

# NMFM332 – Statistika pro finanční matematiky 2

## Lineární soustavy

Cvičení 4 | 20.03.2023

**Příklad 1:** Rozložte na parciální zlomky následující lomené funkce:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x-7}{x^2+x-2} \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^2-7}{x^2-6x+9} \quad \text{c) } f(x) = -\frac{5x+1}{(x^2-1)(x-1)}$$

**Příklad 2:** Určete z-transformace následujících posloupností:

$$\text{a) } \{f_k\} = I(0); \quad \text{b) } \{f_k\} = \{1\}; \quad \text{c) } \{f_k\} = \{a^k\}; \quad \text{d) } \{f_k\} = \{k\}; \quad \text{e) } \{f_k\} = \{ka^k\}.$$

**Příklad 3:** Řešte lineární soustavu (tj. najděte posloupnost  $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$ , pro kterou platí  $y_t = \sum_{k=0}^{\infty} h_k u_{t-k}$ )

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \frac{1}{3}x_t + 3u_t, \\ y_t &= 2x_t - u_t, \end{aligned}$$

- a) metodou postupného dosazování,  
b) dle obecného vzorce z přednášky  $H(z) = \mathbf{c}^T (z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbf{b} + d$ .

Určete impulsní charakteristiku soustavy, přechodovou charakteristiku soustavy.  
Rozhodněte, zda je daná soustava stabilní.

**Příklad 4:** Řešte lineární soustavu

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} x_t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u_t, \\ y_t &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x_t + u_t. \end{aligned}$$

- a) metodou postupného dosazování,  
b) dle obecného vzorce z přednášky  $H(z) = \mathbf{c}^T (z\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbf{b} + d$ .

Určete impulsní charakteristiku soustavy, přechodovou charakteristiku soustavy.  
Rozhodněte, zda je daná soustava stabilní.

**Příklad 5** Řešte lineární soustavu

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} x_t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u_t, \\ y_t &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x_t + u_t. \end{aligned}$$

Určete impulsní charakteristiku soustavy, přechodovou charakteristiku soustavy a rozhodněte, zda je daná soustava stabilní.

**Příklad 6** Řešte lineární soustavu

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ -0.2 & 0 \end{pmatrix} x_t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u_t, \\ y_t &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x_t + 2u_t. \end{aligned}$$

Určete impulsní charakteristiku soustavy, přechodovou charakteristiku soustavy a rozhodněte, zda je daná soustava stabilní.

---

**Domácí úloha**  
**Zjednodušený model nabídky a poptávky**

Deadline: 10.04.2023 (paper version)

Předpokládejme, že cena zboží je v čase  $t$  rovna  
velikost poptávky v čase  $t$   
velikost nabídky v čase  $t$   
kde  $b, c, d$  jsou kladné konstanty.

$$\begin{aligned} & \mu + y_t, \\ D_t &= \mu - by_t + \epsilon_t, \\ S_t &= \mu + cy_{t-1} + \varepsilon_t, \end{aligned}$$

Dále předpokládáme, že cena se v čase mění na základě následujícího modelu

$$y_t = y_{t-1} + d(D_{t-1} - S_{t-1}) + \vartheta_t. \quad (1)$$

Pak

$$\begin{aligned} y_t &= y_{t-1} + d(\mu - by_{t-1} + \epsilon_{t-1} - \mu - cy_{t-2} - \varepsilon_{t-1}) + \vartheta_t \\ &= y_{t-1}(1 - bd) - cdy_{t-2} + u_t, \end{aligned} \quad (2)$$

kde  $u_t = d(\epsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-1}) + \vartheta_t$  je nově zdefinovaná posloupnost náhodných fluktuací. Pro tuto vstupní posloupnost platí

$$H(z) = \frac{1}{1 + (bd - 1)z^{-1} + cdz^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 + (bd - 1)z + cd}. \quad (3)$$

Kořeny polynomu ve jmenovateli jsou

$$z_{1,2} = \frac{1 - bd \pm \sqrt{(bd - 1)^2 - 4cd}}{2},$$

tedy stabilita soustavy závisí na volbě konstant  $b, c, d$ .

**Zadání:**

Implementujte výše popsany model. Prozkoumejte, co dělá soustava pro volbu parametrů  $b = c = d = 1$ , pro  $b = d = 1$ ,  $c = \frac{1}{4}$  a co pro  $b = d = 1$ ,  $c \uparrow 1$ ,

a) teoreticky, tedy rozhodněte, je-li soustava pro tuto volbu parametrů stabilní, určete teoretické hodnoty  $\lim_{t \rightarrow \infty} g_t$ .

b) simulačně: vygenerujte například posloupnost délky 100 odpovědi na:

- jednotkový impuls
- jednotkový skok
- jednotkový skok přenásobený skalárem
- posloupnost náhodných fluktuací délky např. 50 následovanou posloupností nul
- násobek předchozí posloupnosti
- posloupnost 50ti nul následovaných posloupností náhodných fluktuací
- ...

Uvědomte si, že můžete rovnou pracovat se vstupem  $\{u_t\}$ , nemusíte generovat všechny tři vstupní posloupnosti  $\{\epsilon_t\}$ ,  $\{\varepsilon_t\}$ ,  $\{\vartheta_t\}$ .

Odpovídají si teoretické předpovědi a chování simulací?

Vaše zjištění komentujte a ilustруйте na vybraných průbězích  $\{u_t\}$  a  $\{y_t\}$ .