NMFM332 – Statistika pro finanční matematiky 2

Markovské řetězce II

Cvičenie 7 | 03.04.2023

Příklad 1: Nechť homogenní Markovův řetězec má matici pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Klasifikujte stavy řetězce.
b) Určete stacionární rozdělení (pokud existuje).
c) Najděte limitní rozdělení (pokud existuje).

Příklad 2: Nechť homogenní Markovův řetězec má matici pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

a) Klasifikujte stavy řetězce.
b) Najděte stacionární rozdělení (pokud existuje).
c) Určete limitní rozdělení (pokud existuje).

Příklad 3: Nechť homogenní Markovův řetězec má matici pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Určete matici pravděpodobností přechodu po dvou krocích $\mathbf{P}^{(2)}$.
b) Předpokládejme, že počáteční rozdělení je rovnoměrné (každý stav má stejnou pravděpodobnost). Jaké je rozdělení v čase $n = 2$?
c) Předpokládejme, že počáteční rozdělení $p = (1, 0, 0, 0)$. Jaké je rozdělení v čase $n = 2$?
d) Klasifikujte stavy řetězce.
e) Určete stacionární rozdělení (pokud existuje).

Příklad 4: Mějme tři přihrádky, do kterých umisťujeme kuličky. Každá přihrádka může obsahovat maximálně jednu kuličku. V každém časovém okamžiku vybereme rovnoměrně náhodně jednu z přihrádek. Pokud není obsazena, vložíme do ní kuličku. Pokud je obsazena, s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ z ní kuličku odebereme a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ kuličku ponecháme. Označme X_n počet obsazených přihrádek v čase n.

a) Určete matici pravděpodobností přechodu.
b) Klasifikujte stavy řetězce.
c) Předpokládejte, že počáteční rozdělení je rovnoměrné a spočtěte absolutní pravděpodobnosti po jednom kroku.
d) Najděte stacionární rozdělení (pokud existuje).
e) Určete limitní rozdělení (pokud existuje).

Příklad 5: Slimák leze po nekonečně vysokém stromě, za každou hodinu s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ vyleze nahoru o jeden centimetr a s pravděpodobností $\frac{3}{4}$ sklouzne dolů o jeden centimetr. Pokud je na zemi, popoleze o jeden centimetr nahoru s pravděpodobností 1. Označme X_n výšku v centimetrech, ve které se slimák nachází po n hodinách.

a) Určete matici pravděpodobností přechodu a najděte stacionární rozdělení (pokud existuje).
b) Klasifikujte stavy řetězce.