NMFM332 – Statistika pro finanční matematiky 2

Vzorové zadanie | 2023 — Výpočetná časť

Příklad 1: Markovské řetězce [15 bodov]

Nech $\{Y_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ je postupnosť nezávislých celočíselných náhodných veličín. Nech $X_0 = 0$ skoro jistě a nech $X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ pro $n \geq 1$.

1. Explicitne ukážte, že postupnosť $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ tvorí Markovský reťazec. [3]
2. Čo je nutné předpokládat o postupnosti $\{Y_k;\ k \in \mathbb{N}\}$, aby bol reťazec homogénny? [1]
3. Uvažujte špecifický prípad, kde náhodné veličiny Y_k majú rovnomerné rozdelenie na množine $\{0, 1, 2\}$. Nech $\mathcal{S}$ je príslušná množina stavov v Markovskom reťazci $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Nájdite maticu prechodových pravděpodobnosti a klasifikujte stavy v tomto reťazci. Odvoďte stacionárne rozdelenie. [5]
4. Aká je pravdepodobnosť, že v čase $n = 2$ bude Markovský reťazec v stave dva (t.j. $X_2 = 2$ s pravdepodobnosťou jedna)? [2]
5. Predpokládajme, že v nejakom čase $n_0 > 1$ je Markovský reťazec v stave $k \in \mathcal{S}$ (t.j. $X_{n_0} = k$ s pravdepodobnosťou jedna). Spočítajte pravdepodobnostné rozdelenie na množine stavov $\mathcal{S}$ v čase $n = n_0 + 2$. [2]
6. Jak by sa situacia zmenila (klasifikácia stavov, resp. stacionárne rozdelenie), ak by sme predpokládali, že $X_0 = 0$, $X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ ak $X_{n-1} < 10$ a $X_n = X_{n-1}$ ak $X_{n-1} \geq 10$? [2]

Příklad 2: Časové rady [13 bodov]

Uvažujte nasledujíci AR(2) proces definovaný rovnici

$$X_t - 0.7X_{t-1} + 0.1X_{t-2} = \varepsilon_t \quad \text{pro } t \in \mathbb{Z},$$

kde $\{\varepsilon_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ je bílý šum s rozptylem $\sigma^2 > 0$.

1. Pomocí Yule-Walkerových rovnic spočítejte autokorelační funkci a rozptyl procesu. [5]
2. Spočtěte střední hodnotu procesu a určete, jestli je proces (slabě) stacionární. [2]
3. Pokud je to možné, určete koeficienty pro kauzální vyjádření posloupnosti $\{X_t\}$. [4]
4. Zjistěte, jestli je posloupnost $\{X_t;\ t \in \mathbb{Z}\}$ invertibilní. [2]

Příklad 3: Poissonův čítací proces [12 bodov]

Předpokládejme, že počet pojistných událostí $N(t)$ v čase $t \in (0, T)$ je homogénny Poissonův proces s intenzitou $\lambda = 7$ (t.j. očekávame 7 pojistných událostí za jeden den). Nechť $N(T) = n$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ a nech $s \in (0, T)$.

1. Vysvětlete (resp. odvoďte), co znamená binomická vlastnosť vzhledem k pravděpodobnosti, že v čase $s \in (0, T)$ sledujeme $k \leq n$ pojistných událostí, když víme, že celkový počet událostí do času T je $n \in \mathbb{N}$, t.j. pravdepodobnost $P[N(s) = k | N(T) = n]$. [3]
2. Jak dlouho budeme průměrně čekat na první pojistnou událost a jak dlouho budeme čekat na k-tou pojistnou událost? [4]
3. Jaká je pravděpodobnost, že čase $t = 7$ (t.j. za jeden týden) nastane 50 událostí, když víme, že za první tři dny (t.j. do času $t = 3$) nenastála ani jedná pojistná událost? [3]
4. Průmerná škoda pro jednu pojistnou události je 25.000 Czk. Jaká je pravděpodobnost, že celkový úhrn škod za jeden týden bude menej, než jeden milión korún? [2]