + \cdots + n_r z^{-r}}{d_0 + \cdots + d_r z^{-r}},$$

kde $N(z)$ a $D(z)$ jsou příslušné polynómy $n_0 + \cdots + n_r z^{-r}$ a $d_0 + \cdots + d_r z^{-r}$ (resp. prvních r prvků příslušných z-transformací).

Příklad: Bakaláři na australských univerzitách

Príklad

- pro model s bakaláři na austrálských univerzitách máme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & p_{23} & p_{33} & 0 \\ 0 & 0 & p_{34} & p_{44} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = (1, 0, 0, 0)^\top,$$

$$\boldsymbol{c} = (0, 0, c_3, c_4)^\top, \qquad d = 0;$$

- pro matici $(z\mathbb{I} - \mathbb{A})$ dostaneme vyjádření ve tvaru

$$(z\mathbb{I} - \mathbb{A}) = \begin{pmatrix} z - p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ -p_{12} & z - p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{23} & z - p_{33} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{34} & z - p_{44} \end{pmatrix};$$

- a pro determinant matice $(z\mathbb{I} - \mathbb{A})$ dostaneme

$$det(z\mathbb{I} - \mathbb{A}) = (z - p_{11})(z - p_{22})(z - p_{33})(z - p_{44});$$

Příklad: Bakaláři na australských univerzitách

Príklad

- vzhledem k tvaru vektorů $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^r$ stačí pro adjungovanou matici spočíst prvky na pozici [3,1] a [4,1];
- pro přenosovou funkci soustavy pak přímo dostaneme

$$H(z) = \frac{c_3 p_{12} p_{23} (z - p_{44}) + c_4 p_{12} p_{23} p_{34}}{(z - p_{11})(z - p_{22})(z - p_{33})(z - p_{44})}$$

- pomoci přenosové funkce soustavy $H(z)$ dostaneme příme vyjádření počtu promujících bakalářů v závislosti na počte zapsaných studentů (vyjadrenie prostredníctvom spektrální domény) – bez explicitnej prítomnosti jednotlivých (skrytých) stavov systému;

Obecný model

- v praxi je výhodnější uvažovat obecnou situaci, kdy výstup v čase t závisí také na předchozích výstupech, t.j., uvažujeme rovnici

$$d_0 y_t + \cdots + d_r y_{t-r} = n_0 u_t + \cdots + n_r u_{t-r}, \tag{7}$$

  pro $d_0 \neq 0$;

- co lze také ekvivalentně přepsat jako

$$y_t = \underbrace{-\frac{d_1}{d_0} y_{t-1} - \ldots - \frac{d_r}{d_0} y_{t-r}}_{\text{autoregresní část soustavy}} + \underbrace{\frac{n_0}{d_0} u_t + \cdots + \frac{n_r}{d_0} u_{t-r}}_{\text{regresní část soustavy}},$$

  pro $d_0 \neq 0$;

- délky pro autoregresní a regresní část mohou být obecně různe $(k \neq l)$;
  $\hookrightarrow$ některé koeficienty $d_1, \ldots, d_k, n_0, \ldots, n_l$ mohou být nulové;

- **IDEA:** Opět chceme najít vyjádření ve tvaru $y_t = \sum_{k=0}^{\infty} h_k y_{t-k}$;

Obecný model

- analogickým postupem (vynásobime členem z^{-t} a sečteme přes všechny hodnoty t) dostaneme vyjádření (7) ve tvaru

$$\sum_{t=0}^{\infty}\left(d_0 z^{-0} y_t z^{-t} + \ldots + d_r z^{-r} y_{t-r} z^{-(t-r)}\right)$$
$$= \sum_{t=0}^{\infty}\left(n_0 z^{0} u_t z^{-t} + \cdots + n_r z^{-r} u_{t-r} z^{-(t-r)}\right)$$

- díky zavedenému značení $u_{-t} = y_{-t} = 0$ pro $t \in \mathbb{N}$ můžeme psát

$$\left(d_0 z^{-0} + \cdots + d_r z^{-r}\right)\sum_{t=0}^{\infty} y_t z^{-t} = \left(n_0 z^{-0} + \cdots + n_r z^{-r}\right)\sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t};$$

- co lze také přepsát do obecného tvaru lineárního modelu jako

$$d(z^{-1})Y(z) = n(z^{-1})U(z)$$

pro $d(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_r x^r$ a $n(x) = n_0 + n_1 x + \cdots + n_r x^r$;

Obecný model – některé vlastnosti

- obecně i zde platí, že $Y(z) = H(z)U(z)$, pro takové $z \in \mathbb{C}$, že $H(z)$ a $U(z)$ konvergují;
- dostazením tedy dostaneme, že

$$d(z^{-1})Y(z) = d(z^{-1})H(z)U(z) = n(z^{-1})U(z),$$

  pro takové $z \in \mathbb{C}$, že pravá strana konverguje;
- pro přenosovou funkci soustavy mame

$$H(z) = \frac{n(z^{-1})}{d(z^{-1})} = \frac{n_0 + \cdots + n_r z^{-r}}{d_0 + \cdots + d_r z^{-r}};$$

- rovnice (7) se někdy zapisuje ve tvaru

$$(d_0 + \cdots + d_r z^{-r})y_t = (n_0 + \cdots + n_r z^{-r})u_t$$

  nebo zjednodušene $d(z^{-1})y_t = n(z^{-1})u_t$, kde z se interpretuje jako operátor posunutí, t.j., $zx_t = x_{t+1}$ a z^{-1} jako operátor zpětného posunutí, t.j., $z^{-1}x_t = x_{t-1}$;

Obecný model – příklad

Príklad

Předpokládame jednoduchý model lineárního systému ve tvaru

$$y_{t+1} - ay_t = u_{t+1} \quad \text{resp.} \quad (1 - az^{-1})y_t = u_t.$$

- pro přenosovou funkci soustavy dostaneme

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a};$$

- lze jednoduše rozvinout jako

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k};$$

- pro impulzní charakteristiku soustavy teda máme $y_t = h_t = a^t$;
- pro přechodovou charakteristiku soustavy máme $y_t = \sum_{k=0}^{t} h_k$;

Stabilita lineární soustavy

- **Stabilita soustavy**
  Jedná se o základní vlastnost, která se u lineárních soustav zkoumá.

Definice: Stabilita lineární soustavy

Řekneme, že lineární soustava je stabilní, pokud platí, že

$$\lim_{t \to \infty} h_t = 0. \tag{8}$$

- Alternatívně lze říct, že odezva soustavy na jednotkový impuls se postupně vytráci, pokud je soustava stabilní;
- (8) je zároveň nutná podmínka k tomu, aby přechodová charakteristika soustavy, teda řada $\sum_{k=0}^{\infty} h_k$, byla konvergentní (ale ne postačující);

Stabilita lineární soustavy

Věta: Stabilita lineární soutavy

Soustava odpovídající obecnému modelu s přenosovou funkcí ve tvaru

$$H(z) = \frac{n(z^{-1})}{d(z^{-1})} = \frac{N(z)}{D(z)},$$

kde $N(z) = n_0 z^r + \cdots + n_r z^0$ a $D(z) = d_0 z^r + \cdots + d_r z^0$ jsou nesoudělné polynomy, je stabilní právě tehdy, když se všechny kořeny polynomu $D(z)$ nacházejí uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině.

Príklad

Jeli $h_k = a^k$, pak je soustava stabilní právě tehdy, když je $|a| < 1$.

Stabilita stavového modelu

- pro stavový model obecně platí: $D(z) = det(z\mathbb{I} - \mathbb{A})$;
- kořeny $D(z)$ jsou právě všechná vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ a jsou v absolútní hodnotě menší než hodnota 1;

Príklad

Uvažujme nějakou stabilní soustavu a jednotkový skok $1 = u_0 = u_1 = \ldots,$ jako vstup. Pak pro přechodovou charakteristiku soustavy, posloupnost y_t dostaneme

$$\lim_{t\to\infty} y_t = \lim_{t\to\infty} \sum_{k=0}^{t} h_k y_{t-k} = \lim_{t\to\infty} \sum_{k=0}^{t} h_k = \sum_{k=0}^{\infty} h_k = y_\infty$$

a soustava se tedy v nekonečném horizontu ustálí na nové úrovní. Obecně tedy předpoklad $h_t \to 0$ není postačující k tomu, aby řada $\sum_{k=0}^{\infty} h_k$ byla konvergentní.

- Pokud jsou ale kořeny $D(z)$ v jednotkovém kruhu (podmínka stability), pak také řada $\sum_{k=0}^{\infty} h_k$ konverguje absolútně.

Příklad: Bakaláři na australské univerzitě

Príklad

- kořeny polynomu $D(z) = det(z\mathbb{I} - \mathbb{A})$ jsou jednoduché; (s násobnosti jedna): pravděpodobnosti $p_{11}, p_{22}, p_{33}, p_{44}$;
- stabilitu teda dostaneme pro $p_{ii} < 1$ pro $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$; (teda postup do vyššího ročníku, resp. ukončení studia v poslednom ročníku, je možný s kladnou pravděpobnosti)

Zhrnutí a opakování

- **Modely lineární regulace & lineární soustavy**
  $\hookrightarrow$ modely, které posloupnost výstupných dat $\{y_t\}$ modelují jako linární funkci vstupných dat $\{u_t\}$, t.j. $y_t = h_0 u_t + \cdots + h_t u_0$, pro $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- **Obecný maticový zápis systému se stavy $\boldsymbol{x}_t = (x_{t1}, \ldots, x_{tr})^\top$**

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathbb{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{b}u_t;$$
$$y_t = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x}_t + d \cdot u_t,$$

  pro nějakou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, vektory $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^r$ a skalár $d \in \mathbb{R}$;
- **Řešení pomoci přenosové funkce soustavy**
  $\hookrightarrow$ cílem je najít vyjádření závislosti výstupné posloupnosti na vstupních datech prostředníctvím tzv. přenosové funkce soustavy: $Y(z) = H(z)U(z)$;

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} = [\boldsymbol{c}^\top \cdot (z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\boldsymbol{b} + d] = N(z)/D(z)$$

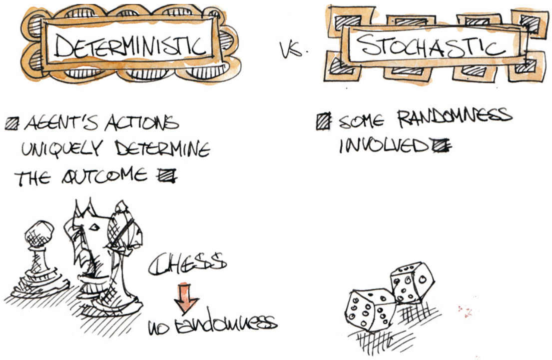
- **Základní vlastnosti/charakteristiky lineární soustavy**
  - impulzní charakteristika: $y_t \equiv h_t$ (stabilita pro $h_t \to 0$);
  - přechodová charakteristika: $y_t \equiv \sum_{k=0}^{t} h_k$ (ustálení pro $\sum_k^\infty h_k < \infty$);

Kapitola 4

Markovské řetězce

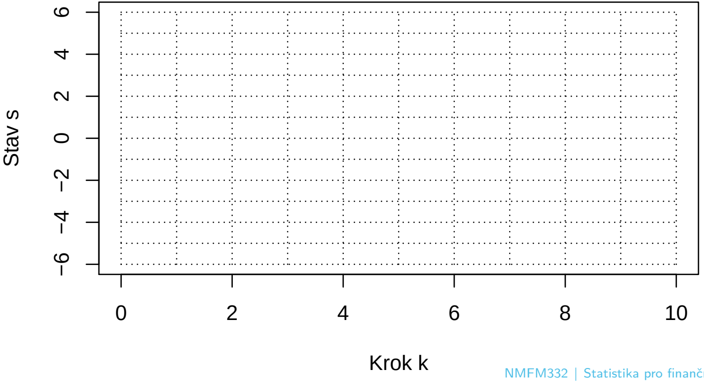
Deterministické data → Stochastické data

- v deterministických modelech je výstup (reakce) jednoznačné definovaný pomoci vstupu (akce) – napr. model lineární soustavy;
- v stochastických modelech je přítomen náhodný element, který přináší do výstupu jistou míru neurčitosti – napr. náhodná procházka;



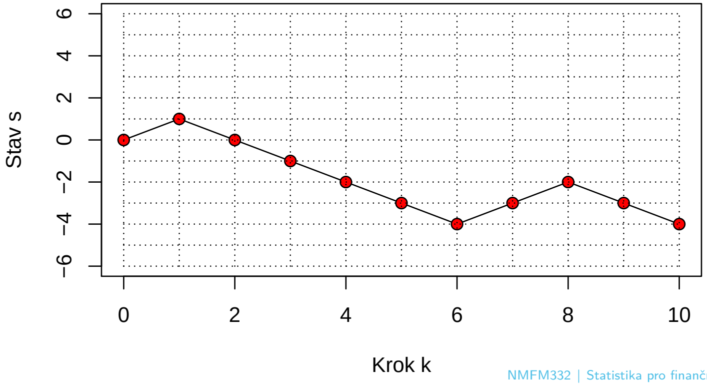
Náhodná procházka na přímce

- házime symetrickou minci (pravděpodobnost, že padne hlava je 1/2);
- záčíname v počátku, t.j. počátečný stav je v bodě nula;
- když padne hlava, posuneme se na ose napravo, když líce, tak nalevo; (po každom počte hodov sledujeme aktuálnu pozíciu/polohu)



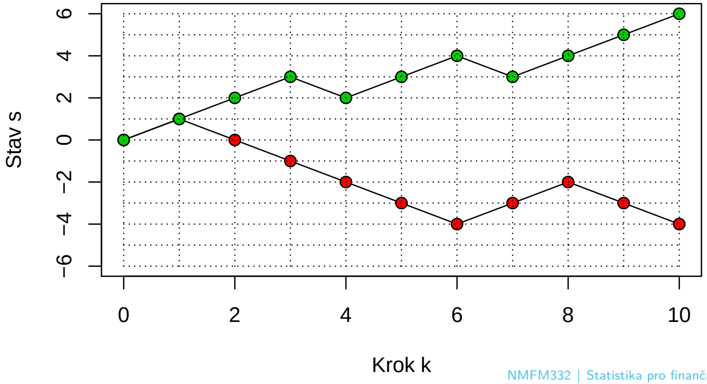
Náhodná procházka na přímce

- házime symetrickou minci (pravděpodobnost, že padne hlava je 1/2);
- záčíname v počátku, t.j. počátečný stav je v bodě nula;
- když padne hlava, posuneme se na ose napravo, když líce, tak nalevo; (po každom počte hodov sledujeme aktuálnu pozíciu/polohu)



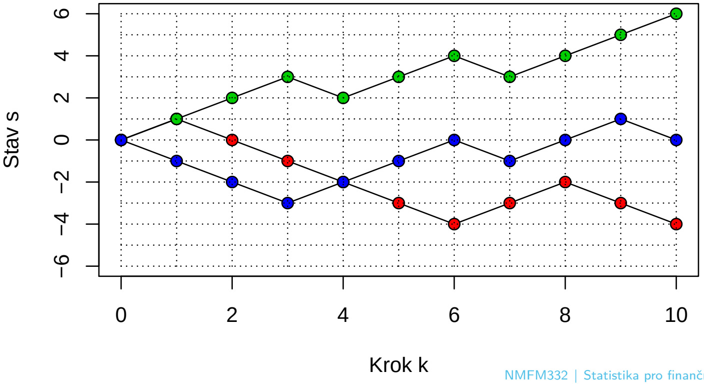
Náhodná procházka na přímce

- házime symetrickou minci (pravděpodobnost, že padne hlava je 1/2);
- záčíname v počátku, t.j. počáteční stav je v bodě nula;
- když padne hlava, posuneme se na ose napravo, když líce, tak nalevo; (po každom počte hodov sledujeme aktuálnu pozíciu/polohu)



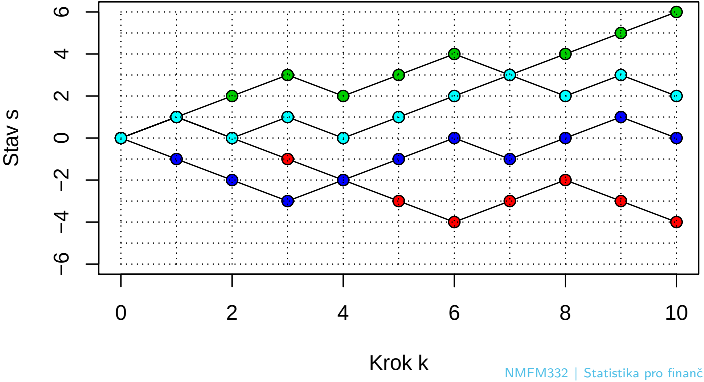
Náhodná procházka na přímce

- házime symetrickou minci (pravděpodobnost, že padne hlava je 1/2);
- záčíname v počátku, t.j. počátečný stav je v bodě nula;
- když padne hlava, posuneme se na ose napravo, když líce, tak nalevo; (po každom počte hodov sledujeme aktuálnu pozíciu/polohu)



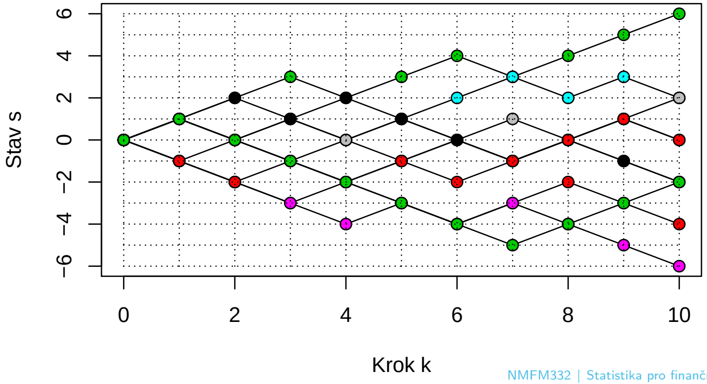
Náhodná procházka na přímce

- házime symetrickou minci (pravděpodobnost, že padne hlava je 1/2);
- záčíname v počátku, t.j. počátečný stav je v bodě nula;
- když padne hlava, posuneme se na ose napravo, když líce, tak nalevo; (po každom počte hodov sledujeme aktuálnu pozíciu/polohu)

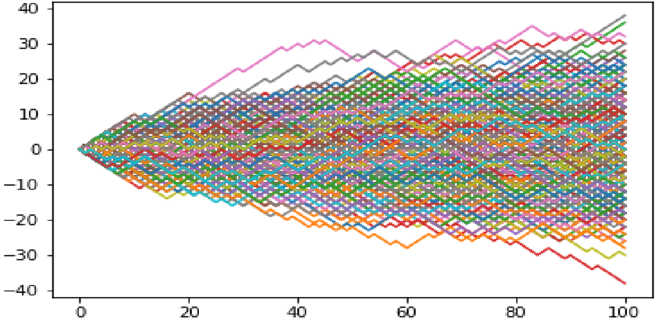


Náhodná procházka na přímce

- házime symetrickou minci (pravděpodobnost, že padne hlava je 1/2);
- záčíname v počátku, t.j. počátečný stav je v bodě nula;
- když padne hlava, posuneme se na ose napravo, když líce, tak nalevo; (po každom počte hodov sledujeme aktuálnu pozíciu/polohu)



Náhodná procházka na přímce II



Stochastické celočíselné posloupnosti

- uvažujme nějakou posloupnost $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, která nabýva pouze celočíselné hodnoty (konečne, nebo spočetne mnoho);
- hodnoty $n \in \mathbb{N}$ interpretujeme jako časové okamžiky, ve kterých posloupnost $\{X_n\}$ nabýva své hodnoty;
- množina $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{Z}$ všech možných stavů posloupnosti $\{X_n\}$, které může posloupnost hypoteticky nabývat, se nazýva stavový prostor;
- hodnoty $s \in \mathcal{S}$, které může posloupnost $\{X_n\}$ hypoteticky (ale ne nutně) nabývat, nazývame stavy;
- budeme uvažovat pouze diskrétní časové okamžiky a posloupnosti, kde $\mathcal{S}$ je nejvýše spočetná množina;
- stav poslopnosti $\{X_n\}$ v nějakem konkrétním čase $n \in \mathbb{N}$ závisí na předchozích stavech, ale závislost není deterministická;
- stav posloupnosti $\{X_n\}$ v čase $n \in \mathbb{N}$ je vyjádřen prostředníctvím pravděpodobnostního modelu (zahrnuje v sobě míru neurčitosti);

Markovský řetězec a markovská vlastnost

Definice: Markovův řetězec

Řekneme, že posloupnost celočíselných náhodných veličín $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazýva Markovův řetězec (markovský řetězec), jestliže platí, že

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0] = P[X_{n+1} = j | X_n = i_n],$$

pro každé $n \geq 0$ a každé $i_0, \ldots, i_n \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$P[X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0] > 0.$$

Množina všech stavů je v tomto připadě množina $\mathbb{Z}$, t.j., $\mathcal{S} \equiv \mathbb{Z}$.

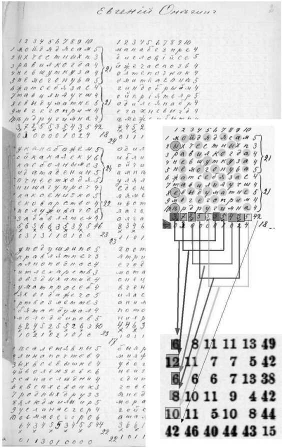
Markovskou vlastnosti nazývame fakt, že výsledek v čase $n+1$ závisí pouze na stavu daného řetězce v čase n (tudíž na stave v předchozím kroku, neboli v přítomnosti), nikoli na minulosti, t.j. na posloupnosti realizovaných stavů před časem n.

Markovský řetězec a markovská vlastnost

Příklady aplikace Markovských řetězců

- **První aplikace:** Andrei A. Markov použil Markovský řetězec na analýzu 20.000 listů z Pushkinovej básne Eugeny Onegin a studoval pravděpodobnosti výskytu samohlásek a souhlasek na základě předchozího výskytu (samohlásek a souhlasek);
- **Teória informaci:** striktně povedané, každý proces pri ktorom zdroj prenáša nějaké informace, je markovský řetězec (Shannonova teórie);
- **Informatika (IT):** aplikácia pre vyhľadavacie algoritmy (napr. Google), hodnotenie web stránok (PageRank), computer performance evaluation;
- **Marketing:** systémy hromadné obsluhy, modelování správania zákazníkov/klientov a modelování změn ich preferencí;
- **Finance a business:** modelování různych finančných trhov, změny různych stavů, jejích chování a pod.
- **Matematika:** simulačné metódy, rozhodovací algoritmy, analýza a spracování dat, atď.;

Markovský řetězec a Eugeny Onegin



- prvních 800 písmen z celkových 20.000 listů v Pushkinovom Eugeny Oneginovi;
- výskyt jednotlivých písmen zapsán pomoci 40 čtvercových matíc typu 10×10;
- spodní matice typu 6 × 6 zobrazuje frekvenčný výskyt některých písmen v 500 případech;
- na základě této analýzy sa ukázalo, že není žádny matematický rozdíl mezi kostkou, kterou hodíme 1000 krát a 1000 kostkami, které hodíme pouze jednou, ale všechny naraz;

Hilgers, P. and Langville, A. (2006). The Five Greatest Applications of Markov Chains. *MAM 2006: Markov Anniversary Meeting . Raleigh 2006.*

Markovský řetězec a Eugeny Onegin

VII

He was too young to have been blighted
by the cold world's corrupt finesse;

his soul still blossomed out, and lighted
at a friend's word, a girl's caress.

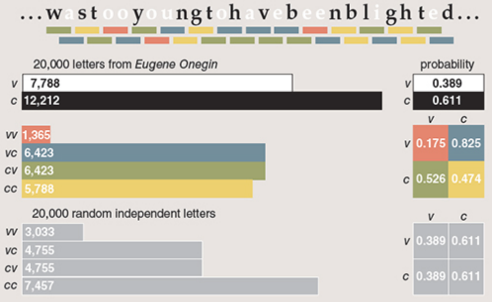
In heart's affairs, a sweet beginner,
he fed on hope's deceptive dinner;

the world's éclat, its thunder-roll,
still captivated his young soul.

He sweetened up with fancy's icing
the uncertainties within his heart;

for him, the objective on life's chart
was still mysterious and enticing –

something to rack his brains about,
suspecting wonders would come out.



Pravděpodobnosti přechodu

Definice: Pravděpodobnost přechodu

Pravděpodobnost $p_{ij}(n, n+1) \in [0, 1]$, pro $i, j \in \mathcal{S}$, definovanou jako

$$p_{ij}(n, n+1) = P[X_{n+1} = j | X_n = i],$$

nazýváme pravděpodobnost přechodu ze stavu i v čase n do stavu j v čase $n+1$;

- je intuitivně zřejmé, že pro nějaký konkrétný stav $i \in \mathcal{S}$ a čas $n \in \mathbb{N}$ dostaneme posloupnost $\{p_{is}(n, n+1)\}_{s \in \mathcal{S}}$, která definuje rozdělení pravděpodobnosti na množine stavů $\mathcal{S}$;
- vyjádřeno matematicky:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \forall_{i \in \mathcal{S}} \qquad \sum_{s \in \mathcal{S}} p_{is}(n, n+1) = 1$$

Homogenita Markovského řetězce

Definice: Homogenní Markovský řetězec

Markovský řetězec se nazýva homogenní, jestliže platí, že

$$p_{ij} = p_{ij}(n, n+1),$$

pro všechny $i, j \in \mathcal{S}$, tudíž pravděpodobnosti přechodů zo stavu i do stavu j nezávisí na čase n.

- pro konkrétny stav $i \in \mathcal{S}$ dostaneme opět rozdělení pravděpodobnosti $\{p_{is}\}_{s \in \mathcal{S}}$ na množine stavů $\mathcal{S}$;

Počáteční rozdělení řetězce

Definice: Počáteční rozdělení

Pravděpodobnosti $p_i \in [0,1]$, pro $i \in \mathcal{S}$, které jsou definovány jako

$$p_i = P[X_0 = i],$$

pro $i \in \mathcal{S}$, nazývame počáteční rozdělení řetězce.

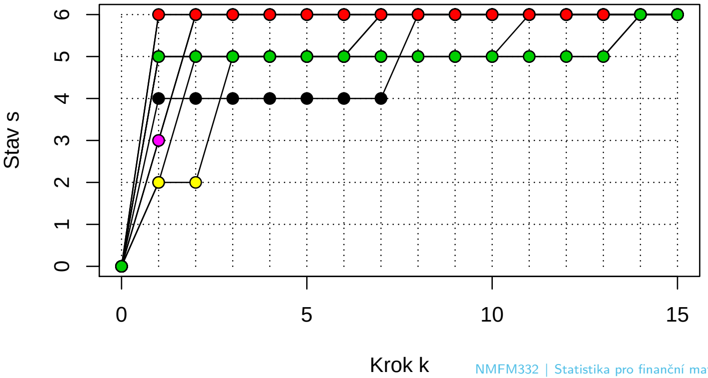
- v případě homogénních Markových řetězců se obvykle přechodové pravděpodobnosti zapisují v maticovem tvaru – tzv. matici přechodových pravděpodobností (resp. přechodová matice): $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$;
- matice přechodových pravděpodobnosti se také (obecně) nazýva aj stochastická matice, protože součet prvků v každem řádku je roven hodnotě jedna (každý řádek definuje rozdělení pravděpodobnosti na $\mathcal{S}$);
- počátečné rozdělení $\{p_i\}_{i \in \mathcal{S}}$ Markovského řetězce se zapisuje pomoci vektoru pravděpodobnosti počátečného rozdělení: $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_{|\mathcal{S}|})^\top$;

Matice přechodových pravděpodobnosti

- matice přechodových pravděpodobnosti je definována jako $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^{|S|}$; *(pro nejvýše spočetný stavový prostor $\mathcal{S}$ a stavy $i, j \in \mathcal{S}$)*
- matice přechodových pravděpodobnosti může být obecně nekonečná; *(pro nekonečnou, ale nejvýše spočetnou množinu stavů $\mathcal{S}$)*
- matice přechodových pravděpodobnosti je stochastická matice; *(z každého stavu se někam musíme v dalším kroku dostat, nebo zůstat)*
- vektor počátečného rozdělení řetezce ma součet jedna; *(v nějakom stave $s \in \mathcal{S}$ musí řetězec začít)*
- obecně řádky přechodové matice $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^{|\mathcal{S}|}$ značí výchozí stav $i \in \mathcal{S}$ a v sloupcích matice se uvádějí koncové stavy $j \in \mathcal{S}$;

Příklad: Dosažené maximum na hrací kostce

- obecně v n-tém tahu sledujeme dosažené maximum v n hodech;
- minimální hodnota (stav) je jedna, maximální (stav) je hodnota 6;
  (resp. v čase nula můžeme začínat ve stavu 0 – nebylo maximum dosaženo)



Příklad: Dosažené maximum na hrací kostce

Príklad

Házime spravodlivou hrací kostkou a sledujeme dosažené maximum v $n \in \mathbb{N}$ hodech. Množina stavů je $\mathcal{S} = \{1, \ldots, 6\}$ a matici přechodových pravděpodobností pak můžeme zapsát jako

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

kde p_{ij} značí pravděpodobnost přechodu ze stavu i (řádek) do stavu j (sloupec), pro libovolné $i, j \in \mathcal{S}$.

Existence cesty v Markovském řetězci

- v souvislosti s Markovskými řetězcemi je někdy důležité vyšetřit existenci cesty z nějakého stavu $i \in \mathcal{S}$ do nějakého jíného stavu $j \in \mathcal{S}$;

Věta: Existence cesty v Markovském rětězci

Nechť $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ je homogénní Markovský řetězec s nejvýše spočetnou množinou stavů $\mathcal{S}$, počátečným rozdělením $(p_i;\ i \in \mathcal{S})$ a maticou přechodových pravděpodobností $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$.
Pak platí, že

$$P[X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n] = p_{i_0} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} i_n},$$

pro libovolné stavy $i_0, \ldots, i_n \in \mathcal{S}$.

Pravděpodobnosti přechodů vyšších řádů

- existence cesty ze stavu $i \in \mathcal{S}$ do stavu $j \in \mathcal{S}$ v n krocích souvisí s přechodovými pravděpodobnostmi vyšších řádů – pravděpodobnostmi $p_{ij}^{(n)}$;

Definice: Pravděpodobnost přechodu v n krocích

Nechť $p_{ij}^{(0)} = \mathbb{I}_{\{i=j\}}$ a $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$. Pak pravděpodobnost

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{ik}^{(n)} p_{kj}$$

se nazýva pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j po $(n+1)$ krocích (resp. $p_{ik}^{(n)}$ je pravděpodobnost přechodu n-tého řádu ze stavu i do stavu k).

- pro matici přechodových pravděpodobnosti n-tého řádu pak používame značení $\mathbb{P}^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})_{i,j \in \mathcal{S}}$;

Pravděpodobnost přechodu n-tého řádu

Věta: Pravděpodobnost přechodu v n-tém kroku

Nechť $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $i, j \in \mathcal{S}$. Pak platí, že

$$P[X_{m+n} = j | X_m = i] = p_{ij}^{(n)}.$$

Pro matici přechodových pravděpodobností n-tého řádu zároveň platí, že

$$\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^n.$$

- stejně jako matice $\mathbb{P}$ aj matice přechodových pravděpodobností vyšších řádů $\mathbb{P}^{(m)}$, jsou stochastické matice, t.j. součet prvků v každém řádku je roven hodnotě jedna;

Příklad: Dosažené maximum na hrací kostce

Príklad

Házime spravodlivou hrací kostkou a sledujeme dosažené maximum v $n \in \mathbb{N}$ hodech. Množina stavů je $\mathcal{S} = \{1, \ldots, 6\}$ a matici přechodových pravděpodobností pak můžeme zapsát jako v (9).
Pro přechodové pravděpodobnosti vyšších řádů máme

$$p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i > 0; \\ \left(\frac{j}{6}\right)^n & \text{pro } i = j; \\ \left(\frac{j}{6}\right)^n - \left(\frac{j-1}{6}\right)^n & \text{pro } j > i; \end{cases}$$

Samostatný úkol

Spočtěte matici přechodových pravděpodobnosti pro dosažené maximum na hrací kostce po $n = 2$ a $n = 3$ hodech.

Chapman-Kolmogorova věta

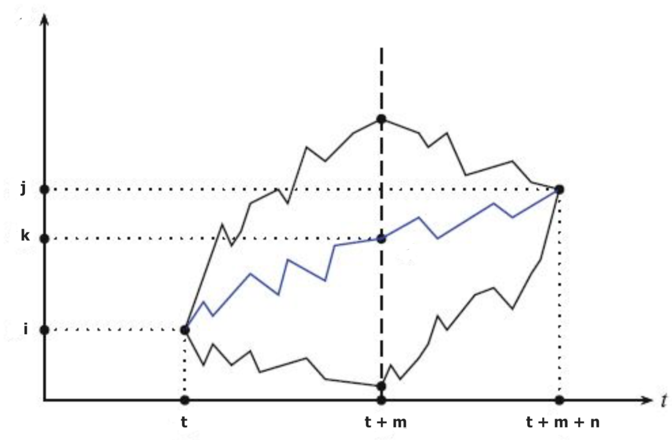
Věta: Chapman-Kolmogorov

Nechť $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ je homogénní Markovský řetězec. Pak pro libovolná $n, m \in \mathbb{N}$ platí, že

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in \mathbb{S}} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}.$$

- **IDEA:**
  Pro pravděpodobnost cesty zo stavu $i \in \mathcal{S}$ do stavu $j \in \mathcal{S}$ v $n + m$ krocích, se stačí podívat na všechny možné dosažitelné stavy $k \in \mathcal{S}$ po n krocích a pak všechny možné cesty zo stavu $k \in \mathcal{S}$ do stavu $j \in \mathcal{S}$ v m krocích.

Chapman-Kolmogorova věta



Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

Markovské řetězce

- Posloupnosti celočíselných náhodných veličín: $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$; (uvažujeme pouze diskrétní čas a diskrétne stavy);
- Množina stavů $\mathcal{S}$ je nejvýše spočetná (např. $\mathcal{S} \equiv \mathbb{Z}$);
- Platí Markovská vlastnost: $P[X_{n+1} = j | X_n, \dots, X_1] = P[X_{n+1} = j | X_n]$;
- Homogenita: nezávislost přechodov mezi stavy na čase $n \in \mathbb{N}$;

Pravděpodobnosti přechodov a počátečné rozdělení

- Pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j (v jednom kroku):

$$p_{ij} = P[X_{n+1} = j | X_n = i]$$

- Pravděpodobnost přechodu ze stavu i do j n-tého řádů (v n krokoch):

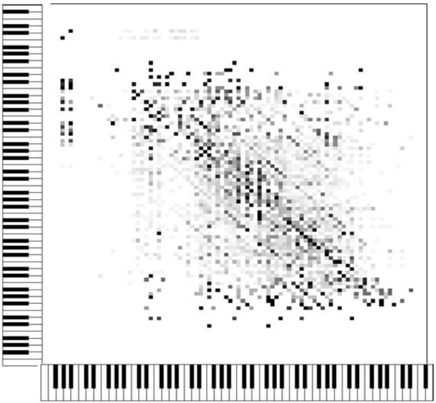
$$p_{ij}^{(n)} = P[X_{m+n} = j | X_m = i]$$

- Počátečné rozdělení Markovského řetězce pro stavy $i \in \mathcal{S}$:

$$p_i = P[X_0 = i]$$

- Pro každé $i \in \mathcal{S}$ se jedná o rozdělení pravdepodobností na $\mathcal{S}$; (t.j., $\sum_{k \in \mathcal{S}} p_{ik} = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{ik}^{(n)} = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_k = 1$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$)

Reprezentace Markovského řetězce



I. Stravinsky "The Fire-bird" suite melody

- pomoci matice přechodových pravděpodobnosti $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$;
- případně matice přechodových pravdepodobnosti vyšších řádů $\mathbb{P}^{(n)}$;
- orientovaný graf s vrcholy pro stavy a váhami pro jednotlivé hrany;
- obrazek ilustrující matici přechodových pravděpodobnosti;

Klasifikace stavů Markovského řetězce

Definice: Dosažitelnost stavu v Markovském řetězci

Řekneme, že nějaký stav $j \in \mathcal{S}$ je dosažitelný ze stavu $i \in \mathcal{S}$, pokud existuje číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že $p_{ij}^{(n)} > 0$.

- pro vyjádření faktu, že stav j je dosažitelný ze stavu i (ne nutně v jednom kroku), používame značení $i \longrightarrow j$;

Definice: Nerozložitelnost Markovského řetězce

Řekneme, že Markovský řetězec je nerozložitelný, pokud každý stav je dosažitelný z každého stavu.

- dosažitelnost stavů v Markovském řetězci a nerozložitelnost řetězce nemusí byt patrná pouze z pohledu na samotnou matici $\mathbb{P}$;

Rozložitelnost a nerozložitelnost řetězce

Príklad

Uvažujme Markovský řetězec se čtyřprvkovou množinou stavů $\mathcal{S}$ a maticou přechodových pravděpodobnosti

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- jedná se o rozložitelný Markovský řetězec protože stav 1 nelze dosáhnout ze žádneho jiného stavu 2,3 a 4;
- pro nerozložitelnost řetězce by stačilo například umožnit přechod ze stavu 2 do stavu 1, t.j., definovat $p_{21} > 0$;

Samostatný úkol

Reprezentujte Markovský řetězec z příkladu pomoci vhodného grafu.

Uzavřená množina stavů

Definice: Množna uzavřených stavů

Řekneme, že neprázdna množina stavů $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ je uzavřená množina, pokud každý stav vně množiny $\mathcal{C}$ není dosažitelný z žádneho stavu množiny $\mathcal{C}$.

- **IDEA:**
  Jakmile řetězec jednou vejde do nějakého stavu $s \in \mathcal{C}$, pak již nemůže řetězec nabýt zádneho jiného stavu, kromě stavů v množine $\mathcal{C}$.
- uzavřenost ve zmyslu *nemůžeme ven, ale pořád můžeme dovnitř*;

Věta: Nerozložitelnost řetězce I

Markovský řetězec je nerozložitelný právě tehdy, kdýž neexistuje žádna uzavřená množina $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$, taková, že $\mathcal{C} \neq \mathcal{S}$.

Rozložitelnost a nerozložitelnost řetězce

Věta: Uzavřená množina stavů

Množina stavů $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$, taková, že $\mathcal{C} \neq \mathcal{S}$ je uzavěná právě tehdy, když platí, že

$$p_{jk} = 0 \quad \text{pro} \quad \forall j \in \mathcal{C} \quad \text{a} \quad \forall k \notin \mathcal{C}.$$

Věta: Nerozložitelnost řetězce II

Řetězec je rozložitelný právě tehdy, když po vhodném přečíslování stavů řetězce (a teda příslusnou permutaci řádků a sloupců matice $\mathbb{P}$) je matice přechodových pravděpodobností ve tvaru

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbb{Q} & \mathbb{R} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbb{P}_1$ a $\mathbb{R}$ jsou čtvercové matice a $\mathbb{P}_1$ je navíc stochastická.

Doba prvního vstupu (návratu) do stavu

Definice: Doba prvního vstupu

Pro libovolný stav $i \in \mathcal{S}$ definujeme

$$\nu_i = \inf\{n \in \mathbb{N};\ X_n = i\}$$

jako čas prvního vstupu (resp. doba prvního návratu řetězce $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ do stavu $i \in \mathcal{S}$, t.j., záleží na počátečném rozdělení).

- analogicky lze definovat i obecný čas k-tého vstupu (návratu) řetězce do stavu $i \in \mathbb{S}$ jako

$$\nu_i(k) = \inf\{n > \nu_i(k-1);\ X_n = i\},$$

kde definujeme $\nu_i(1) \equiv \nu_i$, pro $i \in \mathcal{S}$;

Doba mezi návraty do stavu

Pro doby, které Markovský řetězec strávi mezi jednotlivými návraty do daného stavu $i \in \mathcal{S}$ se obecně zavádi značení

- $T_i(1) = \nu_i = \nu_i(1)$: doba do prvního návratu/vstupu do stavu $j \in \mathbb{S}$;
- $T_i(2) = \nu_i(2) - \nu_i(1)$: doba mezi prvním a druhým návratem/vstupem;
- $T_i(k) = \nu_i(k) - \nu_i(k-1)$: doba mezi k-tym a $(k-1)$-vým návratem;

- Samozrejme platí, že

$$\nu_i(k) = T_i(1) + T_i(2) + \cdots + T_i(k);$$

Poznámka:
Je vhodné rozlišovat návrat do stavu $i \in \mathcal{S}$ (pokud již řetězec v tomto stavu v minulosti byl) a vstup do stavu $i \in \mathcal{S}$ (pokud řetězec v daném stavu ještě nebyl). V praxi (ovšem ne nutně vždy a všude) se obecně používa vyjádření o prvním vstupu do stavu $i \in \mathcal{S}$ ("nultý" návrat) a pak o k-tém návratu (t.j., $(k+1)$-ní vstup).

Trvalý a přechodný stav v Markovském řetězci

Definice: Trvalý stav

Stav $i \in \mathcal{S}$ takový, že platí

$$P_i[\nu_i < \infty] = P[\nu_i < \infty | X_0 = i] = 1,$$

se nazýva trvalý stav rětězce $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Definice: Přechodný stav

Stav $i \in \mathcal{S}$ takový, že platí

$$P_i[\nu_i = \infty] = P[\nu_i = \infty | X_0 = i] > 0,$$

se nazýva přechodný (transcientný) stav rětězce $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Přechodný a trvalý nulový a nenulový stav

- Trvalý stav je teda takový, že řetězec, který vychází ze stavu $i \in \mathbb{S}$ (proto podmínka, že $X_0 = i$), se v konečne mnoha krocích do tohto stavu vráti s pravděpodobnosti 1;

- V opačnem případě (t.j., existuje kladná pravděpodobnost, že řetězec, který začal ve stavu $i \in \mathbb{S}$, se již nikdy do tohto stavu nevráti) řekneme, že stav je přechodný.

Definice: Trvalý nulový a nenulový stav

- Trvalý stav $i \in \mathcal{S}$ takový, že $E_i \nu_i = \infty$, se nazýva nulový stav;
- Trvalý stav $i \in \mathcal{S}$ takový, že $E_i \nu_i < \infty$, se nazýva nenulový stav;

Střední hodnoty v definici jsou definované vzhledem k pravděpodobnostní míře $P_i[\cdot] = P[\cdot | X_0 = i]$ (t.j., záleží na počátečném rozdělení);

Klasifikace stavů v Markovském řetězci

- Do trvalého stavu se Markovský řetězec vrátí nekonečne mnoho krát s pravděpodobnosti 1.

- Do přehodného stavu se Markovský řetězec vráti nekonečne mnoho krát s pravděpodobnosti nula.

- Nechť $f_i^{(n)} = P_i[\nu_i = n]$ (první návrat v čase n) a nechť $f_i^{(0)} = 0$. Pak je zřejmé, že stav $i \in \mathcal{S}$ je trvalý, právě tehdy, když platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_i^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_i^{(n)} = 1;$$

- Pro střední hodnotu $E_i\nu_i$ platí: $E_i\nu_i = \sum_{n=1}^{\infty} nP_i[v_i = n] = \sum_{n=1}^{\infty} nf_i^{(n)}$;

- Obecně pro $n \geq 1$ platí, že $p_{ii}^{(n)} = P_i[X_n = i] = \sum_{k=1}^{n} f_i^{(k)} p_{ii}^{(n-k)}$;
- Obecně pro $n \geq 0$ a $i \neq j$ platí $p_{ij}^{(n)} = P_i[X_n = j] = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$, kde $f_{ij}^{(n)} = P_i[\nu_j = n] = P[\nu_j = n | X_0 = i]$ (první vstup v čase n);

Periodický a neperiodický stav

Definice: Periodický stav

Stav $i \in \mathcal{S}$ v homogénním Markovském řetězci $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ se nazýva periodický s periodou $d \in \mathbb{N}$, pokud platí, že

$$d = NSD(n > 0;\ p_{ii}^{(n)} > 0) > 1,$$

teda největší společný dělitel pro čas návratu do stavu i je větší jako jedna.

- Pokud platí, že $NSD = 1$, pak řekneme, že stav $i \in \mathbb{N}$ je aperiodický neboli neperiodický.

Stavy stejného typu

Definice: Stavy stejného typu

Řekneme, že dva stavy jsou stejného typu, pokud platí, že oba stavy jsou trvalé/přechodné, nulové/nenulové a periodické/neperiodické, so stejnou periodou $d > 1$.

Príklad

- Ověřte, že v Markovském řetězci s přechodovou matici

$$\mathbb{P}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & (1-p) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

  jsou všechny stavy periodické, s periodou $d = 3$ pro $p \in (0,1)$.
- Co se stane, když do procesu přidáme jednu smyčku typu $p_{ii} > 0$?

Klasifikace stavů v Markovském řetězci I

Věta: Trvalý a trvalý nulový stav

- Stav $i \in \mathcal{S}$ je trvalý $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$;
- Stav $i \in \mathcal{S}$ je přechodný $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$;
- Trvalý stav $i \in \mathcal{S}$ je nulový $\Leftrightarrow p_{ii}^{(n)} \longrightarrow 0$ pro $n \to \infty$;

Věta: Trvalé vs. předchodné stavy

V nerozložitelnem Markovském řetězci s $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ jsou všechny stavy trvalé tehdy a jen tehdy, když jediné řešení soustavy

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

v intervalu $[0, 1]$ je triviální, t.j. $x_i = 0$ pro všechny $i = 1, 2, \ldots$. Všechny stavy jsou přechodné $\Leftrightarrow$ existuje netriviální řešení (10).

Klasifikace stavů v Markovském řetězci II

Věta: Řetězec s konečně mnoho stavy

- V Markovskom řetězci s konečnou množinou stavů $\mathcal{S}$ nemohou být všechy stavy přechodné.
- V Markovskom řetězci s konečnou množinou stavů $\mathcal{S}$ neexistují stavy trvalé nulové.

Věta: Stavy stejného typu

Uvažujme Markovský řetězec s množinou stavů $\mathcal{S}$.

- Když pro libovolné dva stavy $i, j \in \mathcal{S}$ existuje cesta $i \rightarrow j \rightarrow i$, pak jsou oba stavy i a j stejného typu.
- Pokud $i \rightarrow j \not\rightarrow i$, pak stav i je přechodný.
- V nerozložitelném řetězci jsou všechny stavy stejného typu.

Absorbčné a ergodické stavy

- V případě Markovských procesů je užitečné ještě definovat tzv. absorbční stav a ergodický stav procesu.

Definice: Absorbční stav

Stav, ze kterého není dosažitelný žádný jiný stav, se nazýva absorbčný.

Definice: Ergodický stav

Stav, který je trvalý, nenulový a neperiodický, se nazýva ergodický.

Příklad: Dosažené maximum na hrací kostce

Príklad

- stav $i \in \mathcal{S}$ je trvalý $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$, pro $i = 1, \dots, 6$;
  - v našem případě platí: $p_{ii}^{(n)} = \left(\frac{i}{6}\right)^n$;
  - pro $i = 1, \dots, n$ je řada konvergentní;
  - pro $i = 6$ je suma divergentní;
- stav $i = 6$ je proto trvalý, stavy $i = 1, \dots, 5$ jsou přechodné;
- je stav $i = 6$ nulový nebo nenulový?
  - podle definice: $E_i \nu_i = 1 \cdot 1 = 1 < \infty$;
  - stav $i = 6$ je proto trvalý nenulový;
  - střední doba návratu do stavu $i = 6$ je 1 $(\nu_6 = 1)$;
  - množina stavů $\{6\}$ je uzavřená, a stav je absorbční;

Příklad: Náhodná procházka

Príklad

- otázka zní, jak se chovají pravděpodobnosti $p_{ii}^{(n)}$?
- z povahy řetězce je zřejmé, že $p_{ii}^{(n)} = 0$ pro $n \in \mathbb{N}$ liché;
- pro pravděpodobnosti $p_{ii}^{(2n)}$ pak dostaneme:

$$p_{ii}^{(2n)} = \binom{2n}{n} 2^{-2n} = \frac{(2n)!2^{-2n}}{(n!)^2} \approx \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n} 2^{-2n}}{n^{2n} e^{-2n} 2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \to 0,$$

  kde jsme využili Stirlingovou approximaci $n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$;
- tudíž platí, že $p_{ii}^{(n)} \to 0$, pro $n \to \infty$;
- zároveň platí, že $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$;
- všechny stavy jsou proto trvalé nulové;

Příklad: Člověče nezlob se!

Samostatný úkol

Uvažujte hru Člověče nezlob se, kde hrací plocha ma pouze 15 stanovíšť. Hráč se posune o tolik kroků dopředu, kolik hodil bodů na kostke. Když hodí hodnotu šest, háže opět a posune se o počet kroků daný součtem bodů v jednotlivých hodech. Hrá končí, když se hráč vráti spátky na štartovací pozici – t.j. políčko č. 15.
Jak vypadá matice přechodových pravděpodobností? Klasifikujte stavy Markovského procesu.

Zhrnutí/opakování

- Homogénní Markovské řetězce s diskrétným časem $n \in \mathbb{N}$ a nejvýše spočetnou množinou stavu $\mathcal{S}$;
- Klasifikace stavů v Markovském řetězci:
  - Trvalé nulové a nenulové stavy;
  - Přechodné stavy;
  - Neperiodické a periodické stavy s periodou $d > 1$;
  - Absorbční a ergodické stavy;
- Rozložitelnost a nerozložitelnost řetězce:
  - Dosažitelnost stavů (existence cesty $i \to j \to i$);
  - Existence uzavřené podmnožiny stavů $\Rightarrow$ rozložitelnost řetězce;
- Zavedené veličiny a značení:
  - Počáteční a přechodové pravděpodobnosti: $p_i, p_{ij}, p_{ij}^{(n)}$ pro $i, j \in \mathcal{S}$;
  - Čas prvního (obecně k-tého) návratu/vstupu do stavu $i \in \mathcal{S}$: $\nu_i(k)$;
  - Čas mezi k-tým a $(k-1)$-ním vstupem do stavu $i \in \mathcal{S}$: $T_i(k)$;
  - Podmíněná pravděpodobnost počátečným stavem: $P_i[\cdot] = P[\cdot|X_0 = i]$;
  - Pravděpodobnost návratu/vstupu do stavu $i \in \mathcal{S}$ v čase $n \in \mathbb{N}$: $f_i^{(n)}, f_{\ell i}^{(n)}$;

Chování Markovských řetězců

- Homogénní Markovský řetězec $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ s diskrétním časem a nejvýše spočetnou množinou stavů $\mathcal{S}$;
- Zajíma nás dlouhodobé chování Markovských řetězců, t.j., pro $n \to \infty$;
- Jaké je marginální rozdělení náhodnej veličiny X_n, pro $n \to \infty$;
- Obecně, náhodné veličiny X_n mají různe rozdělení pro různa $n \in \mathbb{N}$;

Chování Markovských řetězců

- Homogénní Markovský řetězec $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ s diskrétním časem a nejvýše spočetnou množinou stavů $\mathcal{S}$;
- Zajíma nás dlouhodobé chování Markovských řetězců, t.j., pro $n \to \infty$;
- Jaké je marginální rozdělení náhodnej veličiny X_n, pro $n \to \infty$;
- Obecně, náhodné veličiny X_n mají různe rozdělení pro různa $n \in \mathbb{N}$;

- **Otázka:** Lze něco obecně říct o rozdělení X_n, pro $n \to \infty$?
  - např., rozdělení je stejné pro všechny $n \geq n_0$, pro nějaké vhodně zvolené $n_0 \in \mathbb{N}$;
  - nebo rozdělení náhodne veličiny X_n konverguje k nějakému limitnímu rozdělení pro $n \to \infty$;
  - nebo existuje nějaké rozdělení Markovského řetězce, které zaručuje nějaky jednoduchý princip fungovania – "stabilitu" Markovského řetězce;

Stacionární rozdělení Markovského řetězce

Definice: Stacionární rozdělení Markovského řetězce

Řekneme, že pravděpodobnostné rozdělení $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i;\ i \in \mathcal{S})$ na množine stavů $\mathcal{S}$ je stacionární rozdělení Markovského řetězce, pokud platí, že

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i p_{ij},$$

pro všechny $j \in \mathcal{S}$. Maticově lze také zapsát jako

$$\boldsymbol{\pi}^\top = \boldsymbol{\pi}^\top \mathbb{P},$$

pro matici přechodových pravděpodobností $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$.

Samostatný úkol

Vysvětlete, co znamená, že $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i;\ i \in \mathcal{S})$ je pravděpodobnostné rozdělení na množine stavů $\mathcal{S}$. Všimněte si, že $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_{|\mathcal{S}|})^\top$ nezávisí na čase $n \in \mathbb{N}$.

Limitní rozdělení Markovského řetězce

Definice: Limitní rozdělení Markovského řetězce

Řekneme, že pravděpodobnostné rozdělení $\mathcal{P} = (p_i;\ i \in \mathcal{S})$ na množine stavů $\mathcal{S}$ je limitní rozdělení Markovského řetězce, pokud platí, že

$$p_i = \lim_{n \to \infty} p_i(n),$$

kde $p_i(n) = P[X_n = i]$, pro $i \in \mathcal{S}$.

Samostatný úkol

Ukážte, ze pro Markovský řetězec s maticou přechodových pravděpodobnosti

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

neexistuje limitní rozdělení.

Limitní vs. stacionární rozdělení

- **Stacionární rozdělení** Markovského řetězce se vztahuje pouze k pravděpodobnostem přechodu p_{ij}, pro $i, j \in \mathcal{S}$. Nezávisí teda na počátečném rozdělení Markovského řetězce.
- **Limitní rozdělení** se vztahuje k rozdělení celého Markovského řetězce. Je tedy ovplivněno i počátečním rozdělením Markovského řetězce.
- Snadno lze nahlédnout, že pokud je počáteční rozdělení řetězce rovno stacionárnímu rozdělení $\boldsymbol{\pi}$, pak je i rozdělení řetězce ve všech dalsích časech $n \in \mathbb{N}$, t.j. rozdělení $(p_i(n);\ i \in \mathcal{S})$, rovné rozdělení $\boldsymbol{\pi}$.

Věta: Stritně stacionární proces

V případě, že počáteční rozdělení řetezce je stejné jako stacionární rozdělení, pak pro všechny $k \in \mathbb{N}$, pro libovolnú posloupnost stavů $i_0, \ldots, i_k \in \mathcal{S}$ a libovolný čas $n \in \mathbb{N}$ platí

$$P[X_0 = i_0, \ldots, X_k = i_k] = P[X_n = i_0, \ldots, X_{n+k} = i_k].$$

Takový řetězec se nazýva striktně stacionární.

Limitní rozdělení $\Rightarrow$ stacionární rozdělení

Věta: Limitní rozdělení a stacionární rozdělení

Nechť existuje limitní rozdělení $\mathcal{P} = (p_i;\ i \in \mathcal{S})$ Markovského řetězce $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Pak je toto rozdělení zároveň stacionárním rozdělením Markovského řetězce a tudíž platí, že

$$\mathcal{P} = \boldsymbol{\pi}.$$

- Opačná implikace samozřejme obecně neplatí: není pravda, že existence stacionárního rozdělení by byla postačujíci podmínka pro existenci limitního rozdělení Markovského řetězce;

Nerozložitelnost a existence stacionárního rozdělení

Věta: Nerozložitelnost a existence stacionárního rozdělení

Nechť $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je nerozložitelný Markovský řetězec s množinou stavů $\mathcal{S}$. Pak stacionární rozdelení existuje právě když všechny stavy jsou trvalé nenulové. Existence je navíc jednoznačna.

- Jsou-li navíc všechny stavy neperiodické, je stacionární rozdělení i limitním rozdělením a platí

$$\lim_{n\to\infty} p_j(n) = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j = \frac{1}{E_j\nu_j} = \frac{1}{\mu_j},$$

- Jsou-li všechny stavy periodické, pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_j(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = \pi_j.$$

Bez důkazu

Nerozložitelnost a neexistence stacionárního rozdělení

Věta: Neexistence stacionárního rozdělení v nerozložitelném MŘ

Nechť $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je nerozložitelný Markovský řetězec s množinou stavů $\mathcal{S}$. Pak platí, že

- jsou-li všechny stavy Markovského řetězce přechodné, nebo všechny jsou trvalé nulové, pak stacionrní rozdělení neexistuje.

- stačí si uvědomit, že jsou-li všechny stavy MŘ přechodné, nebo trvalé nulové, pak musí platit, že

$$p_{ij}^{(n)} \longrightarrow 0, \quad \text{pre } n \to \infty \text{ a } \forall i, j \in \mathcal{S}$$

- z definície stacionarného rozdelenia ale dostaneme spor s faktom, že sa má jednat o pravdepodobnostné rozdělení, tudíž že platí

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i = 1$$

Příklad: Nehodové pojištění s bonusem

- V konečném nerozložitelném řetězci stacionární rozdělení vždy existuje. *(všechny stavy jsou totiž trvalé nenulové)*
- Stacionární rozdělení nerozložitelného řetězce nepopisuje pouze limity absolutních pravděpodobností jednotlivých stavů, ale popisuje také četnosti návratu do jednotlivých stavů, čas který daný Markovský řetězec v jednotlivých stavech strávi.

Príklad

Uvažujeme nehodové pojištění se třemi různymi úrovněmi:

- základní sazba (stav 1);
- sazba s bonusem 30 % (stav 2);
- sazba s bonusem 50 % (stav 3);

Rok bez pojistní události znamená postup do lepší pojistní kategórie pro přistí rok (když taková možnost existuje). Jedná pojistní událost v průběhu roka znamená posun o jednu kategórii níž (pokud to lze) pro další rok. V případě většího počtů události posun do základní kategórie.

Příklad: Nehodové pojištení s bonusem

Príklad

- situaci chceme modelovat pomoci Markovského řetězce;
- počet pojistních událostí Y_n v danem roce $n \in \mathbb{N}$ ma Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 0$;
- náhodná veličina X_{n+1} je definovaná následovně:

$$X_{n+1} = \begin{cases} \min(X_n + 1, 2) & \text{pro } Y_n = 0 \\ \max(X_n - 1, 0) & \text{pro } Y_n = 1 \\ 0 & \text{pro } Y_n > 1 \end{cases}$$

- ukážte, že $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je Markovský řetězec;
- nájděte matici přechodových pravděpodobnosti $\mathbb{P}$;
- nájděte soustavu rovníc pro nalezení stacionárního rozdělení;

Počet přechodů stavem $j \in \mathcal{S}$

Definice: Počet přechodů daným stavem

Náhodná veličina

$$N_j(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_k = j\}},$$

se nazýva počet přechodů stavem $j \in \mathbb{S}$ v prvních $n \in \mathbb{N}$ krocích (resp. počet návratů do stavu $j \in \mathcal{S}$).

- počet návratů do stavu j (náhodná veličina $N_j(n)$) úzce souvisí s časmi návratu do stavu $j \in \mathcal{S}$;

Počet přechodů, časy návratů a klasifikace

- Limitním přechodem získame celkový počet návratu do stavu $j \in \mathcal{S}$ jako

$$N_j = \lim_{n\to\infty} N_j(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_k=j\}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{X_k=j\}}.$$

- Snadno se nahlédne, že platí nasledujíci:
  - $N_j \geq k \Leftrightarrow \nu_j(k) < \infty$;
  - $N_j = k \Leftrightarrow \nu_j(k) < \infty \bigwedge \nu_j(k+1) = \infty$;

Věta: $0 - 1$ zákon

- ak je stav $j \in \mathcal{S}$ přechodný, pak $P_j[N_j = \infty] = 0$ (nula)
- ak je stav $j \in \mathcal{S}$ trvalý, pak $P_j[N_j = \infty] = 1$ (jedna)

Bez důkazu

Počet přechodů $N_j(n)$ a stacionární rozdělení

Věta: Stacionární rozdělení v řetězci s trvalými nenulovými stavy

V nerozložitelnem Markovském řetězci s trvalými nenulovými a neperiodickými stavy platí, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_j(n)}{n} = \pi_j, \quad \text{s pravděpodobnosti 1}$$

pro všechny stavy $j \in \mathcal{S}$.

Věta: Asymptotická normalita

V nerozložitelném MŘ s trvalými nenulovými stavy a konečnými rozptyly dob návratu, t.j., $\sigma_j^2 = Var[\nu_i] < \infty$ navíc platí, že

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{N_j(n) - \frac{n}{\mu_i}}{\sqrt{n\sigma_i^2/\mu_i^3}}\right] = \Phi(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Příklad: Stacionární rozdělení

Príklad

Uvažujme Markovský řetězec s množinou stavů $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \ldots, \}$ a maticou přechodových pravděpodobností

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \ldots \\ q & 0 & p & 0 & \ldots \\ 0 & q & 0 & p & \ldots \\ 0 & 0 & q & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

pro nějake vhodně zvolené $p > 0$ a $q > 0$, takové, že $p + q = 1$.

- Nájděte stacionární rozdělení pro daný Markovský řetězec.
- Využijte existenci stacionárního rozdelení ke klasifikaci stavů MŘ.

Zhrnutí/opakování

- Homogégnní Markovské řetězce s diskrétným časem $n \in \mathbb{N}$ a nejvýše spočetnou množinou stavov $\mathcal{S}$;
- Rozložitelnost a nerozložitelnost řetězce:
  - Konečné vs. nekonečná množina stavov;
  - Existence cesty: dosažitelnost stavů (stavy stejného typu);
  - Uzavřené podmnožiny stavů $\Rightarrow$ rozložítelnost řetězce;
  - Počty a časy přechodu, návratu a vstupu do daného stavu;
- Klasifikace stavů v Markovském řetězci:
  - Přechodné stavy;
  - Trvalé nulové a trvalé nenulové stavy;
  - Neperiodické/periodické stavy (s periodou $d > 1$);
  - Absorbční stavy a ergodické stavy;
- Limitní a stacionární rozdělení Markovského řetězce
  - Limitní rozdělení - popisuje chováni celého Markovského řetězce včetne počátečného rozdělení;
  - Stacionární rozdělení - vyjadruje určitou stabilitu řetězce vzhledem k pravdepodobnostem přechodu;

Kapitola 5

Časové řady

Nádodné procesy vs. časové řady

- **Stochastický/náhodný proces**
  $\hookrightarrow$ posloupnost (reálných) náhodných veličín $\{X_t;\ t \in T\}$ definovaných na stejném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$;
- **Časová řada (proces)**
  $\hookrightarrow$ stochastický proces indexovaný celočíselnou množinou T ($T \equiv \mathbb{N}$, nebo $T \equiv \mathbb{Z}$) (resp. stochastický proces s diskrétnym časom);

- v niektorých literárných zdrojoch sa pod pojmom časová řada rozumí již nějaká konkrétní realizace náhodného procesu $\{X_t;\ t \in T\}$, t.j., posloupnost konkrétních hodnot $X_1, X_2, \ldots$, neboli $x_1, x_2, \ldots$;

Bílý šum

Definice: Bílý šum

Posloupnost centrovaných a **nekorelovaných** náhodných veličín $\{X_t;\ t \in T\}$ s kladným konečným rozptylom se nazýva bílý šum.

Definice: Striktní bílý šum

Posloupnost **nezávislých, stejně rozdelených**, nedegenerovaných a centrovaných náhodných veličín $\{X_t;\ t \in T\}$ se nazýva striktní bílý šum.

- vpodstatě je bílý šum náhodný signál s rovnoměrnou spektrální hustotou; *(analógie s bílým svělem, které obsahuje všechny ostatné frekvence)*

Příklad: Bílý šum a striktní bílý šum

Príklad

- posloupnost nezávislých náhodných veličín z rozdělení $N(0,1)$ je bílý šum a zároveň aj striktní bílý šum (obecně $N(0,\sigma^2)$);
- posloupnost nezávislých náhodných veličín z rozdělení $C(0,1)$ je striktní bílý šum, ale není to bílý šum – neexistuje totiž ani střední hodnota, ani konečný rozptyl;
- posloupnost nekorelovaných náhodných veličín z nějakého obecného rozdělení F je bílý šum, pokud jsou veličiny centrované (t.j. s nulovou střední hodnotou) a s konečným rozptylem; Pokud navíc je rozdělení F normální, pak se jedná o striktní bílý šum;

- Striktní bílý šum a bílý šum jsou obecně časové řady s nejjednodušší závislostní struktúrou – nekorelované, neboli dokonce nezávislé. Zároveň v sobě nenesou žádnou informaci, jedna se pouze o náhodné chyby, stochastické fluktuace.

Silná stacionarita

Definice: Silná stacionarita

Řekneme, že posloupnost náhodných veličín $\{X_t;\ t \in T\}$ je striktně stacionární (resp. silně stacionární), pokud pro $\ell \in \mathbb{N}$, libovolné $k_1, \ldots, k_\ell \in T$ a každé $h > 0$ takové, že $k_1 + h, \ldots, k_\ell + h \in T$ platí, že

$$\mathcal{L}(X_{k_1}, \ldots, X_{k_\ell}) = \mathcal{L}(X_{k_1+h}, \ldots, X_{k_\ell+h}).$$

- Silná stacionarita znamená, že libovolná ℓ-tice náhodných veličích je stejně rozdělená v libovolnem časovém okamžiku;
- Z definice samozřejme plyne, že pro silně stacionární posloupnost $\{X_t;\ t \in T\}$ jsou náhodné veličiny X_t stejně rozdelené pro všechny $t \in T$;

Slabá stacionarita

Definice: Slabá stacionarita

Řekneme, že posloupnost náhodných veličín $\{X_t;\ t \in T\}$ je slabě stacionární, pokud platí:

- $EX_t = \mu$ pro všechna $t \in T$ (t.j., nezávisí na t);
- $R(k) = E\Big[(X_{t+k} - \mu)(X_t - \mu)\Big]$ (t.j, nezávisí na $t \in T$);

- funkce $R(k)$ se nazývá autokovarianční funkce posloupnosti;
- hodnota $R(0) = E(X - \mu)^2$ je rozptyl posloupnosti (konstantní v čase);
- funkce $r(k) = R(k)/R(0)$ se nazývá autokorelační funkce posloupnosti;
- samozřejme platí, že $R(k) = R(-k)$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$;

Příklad: Bílý šum a striktní bílý šum

Príklad

- pokud ma silně stacionární posloupnost konečné druhé momenty, pak je zřejmě slabě stacionární;
- pokud je posloupnost náhodných veličín gausovská (t.j. všechny konečně-rozměrná rozdělení jsou normální) a slabě stacionární, pak je také silně stacionární;
- striktní bílý šum je silně (striktně) stacionární (nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny);
- bílý šum je obecně slabě stacionární (centrované a nekorelované náhodné veličiny);

Klouzavé průměry řádu $q \in \mathbb{N}$

Definice: $MA(q)$ proces

Nechť posloupnost $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum s konečným rozptylem $\sigma^2 < \infty$. Pak náhodnou posloupnost

$$X_t = a_0\varepsilon_t + a_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + a_q\varepsilon_{t-q}, \quad \text{pro } t \in \mathbb{Z},$$

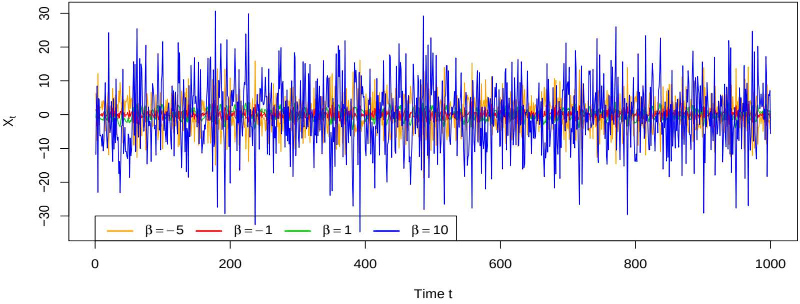
a pro nějaké koeficienty $a_0, \ldots, a_q \in \mathbb{R}$, takové, že $a_0 \neq 0 \neq a_q$, nazýváme posloupnost klouzavých průměrů řádu q.

- obecně majú $MA(q)$ procesy složitejší korelační strukturu než bílý šum, avšak složky X_t a X_{t+k} jsou nekorelované pro $k > q$.

Příklad: $MA(1)$ proces

Príklad

- nechť $X_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}$, pro $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ bílý šum;
- Pro jaké hodnoty $\beta \in \mathbb{R}$ je $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ stacionární?
- Jak je definovaná autokovarianční a autokorelační funkce?



Autoregresní model řádu $p \in \mathbb{N}$

Definice: $AR(p)$ proces

Nechť posloupnost $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum s konečným rozptylem $\sigma^2 < \infty$. Pak náhodnou posloupnost

$$d_0 X_t + d_1 X_{t-1} + \cdots + d_p X_{t-p} = \varepsilon_t, \quad \text{pro } t \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

pro nějaké koeficienty $d_0, \ldots, d_p \in \mathbb{R}$, takové, že $d_0 \neq 0 \neq d_p$, nazýváme autoregresní posloupnost řádu p.

- Ekvivalentně lze model přepsát pomoci rovnice $X_t = \tilde{d}_1 X_{t-1} + \cdots + \tilde{d}_p X_{t-p} + \widetilde{\varepsilon}_t$, kde $Var\widetilde{\varepsilon}_t = \frac{1}{d_0^2} Var\varepsilon_t$ a $\tilde{d}_j = -d_j/d_0$;
- Obecně jsou pro týto modely autokorelace nenulové a jednotlivé složky se navzájem ovlivňují i když jsou libovolně daleko od sebe.
- Pokud je posloupnost stacionární, pak závislost mezi složkami se vzrůstajícím rozdílem v čase nutně slabne;

Stacionarita autoregresní posloupnosti

Věta: Stacionarita autoregresní posloupnosti

Nechť $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je autoregresní posloupnost p-tého řádu definovaný rovnici (11) a nechť bez ujmy na obecnosti $d_0 = 1$. Nechť jsou všechny kořeny polynomu

$$d(z) = 1 + d_1 z + \ldots d_p z^p$$

vně jednotkového kruhu v komplexní rovině. Pak je proces $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ slabě stacionární a náhodná veličina ε_t je nekorelovaná se všemi náhodnými veličinami $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$.

Centrovanost a kauzálnost *AR* posloupnosti

- za platnosti podmínek předchozí věty je posloupnost $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ také centrovaná, protože ze slabé stacionarity také automaticky plyne, že

$$0 = E\varepsilon_t = d_0 EX_t + \ldots d_p EX_{t-p} = \mu \left(\sum_{i=1}^{p} d_i \right),$$

  a tudíž $\mu = 0$. Ak by $\sum_{i=1}^{p} d_i = 0$, pak by to znamenalo, že 1 je také kořenem polynomu $d(z)$, což je spor s předpokladem uvedéné věty;

- za platnosti podmínek předchozí věty také platí, že posloupnost $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ lze vyjádřit v kauzálnim tvare, t.j. existuje vyjádření

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{t-k},$$

  kde koeficienty c_k jsou určený vztahem $c(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \frac{1}{d(z)}$, pro $|z| \leq 1$.

Příklad: $AR(1)$ proces

Príklad

- nechť $X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t$, pro $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ bílý šum;
- polynom $d(z) = 1 - az$ má kořen v bodě $z = 1/a$;
- kořen je vně jednotkového kruhu $\Leftrightarrow$ $|a| < 1$;
- potom platí, že

$$X_t = aX_{t-1}+\varepsilon_t = a(aX_{t-2}+\varepsilon_{t-1})+\varepsilon_t = \cdots = a^k X_{t-k}+\sum_{\ell=0}^{k-1} a^{\ell}\varepsilon_{t-\ell};$$

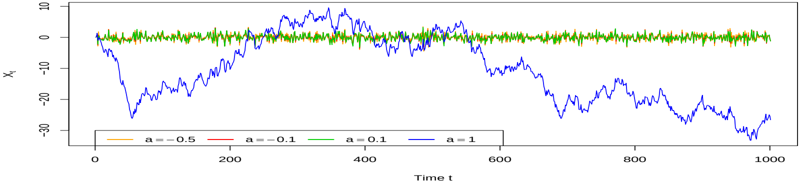
- a náhodnú veličinu X_t lze (limitním přechodem) vyjádřit kauzálně jako

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \varepsilon_{t-k}$$

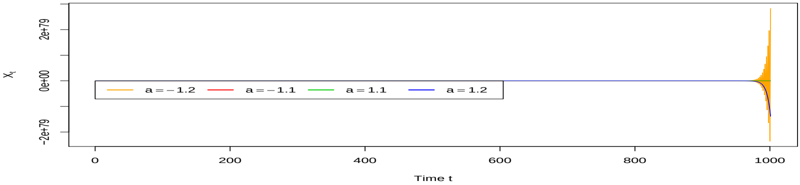
(t.j. lineární kombinaci minulosti posloupnosti $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$)

Příklad: $AR(1)$ proces

- pro parametr $|a| \leq 1$



- pro parametr $|a| > 1$



Příklad: $AR(1)$ proces

- Rozptyl procesu lze spočítat i pomoci soustavy rovníc:

$$EX_tX_{t-1} = aEX_{t-1}^2 + E\varepsilon_t X_{t-1}$$
$$EX_t\varepsilon_t = aEX_{t-1}\varepsilon_t + E\varepsilon_t^2$$

- pak kůli nekorelovanosti ε_t a X_{t-1} máme $EX_{t-1}\varepsilon_t = 0$ a tudíž

$$\begin{aligned}\sigma^2 = E\varepsilon_t^2 = EX_t\varepsilon_t = EX_t(X_t - aX_{t-1}) &= R(0) - aR(1)\\ &= R(0)[1 - ar(1)]\end{aligned}$$

- z první rovnice pak dostaneme

$$R(1) = aR(0) \quad \Leftrightarrow \quad a = R(1)/R(0) = r(1)$$

- pro rozptyl $R(0)$ procesu $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ dostaneme

$$R(0) = \frac{\sigma^2}{1 - a^2} = \frac{\sigma^2}{1 - (r(1))^2};$$

Yule-Walkerovy rovnice

Za předpokladu, že ε_t je nekorelované s $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3} \dots$ (viď také předchozí věta o stacionaritě autoregresní posloupnosti), lze analogicky postup aplikovat i pro obecný autoregresný proces řádu p;

- uvažujme obecný autoregresný proces

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t \tag{12}$$

- rovnici autoregresného procesu vynásobime postupně veličinami $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}$ a aplikujeme operátor stredné hodnoty:

$$\begin{aligned}
EX_tX_{t-1} &= a_1 EX_{t-1}^2 + \cdots + a_p EX_{t-p}X_{t-1} + E\varepsilon_t X_{t-1}\\
EX_tX_{t-2} &= a_1 EX_{t-1}X_{t-2} + \cdots + a_p EX_{t-p}X_{t-2} + E\varepsilon_t X_{t-2}\\
&\quad \dots\dots\dots\\
EX_tX_{t-p} &= a_1 EX_{t-1}X_{t-p} + \cdots + a_p EX_{t-p}^2 + E\varepsilon_t X_{t-p}
\end{aligned}$$

Yule-Walkerovy rovnice

- soustavu rovníc lze ekvivalentně přepsát v maticovem tvaru

$$\begin{pmatrix} R(0) & \dots & R(p-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ R(p-1) & \dots & R(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(1) \\ \vdots \\ R(p) \end{pmatrix}$$

- neboli také pomoci autokorelační funkce $r(\cdot)$ jako

$$\begin{pmatrix} r(0) & \dots & r(p-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ r(p-1) & \dots & r(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(1) \\ \vdots \\ r(p) \end{pmatrix}$$

- pomoci této soustavy lze spočíst hodnoty autokorelační funkce v časech $1, 2, \dots, p$. Pro hodnoty $r(k)$, kde $k > p$ lze využít diferenční rovnici

$$r(k) - a_1 r(k-1) - \dots - a_p r(k-p) = 0,$$

  kterú získame vynásobením rovnice (12) veličinou X_{t-k} a aplikovaním operátoru střední hodnoty;

Výpočet rozptylu pro $AR(p)$

- pro výpočet rozptylu $R(0)$ stačí vynásobit rovnici (12) veličinou ε_t a opět aplikovat operátor střední hodnoty;
- přímočaře dostaneme vyjádření

$$\begin{aligned}\sigma^2 = E\varepsilon_t^2 = EX_t\varepsilon_t &= EX_t(X_t - a_1X_{t-1} - \ldots - a_pX_{t-p}) \\ &= R(0)[1 - a_1r(1) - \ldots - a_pr(p)];\end{aligned}$$

- pro rozptyl $AR(p)$ procesu teda platí, že

$$VarX_t = R(0) = \frac{\sigma^2}{1 - a_1r(1) - \ldots - a_pr(p)};$$

AR(2) Príklad

Príklad

Nechť posloupnost $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum s jednotkovým rozptylem, $\sigma^2 = 1$. Definujme AR(2) proces jako

$$X_t - 0.5X_{t-1} + 0.06X_{t-2} = \varepsilon_t.$$

- Spočtěte střední hodnotu a rozptyl;
- Určete, zda je proces $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ stacionární;
- Pomoci Yule-Walkerových rovnic spočítejte autokorelační funkci;

Zhrnutí/opakování

- Lineárni (stochastické) modely časových řád (MA a AR procesy);
- $MA(1)$: Posloupnost klouzavých průměrů řádu $q \in \mathbb{N}$
  - závislost mezi X_t a X_{t-k} mizne pro $k > q$;
  - obecně je $MA(q)$ proces stacionární (slabě);
  - charakterizace pomoci autokovarianční a autokorelační funkce;
- $AR(p)$: Autoregresní posloupnost řádu $p \in \mathbb{N}$:
  - nenulová autokorelace a mnohem složitější závislostní struktúra;
  - stacionarita pouze pro některé speciální případy (kořeny charakteristického polynomu vně jednotkového kruhu);
  - možnost vyjádřit stacionární AR proces v kauzální formě;
- Yule-Walkerové rovnice
  - výpočetný nástroj pro vyjádření autokovarianční a autokorelační funkce (charakterizace) procesu (časové řady);

Odhad neznámych parametrů

- Yule-Walkerove rovnice lze aplikovat i obráceným způsobem: použit data z procesu a odhadnout neznáme parametry $a_1, \ldots, a_p$ v $AR(p)$ procesu;

- pomoci dat (konkrétní realizace procesu $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$) lze odhadnout hodnoty autokovarianční funkce $\widehat{R}(0), \ldots, \widehat{R}(p)$;

- hodnoty odhadov autokovariančni funkce v daných bodech dosadit do Yule-Walkerových rovníc a řešit pro neznáme parametry $a_1, \ldots, a_p$;

- otázka pouze zůstava, jak správně nebo vhodně určit příslušný řád autokovariančního procesu, parametr $p \in \mathbb{N}$;

  (existují různa kritéria, tzv. "rules-of-thumb", nebo lze použít tzv. "expert judgement", nebo hlubší statistickou analýzu a formální statistické testy)

Konzistence odhadu parametrů

Věta: Konzistence odhadu parametrů v $AR(p)$ procesu

Nechť $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je autoregresní posloupnost řádu $p \in \mathbb{N}$ generovaná modelem

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t,$$

kde $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je poslopnost nezávislých, stejně rozdělených n.v. se střední hodnotou nula a konečným rozptylem $\sigma^2 < \infty$. Nechť všechny kořeny polynomu $d(z) = 1 - a_1 z - \ldots - a_p z^p$ leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině. Nechť $\widehat{\boldsymbol{a}}_n$ je odhad parametrů $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_p)^\top$ pomoci Yule-Walkerových rovníc, založený na pozorováních $X_1, \ldots, X_n$ a odhadech $\widehat{R}(k)$ a $\widehat{r}(k)$, pro $k \geq 0$. Pak platí, že

$$\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{a}}_n - \boldsymbol{a}) \xrightarrow{\mathcal{D}} N_p(\mathbf{0}, \sigma^2 \Gamma^{-1}),$$

kde $\Gamma = (R(i-j))_{ij}$.

Asymptotické rozdelení odhadů parametrů

- konvergence $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ v předchozí větě značí konvergenci v distribuci;
- ekvivalentně je možné také napsat, že platí

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^p}\left|P(\sqrt{n}(\widehat{a}_1 - a_1) \leq x_1, \ldots, \sqrt{n}(\widehat{a}_p - a_p) \leq x_p) - F(x_1, \ldots x_p)\right| \to 0,$$

pro $n \to \infty$, kde $F : \mathbb{R}^p \to [0, 1]$ značí združenú distribuční funkci mnohorozměrného normálního rozdělení $N_p(\mathbf{0}, \sigma^2\Gamma^{-1})$;
- hustota mnohorozměrného normálního rozdělení $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ je definováná:

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^\top\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right\},$$

pro $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_p)^\top \in \mathbb{R}^p$, kde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_p)^\top \in \mathbb{R}^p$ je vektor středních hodnot a Σ pozitívně definitná, symetrická varianční matice;

Odhad autokovarianční/autokorelační funkce

- máme k dispozici konkrétní realizaci časové řady $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ až do nějakého času $n \in \mathbb{N}$ (např. posloupnost $\{x_i;\ i = 1, \dots, n\}$);
- to znamená, že máme k dispozici pozorované hodnoty (realizace) náhodných veličín $X_n, X_{n-1}, \dots X_1$;
- dále také předpokládame, že proces $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je generovaný rovnicí

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t;$$

(je nutné si uvědomit, že hodnota/dimenze $p \in \mathbb{N}$ je (nějak) daná)

- parametre $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ (resp. $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^p$) jsou neznáme;
- **Jak pomoci empirických dat odhadnout parametry $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_p)^\top$?**

Odhad autokovarianční/autokorelační funkce

- v praktických prípadoch je k dispozici pouze konečná história (realizace) časové řady $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$, t.j., pozorování $X_1, \ldots, X_n$ (nebo $x_1, \ldots, x_n$);
- odhad autokovarianční funkce $R(k)$ pro libovolné $k \in \{0, n-1\}$ získame pomoci vztahu

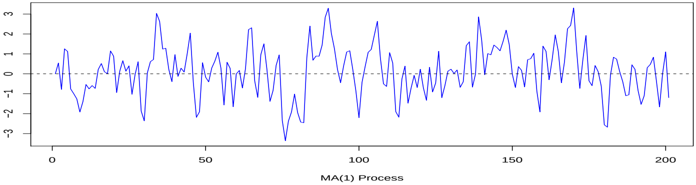
$$\widehat{R}(k) = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} \left(X_{i+k} - \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} X_{j+k} \right) \left(X_i - \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} X_j \right)$$

- odhad príslušné autokorelační funkce $r(k)$ pro libovolné $k \in \{0, n-1\}$ pak získame jako

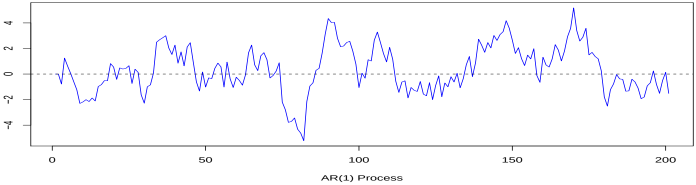
$$\widehat{r}(k) = \frac{\widehat{R}(k)}{\widehat{R}(0)}.$$

Simulace: MA & AR proces prvého řádu

- **MA(1):** $X_t = 0.8\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad | \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$

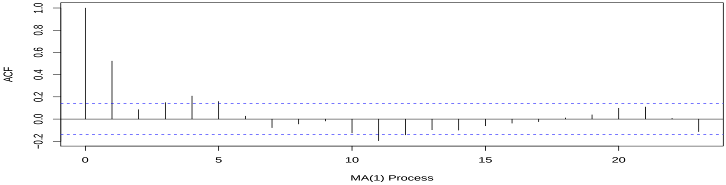


- **AR(1):** $X_t = 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t \quad | \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$:

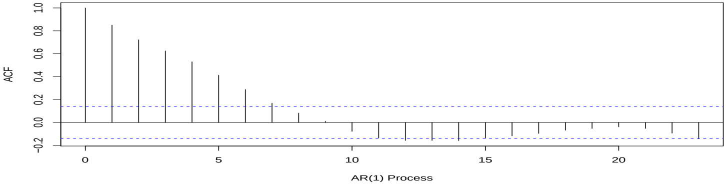


Simulace: Autokorelačná funkce

- **MA(1):** $X_t = 0.8\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad | \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$

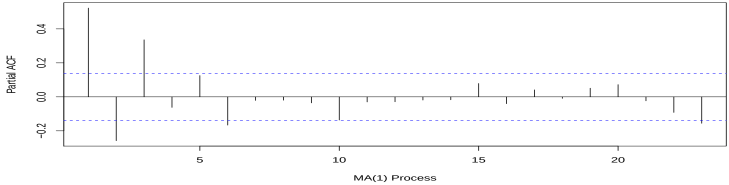


- **AR(1):** $X_t = 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t \quad | \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$:

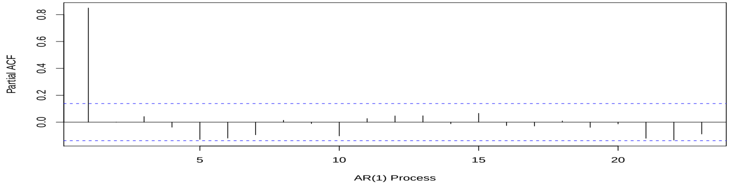


Simulace: Parciální autokorelačná funkce

- **MA(1):** $X_t = 0.8\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad | \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$

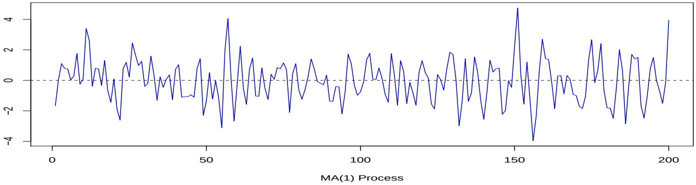


- **AR(1):** $X_t = 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t \quad | \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$:

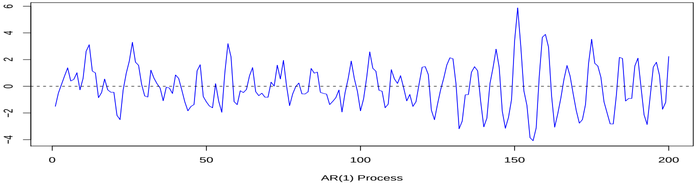


Simulace: MA & AR proces třetího řádu

- **MA(1):** $X_t = 0.8\varepsilon_{t-1} - 0.4\varepsilon_{t-2} - 0.2\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t \quad | \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$

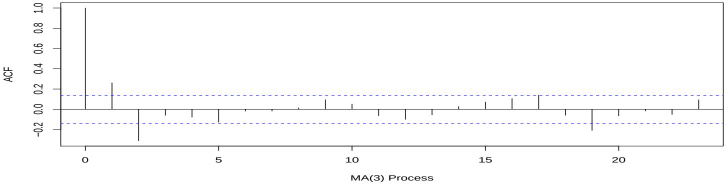


- **AR(1):** $X_t = 0.8X_{t-1} - 0.4X_{t-2} - 0.2X_{t-3} + \varepsilon_t \quad | \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$:

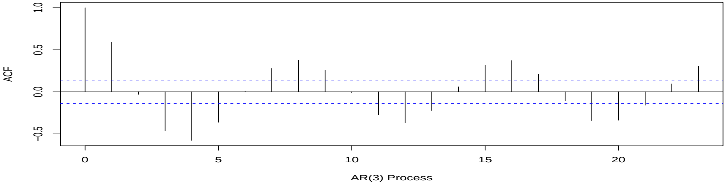


Simulace: Autokorelačná funkce

- **MA(1):** $X_t = 0.8\varepsilon_{t-1} - 0.4\varepsilon_{t-2} - 0.2\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t \quad | \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$

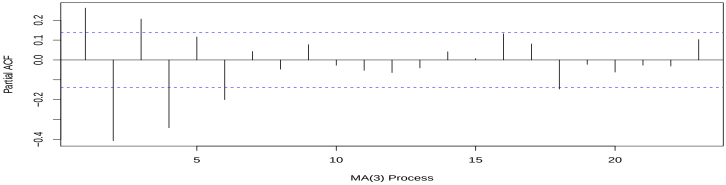


- **AR(1):** $X_t = 0.8X_{t-1} - 0.4X_{t-2} - 0.2X_{t-3} + \varepsilon_t \quad | \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$:

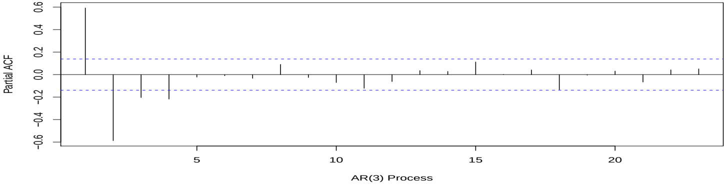


Simulace: Parciální autokorelačná funkce

- **MA(1):** $X_t = 0.8\varepsilon_{t-1} - 0.4\varepsilon_{t-2} - 0.2\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t \quad | \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$



- **AR(1):** $X_t = 0.8X_{t-1} - 0.4X_{t-2} - 0.2X_{t-3} + \varepsilon_t \quad | \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$:



Neúplnost odhadů $\widehat{R}(k)$ a $\widehat{r}(k)$

- odhad autokovarianční funkce $R(k)$ nějaké posloupnosti se nazýva výběrová autokovarianční funkce – používame značení $\widehat{R}(k)$;
- odhad autokorelační funkce $r(k)$ nějaké posloupnosti se nazýva výběrová autokorelační funkce – používame značení $\widehat{r}(k)$;
- pro necentrovanou posloupnost $\{X_t;\ t \in \{1, \ldots, n\}\}$ odhadujeme střední hodnotu $\mu \in \mathbb{R}$ pomoci výběrové střední hodnoty definované

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i;$$

- výberová autokovariační/autokorelační funkce spočetená na základě realizace $X_1, \ldots, X_n$ poskytuje pouze omezenou informaci o celkové kovarianční/korelační struktúře posloupnosti;
- na základě realizace $X_1, \ldots, X_n$ totíž logicky není možné spočítat hodnoty pro $\widehat{R}(k)$ a $\widehat{r}(k)$, kde $k \geq n$;

Zhrnutí/opakování

- Obojsmerné využitie Yule-Walkerových rovníc;
  - autokovariancia/autokorelácia daného procesu;
  - odhad neznámych parametrov predpokladaného modelu;
- Identifikácia správneho modelu na základe realizácie
  - autokovariančná/autokorelačná funkcia (resp. príslušné odhady);
  - parcilna autokovariančná/autokorelačná funkcia;
- Neúplnosť odhadnutej variančnej/kovariančnej štruktúry
  - nenulová autokovariančná štruktúra u MA procesov definovaná pouze pro $k \leq q$, kde $q \in \mathbb{N}$ je zadaný rád MA postúpnosti;
  - nenulová autokovariančná štruktúra u AR procesov obecně pre $\forall k \in \mathbb{N}$, ale odhadnutelná je pouze pro zadaný rád $p \in \mathbb{N}$, t.j., pre $k \leq p$;

Modely $ARMA(p, q)$

- posloupnosti klouzavých průměrů a autoregresních posloupností lze vzájemně kombinovat do tzv. *ARMA* modelů;

Definice: $ARMA(p, q)$ proces

Nechť posloupnost $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum s konečným rozptylem $\sigma^2 < \infty$. Pak náhodnou posloupnost $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ splňujúcu

$$d_0 X_t + d_1 X_{t-1} + \cdots + d_p X_{t-p} = a_0 \varepsilon_t + \cdots + a_q \varepsilon_{t-q}, \qquad (13)$$

pro $t \in \mathbb{Z}$ a nějaké koeficienty $d_0, \ldots, d_p, a_0, \ldots, a_q \in \mathbb{R}$, takové, že $d_0, d_p, a_0, a_q \neq 0$, nazývame $ARMA(p, q)$ model.

- podobně jako v předchozích případech nás zajíma, za akých předpokladů bude $ARMA(p, q)$ posloupnost splňovat definici stacionarity (slabě);
- ekvivaletní zápis $ARMA(p, q)$ modelu lze vyjádřit pomoci vztahu

$$X_t = \tilde{d}_1 X_{t-1} + \cdots + \tilde{d}_p X_{t-p} + \tilde{a}_0 \varepsilon_t + \cdots + \tilde{a}_q \varepsilon_{t-q};$$

Stacionarita $ARMA(p,q)$ procesů

- předpokládejme, že v rovnicí (13) je $d_0 = a_0 = 1$ a definujeme polynomy

$$d(z) = 1 + d_1 z + \cdots + d_p z^p, \qquad n(z) = 1 + a_1 z + \cdots + a_q z^q; \tag{14}$$

Věta: Stacionarita $ARMA(p,q)$ modelů

Nechť všechny kořeny polynomu $d(z)$ leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině a navíc, nechť jsou polynomy $d(z)$ a $n(z)$ nesoudělné, t.j. nemají společné kořeny. Pak je posloupnost definovaná rovnici (13) slabě stacionární, s nulovou střední hodnotou, a navíc, lze proces $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ vyjádřit v kauzálním tvaru, t.j.

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{t-k},$$

kde $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ jsou určený vztahem $c(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \frac{n(z)}{d(z)}$, pro $|z| \leq 1$.

Autokovariance/autokorelace *ARMA* procesů

- pokud by polynomy $d(z)$ a $n(z)$ měly společné kořeny, potom by polynom $c(z) = n(z)/d(z)$ určoval $ARMA(m,n)$ proces, pro $m < p$ a $n < q$;
- autokovarianční funkce stejně tak jako autokorelační funkce obecného $ARMA(p,q)$ procesu se spočte analogicky, jako v případe $AR(p)$ procesů, pomoci Yule-Walkerových rovníc.

Samostatný úkol

Uvažujte obecný $ARMA(1,1)$ proces, definovaný předpisem

$$X_t + aX_{t-1} = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1},$$

pro $t \in \mathbb{Z}$, kde $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum.

- definujte podmínky pro které je posloupnost $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ slabě stacionární;
- nájděte autokovarianční a autokorelační funkci posloupnosti $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$;
- pokud existuje, nájděte kauzální vyjádření procesu $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$;

Lineární filtrace

Definice: Lineární filtrace/Linerní filtr

Nechť $\{\varepsilon;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je centrovaná, slabě stacionární posloupnost a $\{\xi_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost koeficientů takových, že $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\xi_k| < \infty$. Pak řekneme, že posloupnost

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \varepsilon_{t-k}$$

vznikla lineární filtraci z posloupnosti $\{\varepsilon;\ t \in \mathbb{Z}\}$.
Posloupnost koeficientů $\{\xi_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ se nazýva lineární filtr.

Definice: Kauzální filtr

Nechť $\{\xi_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ je lineární filtr. Pokud platí, že $\xi_k = 0$ pro $k < 0$, pak je filtr kauzální, t.j. fyzikálně uskutečnitelný.

Lineární modely, procesy, systémy...

Definice: Lineární proces

Náhodnou posloupnost $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ nazýváme lineárním procesem, pokud existuje posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličín ε_t, pro $t \in \mathbb{Z}$, s nulovou střední hodnotou a konečným rozptylem a lineární filtr $\{\xi_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ takový, že

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k \varepsilon_{t-k}.$$

Lineární proces je navíc kauzální, pokud je příslušný filtr kauzální.

- *ARMA*(p, q) model je ekvivalentní s obecnou rovnicí lineárního systému (viď Kapitola 3). Rovnice *ARMA* modelu ale určuje vztah nikoli mezi nenáhodnými (deterministickými) posloupnostmi vstupů a výstupu, ale mezi náhodnými posloupnostmi bílého šumu a *ARMA* procesem $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$.

Invertibilita *ARMA* posloupnosti

Definice: Invertibilita *ARMA* posloupnosti

Stacionární $ARMA(p,q)$ posloupnost $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ vzniklá z bílého šumu $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$, se nazýva invertibilní, jestliže existuje posloupnost konstant $\{\psi_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ taková, že $\sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k| < \infty$ a platí, že

$$\varepsilon_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k X_{t-k}.$$

- z pohledu posloupnosti $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ by se dalo říct, že se jedná o kauzální posloupnost vzhledem k posloupnosti $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$;

Příklad: Striktná versus slabá stacionarita

Samostatný úkol

Nechť je posloupnost $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ definovaná předpisem

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

pro $|\rho| < 1$ a posloupnost $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je daná předpisem

$$\varepsilon_t = \begin{cases} Z_t & t = 2k, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_t^2 - 1) & t = 2k+1, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

kde $\{Z_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličín s normovaným normálním rozdělením $N(0,1)$.

- Rozhodněte, zda je posloupnost $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ striktně stacionární.
- Rozhodněte, zda je posloupnost $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ slabě stacionární.
- Spočtěte autokovarianční funkci posloupnosti $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$.

Invertibilita *ARMA* posloupnosti

Věta: Invertibilita *ARMA* procesů

Nechť $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je stacionární $ARMA(p,q)$ posloupnost, definovaná rovnici (13), pro $d_0 = a_1 = 1$. Nechť polynomy $d(z)$ a $n(z)$ definovane vztahy (14) nemají společné kořeny a navíc, nechť kořeny polynomu $n(z)$ leží vně jednotkového komplexního kruhu. Pak je posloupnost $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ invertibilní a lze psát

$$\varepsilon_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k X_{t-k},$$

pro $k \in \mathbb{Z}$, kde koeficienty ψ_k jsou určený vztahem

$$\Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^k = \frac{d(z)}{n(z)},$$

pro $|z| \leq 1$.

Lineární predikce v časových řadách

- pomerně častý praktický problém v časových řadách je predikce;
- predikce/předpověď budoucích hodnot na základě pozorované realizace;
- z teoretického hlediska se jedná o pomerně náročnou úlohu, která vede na podmíněné střední hodnoty...
- **Jak to ale funguje v praxi?**

Lineární predikce v časových řadách

- pomerně častý praktický problém v časových řadách je predikce;
- predikce/předpověď budoucích hodnot na základě pozorované realizace;
- z teoretického hlediska se jedná o pomerně náročnou úlohu, která vede na podmíněné střední hodnoty...
- **Jak to ale funguje v praxi?**

- Jednoduchý příklad: predikce pozorování X_{t+1} na základě realizace X_t (predpověď o jeden krok dopředu na základě jediného pozorování);
- požadovaná predikce pro X_{t+1} je lineární, t.j. $\widehat{X}_{t+1} = a + bX_t$;
- navíc předpokládame, že $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je slabě stacionární;
- kvalita predikce pomoci střední kvadratické chyby mezi X_{t+1} a $\widehat{X}_{t+1}$; *(chceme minimalizovať strednú kvadratickú chybu $E[X_{t+1} - \widehat{X}_{t+1}]^2$)*

Predikce X_{t+1} formálně

- z formálneho/matematického hlediska teda řešíme minimalizační problém

$$\min_{a,b\in\mathbb{R}} E\left[X_{t+1}-(a+bX_t)\right]^2 = \min_{a,b\in\mathbb{R}} E\left[X_{t+1}-\mu-\tilde{a}-b(X_t-\mu)\right]^2,$$

  kde $\tilde{a} = a+\mu(b-1)$;
- derivováním podle $\tilde{a}$ a b (a formálna záměna integrálu a derivace):

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{a}} : -2E\left[X_{t+1}-\mu-\tilde{a}-b(X_t-\mu)\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b} : -2E\left[X_{t+1}-\mu-\tilde{a}-b(X_t-\mu)\right](X_t-\mu) = 0$$

- z první rovnice dostaneme okamžitě, že $\tilde{a} = 0$;
- z druhé rovnice pak dostaneme, že

$$b = \frac{R(1)}{R(0)} = r(1);$$

- Predikce: $\widehat{X}_{t+1} = a+bX_t = \mu+b(X_t-\mu) = \mu+r(1)(X_t-\mu)$;

Predikce X_{t+1} formálně

- kvalita predikce sa obecně posuzuje pomoci střední kvadratické chyby/odchýlky, t.j.

$$\begin{aligned} MSE &= E(X_{t+1} - \widehat{X}_{t+1})^2 = E\left[X_{t+1} - \mu - r(1)(X_t - \mu)\right]^2 \\ &= R(0)\left[1 + r(1)^2 - 2r(1)^2\right] = R(0)(1 - r(1)^2); \end{aligned}$$

- čím silnější je lineární závislost mezi X_t a X_{t+1}, tím menší je chyba predikce (t.j., přesnější předpověď);
- obecně lze postup zobecnit na úlohu najít predikci pro X_{t+1}, na základě pozorovnání $X_t, X_{t-1}, \ldots X_{t-p}$;
- následně je samozřejme možné použít predikci $\widehat{X}_{t+1}$ a spočíst další predikci pro nasledujíci krok X_{t+2};

Příklad: predikce na základě X_t a X_{t-1}

Samostatný úkol

Předpokládejme, že posloupnost $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je slabě stacionární.

- spočtěte obecný vztah pro predikci pozorování X_{t+1} na základě hodnot X_t a X_{t-1};
- jako kritérium kvality predikce použijte střední kvadratickú chybu/odchýlku;

Samostatný úkol

- Uvažujte model $ARMA(2,1)$ daný předpisem

$$X_t - 0.5X_{t-1} + 0.04X_{t-2} = \varepsilon_t + 0.25\varepsilon_{t-1},$$

pro $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ bílý šum. Nájděte autokovarianční a autokorelační funkci procesu a jeho kauzální vyjádření.

Kauzalita a invertibilita *ARMA* procesů

Samostatný úkol

Nechť $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je $ARMA(2,1)$ posloupnost definovaná rovnici

$$X_t - (a+b)X_{t-1} + abX_{t-2} = \varepsilon_t - a\varepsilon_{t-1},$$

kde $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum. Diskutujte podmínky kauzality a invertibility vzhledem k neznámym parametrům $a, b \in \mathbb{R}$.

Spočtěte autokovarianční a autokorelační funkci posloupnosti $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$.

Zhrnutí/opakování

- Lineárni (stochastické) modely časových řád: *MA*, *AR* a *ARMA* procesy; *(náhodné procesy vytvorené z bílého šumu, indexováný nejvýše spočetnou množinou indexů T - napr. množinou celých čísel $\mathbb{Z}$)*
- Základná charakterizace procesů:
  - střední hodnota procesu $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$: $\mu_t = EX_t$;
  - rozptyl procesu$\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$: $\sigma^2(t) \equiv R(0, t)$;
  - autokovarianční a autokorelační funkce $R(k, t)$ a $r(k, t)$;
- Další vlastnosti modelů časových řád:
  - silná (striktní) a slabá stacionarita $(\mu, \sigma^2, R(k), r(k))$;
  - kauzálnost a invertibilita procesu;
  - lineárni filtrace;
- Využití v praktických (reálných úlohach):
  - modelování procesů a odhadování koeficientu pomoci Yule-Walkerových rovníc (konzistentní odhady);
  - lineární predikce v časových řadách (předpověď nasledujících pozorování na základě tých předchozích);
- V praxi sa často používaju komplexnejšie modely...
  - napr. VARMA, NARMA, ARIMA, VARIMA, ARCH, GARCH, etc.;

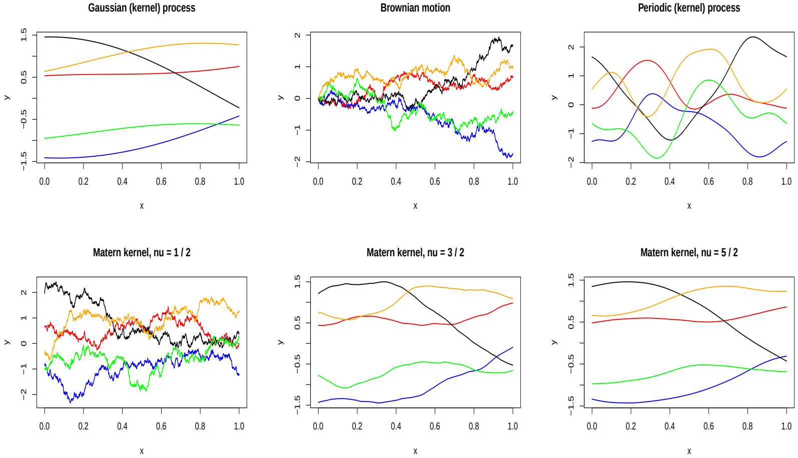
Kapitola 6

Poissonův proces

Náhodné procesy se spojitým časem

- **Stochastický (náhodný) proces**
  $\hookrightarrow$ posloupnost (systém) reálných náhodných veličín $\{X_t;\ t \in T\}$ definovaných na stejném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$;
- **Proces so spojitým časem**
  $\hookrightarrow$ v případě, že $T \subseteq \mathbb{R}$, pak říkame, že se jedná o proces se spojitým časem, t.j., hodnota procesu $\{X_t;\ t \in T\}$ je definována v každém časovém okamžiku;
- **Trajektórie procesu**
  $\hookrightarrow$ pro konkrétne $\omega \in \Omega$ (elementární jev) je $X_t(\omega) \equiv X(\omega)(t)$ funkce definována na $T \subset \mathbb{R}$ (t.j., trajektórie procesu – jedna konkrétní realizace);

Trajektórie rôznych procesov



Čítací proces

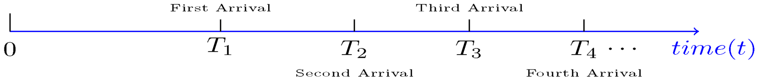
Definice: Čítací proces

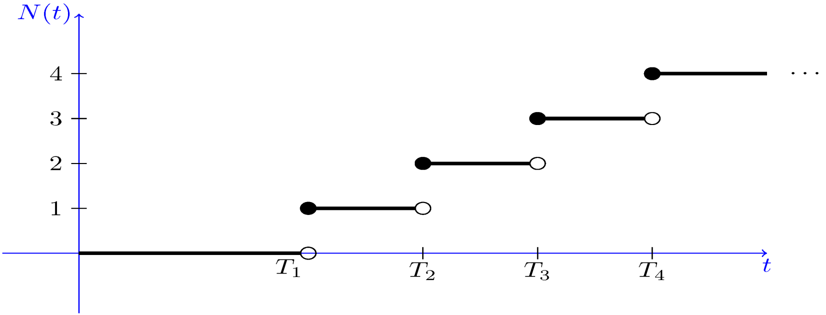
Řekneme, že náhodný proces $\{N_t;\ t \geq 0\}$ (proces se spojitím časem) je čítací proces, pokud nabýva celočíselných nezáporných hodnot a zároveň platí, že

$$\text{pokud} \quad s \leq t \qquad \Longrightarrow \qquad N(s) \leq N(t).$$

- Hodnotu $N(t)$ interpretujeme jako počet událostí, které nastaly do času t.
- Ekvivalentně lze proces $\{N_t;\ t \geq 0\}$ definovat jako proces, který ma zprava spojité a neklesající trajektorie, nabýva pouze celočíselných hodnot, a začina z nezáporne hodnoty, t.j. $N(0) \geq 0$;

Trajektórie čítacieho procesu





Prírastky procesu a nezávislé přírůstky

- Pro náhodný (čítací) process $\{N_t;\ t \geq 0\}$ a pre libovolné dva časové okamžiky $t_1, t_2 \geq 0$ takové, že $t_1 < t_2$, představuje náhodná veličina

$$N(t_2) - N(t_1) \geq 0$$

tzv. prírastok náhodného procesu medzi časem t_1 a časem t_2.

Definice: Nezávislé přírůstky

Řekneme, že proces $\{N(t); t \geq 0\}$ má nezávislé přírůstky, pokud pro každé $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, $n \in \mathbb{N}$ a $t_i \in T$ pro $i = 1, \ldots, n$ platí, že $N(t_n) - N(t_{n-1}), \ldots, N(t_1) - N(t_0)$ jsou nezávislé náhodné veličiny.

Poissonův (čítací) proces

Definice: Poissonův proces

Náhodný čítací proces $\{N(t);\ t \geq 0\}$ se nazývá homogénní Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$, pokud platí:

- $N(0) = 0$;
- proces má nezávislé přírůstky;
- přírůstky $N(t+h) - N(t)$ mají Poissonovo rozdělení s parametrem λh;

- nezávislé přírůstky Poissonovho procesu mají Poissonovo rozdělení s parametrem, který je přímo úměrný délce časového intervalu;
- parameter intenzity, $\lambda > 0$, je střední počet události za jednotku času;
- souvislost Poissonovho rozdělení s limitním binomickým rozdělením;

Poissonov proces v aplikáciach

- **Poissonův proces je často interpretován jako nahodný bodový proces na reální přímce (půlpřímce);**
- **Na reální přímce je Poissonův proces speciálním případem Markovského procesu se spojitým časem (Markovská vlastnost);**
- **V praxi často používaný náhodný proces pro modelování náhodných (a na sobě nezávislých) událostí v čase;**
    - počty pojistných událostí, systémy obsluhy, atď.;
    - chování zákazníků, modelování chyb a poruch, atď.;
- **Existuje mnoho různych a užitečných zobecnění Poissonova procesu;**
    - nehomogénný Poissonův proces s variabilní intenzitou $\lambda(t)$;
    - prostorový Poissonův proces (mnohorozměrná zobecnění);
    - procesy obnovy/zrodu a zániku (tzv. “renewal” a “birth-death” procesy);
    - značkované Poissonové procesy – napr. Cox proces;
    - procesy pro zavislé události v čase – tzv. Hawkesové procesy;
    - mnohe další...

Příklad: Poissonův proces

Príklad

Telefonní ústředna a počet hovoru
Jednotlivé přichozí volání jsou na sobě nezávislé. Potenciálne je ale velký počet lidí, kteří mohou zavolat, ale u každého jednotlivce se jedná pouze o hodně malou pravděpodobnost, že skutečne zavolá na ústřednu. Z historických dat např. víme, že na telefonní ústřednu příjde v průměru 5 hovorů za minútu.

- Jaká je pravděpodobnost, že za půl minúty nepříde žádne volání?
- Jaká je pravděpodobnost, že během pět sekud příjde alespoň 2 volání?

- pro Poissonův proces obecně platí, že $N(0) = 0$, proto také platí, že

$$N(t) = N(t) - N(0) \sim Po(\lambda t)$$

a proto také platí, že

$$P[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad \text{pro } k = 0, 1, \ldots .$$

Doby mezi událostmi v Poissonovém procesu

Věta: Doby mezi událostmi v Poissonovém procesu

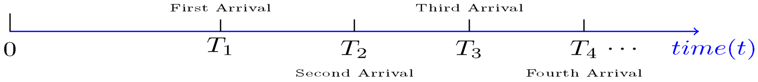
Nechť $\{N(t);\ t \geq 0\}$ je Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$ a nechť $\{\xi_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost náhodných veličín definovaná předpisem

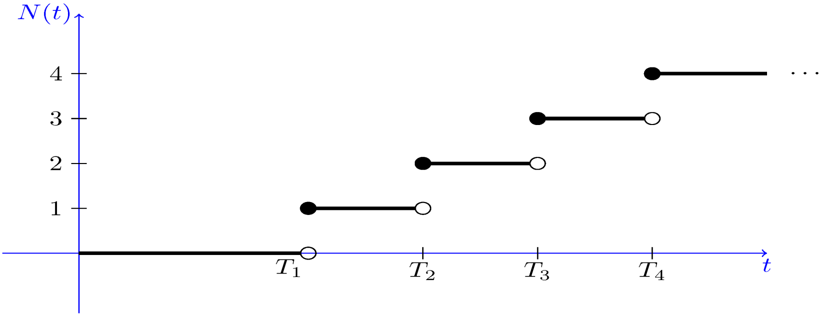
$$\xi_n = \inf\{t > 0;\ N(t) = n\}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Pak náhodné veličiny $T_n = \xi_n - \xi_{n-1}$, pro $n = 1, 2, \ldots$, pro $\xi_0 = 0$, jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda > 0$ a nazývají se doby mezi událostmi v Poissonovém procesu $\{N(t);\ t \geq 0\}$.

- **Idea:** platí $P[\xi_k > t] = P[N(t) < k]$ a dokonce i $\{\omega;\ \xi_k(\omega) > t\} \equiv \{\omega;\ N(\omega)(t) < k\}$

Doby mezi událostmi





Exponenciální a Erlangovo rozdělení

- náhodná veličina ξ_n pro $n \in \mathbb{N}$ se nazýva doba do n-té události;
- náhodná veličina ξ_n pro $n \in \mathbb{N}$ má Erlangovo rozdělení s hustotou

$$f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad \text{pro } x \geq 0.$$

- Erlangovo rozdělení s parametrami $\lambda > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ je rozdělení součtu n nezávislých náhodných veličín s exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda > 0$ a jedná se o speciální případ Gamma rozdělení;
- Exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda > 0$ je rozdělení bez paměti, t.j., pro $X \sim Exp(\lambda)$ platí, že

$$P[X > s + h | X > s] = P[X > h].$$

Poissonův proces a exponenciální rozdělení

Věta: Exponenciální rozdělení a Poissonův proces

Nechť $T_1, T_2, \ldots,$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličín s exponenciálním rozdělením s parametrem $\lambda > 0$. Nechť $\xi_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$. Pak

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{\xi_k \leq t\}}$$

definuje Poissonův proces s intenzitiou $\lambda > 0$.

- pokud teda známe počet události do nějakého času $T > 0$, pak je výskyt těchto události v intervalu $[0, T]$ tzv. "binomický", t.j., časy událostí jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, T]$;

Příklad: Binomická vlastnost

Príklad

Nechť $\{N(t);\ t \geq 0\}$ je Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$ a nechť $N(T) = n$ a $s \in (0, T)$. Pak jednoduchým výpočtom dostaneme

$$\begin{aligned} P[N(s) = k | N(T) = n] &= \frac{P[N(s) = k, N(T) = n]}{P[N(T) = n]} \\ &= \frac{P[N(s) = k, N(T) - N(s) = n - k]}{P[N(T) = n]} \\ &= \frac{P[N(s) = k] \cdot P[N(T) - N(s) = n - k]}{P[N(T) = n]} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{s}{T}\right)^k \left(1 - \frac{s}{T}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

- Žádna část intervalu $[0, T]$ není preferována a každý podinterval má rovnakú šancu (úměrnou své délce), že do něj padne událost. Body jsou do intervalu $[0, T]$ umistňovány nezávisle na sobě.

Poissonův proces s konstantní intenzitou

- Pro obecný Poissonův proces $\{N(t);\ t \geq 0\}$ s konstantní intenzitou $\lambda > 0$ také platí nasledujíci:
  - $P[N(t+h) = n+1 | N(t) = n] = \lambda h + o(h)$
  - $P[N(t+h) = n | N(t) = n] = 1 - \lambda h + o(h)$
  - $P[N(t+h) > n+1 | N(t) = n] = o(h)$

  pro funkci $o(h)$ takovou, že

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{o(h)}{h} \to 0.$$

Samostatný úkol

Ověřte, že uveděné vlastnosti skutečne platí pro obecný (homogenný) Poissonův proces s konstantní intenzitou $\lambda > 0$.

Příklad: Škody v neživotnem pojištění

Príklad

Předpokládáme, že okamžiky pojistných události v čase tvoří Poissonův proces $\{N(t);\ t \geq 0\}$ s konstantní intenzitou $\lambda > 0$ a výše škod Y_k pro $k \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou $EY_k = \mu$.

- $S(t) = \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k$, pro $t \geq 0$ a $Y_0 = 0$ je tzv. složený Poissonův proces;
- veličina $S(t)$ udáva celkovou výši škod do času $t \geq 0$ a platí

$$ES(t) = E\Big[E[S(t)|N(t)]\Big] = E\left[E\left[\sum_{k=0}^{N(t)} Y_k|N(t)\right]\right]$$

$$= E\Big[N(t) \cdot EY_k\Big] = EY_k \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\right) = \lambda t\mu;$$

K úhradě škodních nákladů by pojišťovna měla dostávat od pojištěných klientů pojistné ve výši $\lambda\mu$ za jednotku času.

Zhrnutí předchozí přednášky/opakování

- **Poissonov proces**;
  - stochastický proces se spojitým časem a dikrétnymi stavy;
  - čítací proces (počet událostí) s počátkem v bodě nula;
  - nezávislé přírůstky s Poissonovým rozdelením;
- **Doby mezi událostmi v Poissonovém procesu**
  - nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením;
  - souvislost mezi Poissonovým a exponenciálním rozdělením;
  - exponenciální rozdělení, Erlangovo rozdělení, Gamma rozdělení;
- **Široké využití v praxi**
  - modelování různých systému obsluhy;
    (intenzita příchodu zákazníkov a intenzita obsluhy zákazníkov)
  - pojistné modely, modelování škodových událostí;
    (modelování výskytu pojistných události, vyplácení pojistného plnění)
  - využití v komplexných pravděpodobnostných modelech;
    (napr. prostorové Poissonové modely, složené modely, atď.)

Příklad: Systém obslužní linky

Príklad

Uvažujme obslužní linku, která poskytuje určitou službu (např., pokladna v obchodě, telefonní linka, ...). Chceme modelovat chování takového systému.

- předpokládame, že události (t.j., např. příchody zákazníků) v systému tvoří Poissonův proces s konstantní intenzitou $\lambda > 0$;
- když je linka obsazená, tvoří se fronta;
- doby obsluhy jednotlivých zákazníků jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem $\mu > 0$;
- veličina $X(t)$ značí počet zákazníků v systému (ve frontě a při obsluhe);
- označme $p_k(t) = P[X(t) = k]$, pro $k = 0, 1, \ldots$;
- předpokládame, že také platí nasledujíci:

$$P(X(t+h) = k+1 | X(t) = k) = \lambda h + o(h)$$
$$P(X(t+h) = k | X(t) = k) = 1 - \lambda h + o(h)$$
$$P(X(t+k) > k+1 | X(t) = k) = o(h)$$

Příklad: Systém obslužní linky

Príklad

- pro doby obsluhy pak platí: $T \sim Exp(\mu)$ a proto také platí:

$$\begin{aligned}
P(\text{obsluha skončí v čase } (t, t+h] | \text{zákazník je obsluhován v čase } t) &= \mu h + o(h)\\
P(\text{obsluha neskončí v čase } (t, t+h] | \text{zákazník je obsluhován v čase } t) &= 1 - \mu h + o(h)\\
P(\text{více zákazníku obslouženo v } (t, t+h] | \text{zákazník je obsluhován v čase } t) &= o(h)\\
P(\text{přijde a odejde stejný počet v } (t, t+h] | \text{zákazník je obsluhován v čase } t) &= o(h)
\end{aligned}$$

Samostatný úkol

Použijte vlastnosti exponenciálního rozdělení s parametrem $\mu > 0$, aplikujte Taylorův rozvoj a odvoďte vztahy uvedené v příkladu nahoře.

Příklad: Systém obslužní linky

Príklad

- obecně můžeme psát, že v systému obslužní linky (model pro příchod a obsluhu zákazníku) nastane v intervalu $(t, t+h)$ jedna změna (t.j. přijede jeden zákazník nebo odejde jeden zákazník) s pravděpodobnosti
$$\mu h + \lambda h + o(h);$$
- pravděpodobnost, že v takomto systému nenastane v časovém intervalu $(t, t+h)$ zádna změna (nový zákazník nepříde a zádny nebude obslužen) je
$$1 - (\mu h + \lambda h) + o(h);$$
- pravděpodobnost, že v systému dojde v časovém intervalu $(t, t+h)$ k nějaké jiné změně (např. přijede více zákazníku, nebo více zákazníku bude obslouženo, nebo zaroveň alespoň jeden přijede a alespoň jeden bude obslužen) je zanedbatelná, t.j. řádu $o(h)$;

Příklad: Systém obslužní linky

Príklad

- zajíma nás limitní chování pravděpodobnosti

$$p_k(t) = P[X(t) = k],$$

pro $t \to \infty$;

- Jaké je limitní rozdělení zákazníků v systému?
  (hromadí se zákazníci ve frontě, nebo je systém prázdny?)

- Příklad lze řešit pomoci soustavy diferenciálních rovníc...
- ... budeme uvažovat samostatně případ pro $k = 0$ a $k = 1, 2, \ldots;$

Řešení pomoci diferenciálních rovníc

- pro $k = 0$ dostaneme:

$$p_0(t+h) = p_0(t)(1 - \lambda h + o(h)) + p_1(t)(\mu h + o(h)) + \sum_{j=2}^{\infty} p_j(t)o(h)$$

Řešení pomoci diferenciálních rovníc

- pro $k = 0$ dostaneme:

$$p_0(t+h) = p_0(t)(1 - \lambda h + o(h)) + p_1(t)(\mu h + o(h)) + \sum_{j=2}^{\infty} p_j(t)o(h)$$

- pro $k = 1, 2, \ldots$ dostaneme:

$$\begin{aligned} p_k(t+h) = \sum_{j=0}^{k-2} p_j(t)o(h) + p_{k-1}(t)(\lambda h + o(h)) \\ + p_k(t)(1 - \lambda h - \mu h + o(h)) \\ + p_{k+1}(t)(\mu h + o(h)) + \sum_{j=k+2}^{\infty} p_j(t)o(h) \end{aligned}$$

Řešení pomoci diferenciálních rovníc

- algebraickou úpravou a limitním přechodem pro $h \to 0_+$ dostaneme diferenciální rovnici pro $k = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

Řešení pomoci diferenciálních rovníc

- algebraickou úpravou a limitním přechodem pro $h \to 0_+$ dostaneme diferenciální rovnici pro $k = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

- algebraickou úpravou a limitním přechodem pro $h \to 0_+$ dostaneme diferenciální rovnice pro $k = 1, 2, \ldots$:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_k(t) = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + \mu) p_k(t) + \mu p_{k+1}(t)$$

Řešení pomoci diferenciálních rovníc

- Pokud existuje limita $lim_{t \to \infty} p_k(t)$, pak musí platit

$$0 = -\lambda p_0(\infty) + \mu p_1(\infty)$$
$$0 = \lambda p_{k-1}(\infty) - (\lambda + \mu) p_k(\infty) + \mu p_{k+1}(\infty)$$

- Soustava rovníc, jejíž řešením je

$$p_k(\infty) = \rho^k p_0(\infty),$$

kde $\rho = \lambda / \mu$;

- Zároveň musí platit, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(\infty) = 1,$$

jelikož se jedná o pravděpodobnostní rozdělení na množine $\{0, 1, 2, \ldots, \}$; (limitné rozdělení teda existuje pro $\rho < 1$ a ide o geometrické rozdělení s parametrem $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$)

Sjednocení nezávislých Poissonových procesů

- Generická vlastnost Poissonového rozdelení:

$$N_1 \sim Poiss(\lambda_1) \wedge N_2 \sim Poiss(\lambda_2) \quad \Longrightarrow N_1 + N_2 \sim Poiss(\lambda_1 + \lambda_2)$$

- Analogický aj pro Poissonov proces

Pro $\{N_1(t);\ t \geq 0\}$ a $\{N_1(t);\ t \geq 0\}$ dva nezávislé homogénní Poissonové procesy s intenzitou $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 > 0$, pak aj

$$\{N_1(t) + N_2(t);\ t \geq 0\}$$

je homogénní Poissonov proces s príslušnou intenzitou $\lambda_1 + \lambda_2$;

Samostatný úkol

Ukážte, že Poissonov proces $\{N_1(t) + N_2(t);\ t \geq 0\}$ definovaný jako součet dvou vzájemně nezávislých homogénních Poissonových procesů s intenzitami $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 > 0$ splňuje vlastnosti Poissonového procesu.

Zobecnění pro více procesů

- Zjednocení dvou nezávislých Poissonových procesů lze samozrejme zobecnit na více než dva procesy;

- Obecně, pro $m \in \mathbb{N}$ vzájemně nezávislých homogénních Poissonových procesů $\{N_1(t);\ t \geq 0\}, \ldots, \{N_m(t);\ t \geq 0\}$ s intenzitami $\lambda_j > 0$ pro $j = 1, \ldots, m$ platí, že

$$N(t) = N_1(t) + \cdots + N_m(t)$$

je opět Poissonov proces s příslušnou intenzitou

$$\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m.$$

Samostatný úkol

Ukážte, že Poissonov proces $\{N_1(t) + \cdots + N_m(t);\ t \geq 0\}$ definovaný jako součet m vzájemně nezávislých homogénních Poissonových procesů s intenzitami $\lambda_j > 0$ pro $j = 1, \ldots, m$, splňuje vlastnosti Poissonového procesu.

Nezávislost a podmíněná závislost

- Nechť $\{N(t);\ t \geq 0\}$ je Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$;
- Události v procesu náhodne označíme dvěma různymi nálepkami...
- S pravděpodobnosti $p \in (0,1)$ označíme událost nálepkou A;
  (výskyt události typu A tvoří čítací proces $\{N_1(t); t \geq 0\}$)
- S pravděpodobnosti $(1-p)$ označíme událost nálepkou B;
  (výskyt události typu B tvoří čítací proces $\{N_2(t); t \geq 0\}$)

Věta: Nezávislost rozděleného Poissonového procesu

Čítací procesy $\{N_1(t); t \geq 0\}$ a $\{N_2(t);\ t \geq 0\}$ jsou vzájemně nezávislé homogénní Poissonové procesy s příslušnými intenzitami $\lambda_1 = \lambda p$ a $\lambda_2 = \lambda(1-p)$.

Nezávislost a podmíněná závislost

- Poissonové procesy $\{N_1(t); t \geq 0\}$ a $\{N_2(t); t \geq 0\}$ jsou dle předchozí věty združeně nezávislé;

- Podmíněně, při daném stavu procesu $\{N(t); t \geq 0\}$, jsou ale procesy $\{N_1(t); t \geq 0\}$ a $\{N_2(t); t \geq 0\}$ vzájemně závislé;

Samostatný úkol

Ukážte, proč jsou procesy $\{N_1(t); t \geq 0\}$ a $\{N_2(t); t \geq 0\}$ při danem $N \in \mathbb{N}$ podmíněně závislé. Dokonca jeden proces zcela určuje ten druhý.

Různá zobecnění Poissonového procesu

- zobecnění Poissonového procesu v neeuklidovských prostorech;
  (fundamentalní nástroj v pravděpodobnosti, teórii míri a topológii)
- dvojitě stochastický Poissonův proces (Coxův proces);
  (Poissonův proces s náhodnou intenzitiou - funkci $\Lambda(t)$)
- složený Poissonův proces (tzv. marked process);
  (událost v čase ma vlastní náhodnou hodnotu)
- Poissonův proces se závislými přírastkami (Hawkesův proces);
  (homogénny nebo nehomogénný, tzv. “self-exciting stochastický process“)
- tzv. compound Poissonův proces;
  (Poissonův process jako součet několika složených Poissonových procesů)
- mnohé další zobecnění a speciální případy;
  (užitečný nástroj pro pravděpodobnostní teórii a stochastické modelování)

K čomu je to všetko dobré?

To conclude...

Závěrečné zkoušky

Zkouškové termíny

Celkovo je v SISe vypísaných $3 + 1$ termínov. Prihlasovanie na konkrétny termín je nutné prostredníctvom systému SIS. Jeden termín bude vypísaný v září.

Závěrečná zkouška pozostáva z dvou časti:

- **První část zkoušky**
  $\hookrightarrow$ samostatna písomná práca, teoretické a praktické úlohy v rozsahu odprednášanej látky (2×90 minút (?));

- **Druhá část zkoušky**
  $\hookrightarrow$ ústní zkouška pouze v případě vypracování písemné části na úrovni alespoň 50 % (individuálne, podle uvážení (?));

Zkouškové termíny

- **1. Termín:** Středa | 18.05.2022
  (Posluchárna Praktikum KPMS) | 9:00)
- **2. Termín:** Středa | 25.05.2022
  (Posluchárna K11) | 9:00)
- **3. Termín:** Čtvrtek | 09.06.2022
  (Posluchárna K11) | 9:00)

- **4. Termín:** Září 2022
  (dodatečne bude upřesněno)

Na konkrétný zkouškový termín je nutný zápis prostredníctvom elektronického systému SIS (nejpozději jeden den před zkouškou!