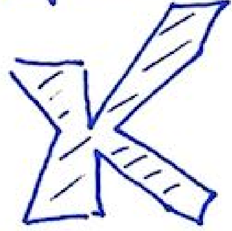
# 8.6 Věty o spojitém zobrazení na kompaktu, extrémy funkcí více proměnných

Připomeňme si vlastnosti spojitých fcí jedné reálné proměnné uvažovaných na UZAVŘENÉM intervalu $\langle a,b\rangle$:

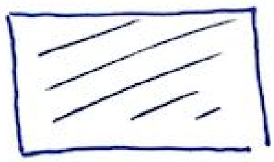
$f \in C(\langle a,b\rangle) \Rightarrow$

- $f$ je na $\langle a,b\rangle$ omezená
- $f$ nabývá všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$
- $f$ nabývá v $\langle a,b\rangle$ maxima / minima
- $f$ je stejnoměrně spojitá (Cantorova věta)

Nyní si uvedeme podobné věty pro funkce více proměnných. Uzavřený interval bude nahrazen obecnější množinou – množinou kompaktní



vs.



v $\mathbb{R}^d$: $K$ je kompaktní $\Leftrightarrow$ $K$ uzavřená a omezená

**Věta 8.21** Buď $f \in C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní.

Pak $\underline{L := f[K]}$ (obraz množiny $K$ při spojitém zobrazení) je kompakt (v $\mathbb{R}$) (resp. v $\mathbb{R}^n$)

Speciálně: $f|_K$ je omezená ($f$ je omezená na $K$)

**Dk** Využijeme následující charakterizaci kompaktnosti (viz Věta 8.9 (1)$\Leftrightarrow$(2))

$$f[K] \text{ je kompaktní} \Leftrightarrow \left(\forall \{y^n\}_{n=1}^\infty \subset f[K]\right)\left(\exists \{y^{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{y^n\}_{n=1}^\infty\right) \text{ a } \left(\exists y \in f[K]\right) \quad y^{n_k} \to y \text{ v } \mathbb{R}\ (k\to\infty)$$

Vezměme tedy $\{y^n\}_{n=1}^\infty \subset f[K]$ libovolně. Pak dle definice obrazu množiny existují $x^n \in K$ tak, že $f(x^n) = y^n$

Ale $\underline{K}$ je kompaktní, existuje tedy $x \in K$ a $\{x^{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{x^n\}_{n=1}^\infty$

tak, že $x^{n_k} \to x$ v $\mathbb{R}^d$ pro $k\to\infty$

Dle Heineho charakterizace spojitosti $f(x^{n_k}) \to f(x)$ v $\mathbb{R}$ $(k\to\infty)$.

Ale $f(x^{n_k}) = y^{n_k}$ a $f(x)$ je hledané $y \in f[K]$.

$\boxed{\text{POZOROVÁNÍ}}$ Předchozí i následující tvrzení (Věta 8.22) platí i v situacích

(i) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní

(ii) $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ kde $(X, \rho_X)$ a $(Y, \rho_Y)$ jsou úplné metrické prostory.

$\boxed{\text{Věta 8.22}}$ Buď $f \in C(K)^m$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní, $m \in \mathbb{N}$. Pak $f$ je stejnoměrně spojitá v $K$.

Dk Vyjdeme z definice stejnoměrné spojitosti $f$ v $K$:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x, y \in K)\ \boxed{|x - y|_{\mathbb{R}^d} < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon}$$

a tvrzení dokážeme sporem. Předpokládáme tedy

$$\boxed{f \in C(K) \wedge f \text{ není stejnoměrně spojitá na } K,\ K \subset \mathbb{R}^d \text{ kompaktní}}$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \exists \{x^n\}, \{y^n\} \subset K$$

$$(*) \qquad |x^n - y^n|_{\mathbb{R}^d} < \frac{1}{n} \wedge |f(x^n) - f(y^n)|_{\mathbb{R}^m} \geq \varepsilon_0$$

Protože $K$ je kompaktní,
existují: $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y^{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{y^n\}_{n=1}^{\infty}$

a $x, y \in K$:

$$x^{n_k} \to x \quad \text{a} \quad y^{n_k} \to y \quad \text{v } \mathbb{R}^d \ (k \to \infty)$$

Avšak dle první části $(*)$: $\boxed{x = y}$

a dle spojitosti

$$f(x^{n_k}) \to f(x) \underset{x=y}{=} f(y) \leftarrow f(y^{n_k})$$

neboli $f(x^{n_k}) - f(y^{n_k}) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ což dává spor s druhou částí $(*)$.

$\blacksquare$

Následující věta je první větou zaručující existenci minimizéru (maximizéru), tj. bodu, ve kterém funkce nabývá svého minima (resp. maxima). Důkaz věty je "blízký" důkazu základní věty moderní teorie variačního počtu.

**Věta 8.23** Buď $f \in C(K)$, $\boxed{f : \mathbb{R}^d \to \boxed{\mathbb{R}\ !}}$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní.

Pak $f$ nabývá v $K$ minima a maxima.

Dk • Buď $m := \inf\limits_{x \in K} f(x)$. Z Věty 8.21 plyne, že

$f$ je omezená a tedy $m > -\infty$.

Z definice $m$ plyne existence $\{x^n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ taková, že

(1) $$f(x^n) \searrow m$$

- Protože $K$ je kompaktní: existuje $x \in K$ a $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $$x^{n_k} \to x \text{ v } \mathbb{R}^d \ (k \to \infty)$$
- Protože $f \in C(K)$ $$f(x^{n_k}) \to f(x)$$ a porovnáním s (1): $\underline{f(x) = m}$ Tedy infimum se v $K$ nabývá.

Podobně postupujeme v případě $M := \sup\limits_{x \in K} f(x)$. ▨

Nadále uvažujeme $f : \mathbb{R}^d \to \underline{\underline{\mathbb{R}}}$. Pojem globální (lokální) minimum/maximum (extrém) je definován stejně jako pro $f$ jedné reálné proměnné. Uvedeme si nyní nutnou a postačující podmínku existence (lokálního) minima (maxima).

**Věta 8.24** (Nutná podmínka existence extrému) Nechť

- $M \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená;
- $f : M \to \mathbb{R}$ má v $x_0 \in M$ lokální extrém;
- $f$ má v $U_\delta(x_0) \subset M$ první parciální derivace;

Pak
$$\underline{\nabla f(x_0) = 0} \qquad (d \text{ podmínek})$$

Dk) Pro $i = 1, 2, \dots, d$ uvažuj fce

$g^i(t) : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ definované $g^i(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{e}^i) = f(x_0 + te^i)$

Pak $g^i$ mají v 0 lokální extrém

a dle Věty 4.1 (ZS): $(g^i)'(0) = 0$ ← definice parciální derivace

Avšak

$$(g^i)'(t)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te^i) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$ a tvrzení plyne. ◪

**Věta 8.25** (Postačující podmínka k existenci minima/maxima)

Nechť

(i) • $f \in C^2(U_\delta(x_0))$

(ii) • $\nabla f(x_0) = 0$

(iii) • $d^{(2)} f(x_0)(h, h)$ $\begin{cases} \text{positivně definitivní,} \\ \text{negativně definitivní,} \end{cases}$

tzn. $d^{(2)} f(x_0)(h,h) > 0 \quad \forall h \neq 0$

$\Updownarrow$

tzn. $\exists \alpha > 0 \; d^{(2)} f(x_0)(h,h) \geq \alpha |h|^2_{\mathbb{R}^d}$

Pak $f$ má v bodě $x_0$ ostré lokální $\begin{cases} \text{minimum} \\ \text{maximum} \end{cases}$

Dk) Dle Taylorova rozvoje (s využitím (ii)):

$x = x_0 + h$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} d^{(2)} f(x_0 + \theta h)(h,h)$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2} d^{(2)} f(x_0)(h,h) + \underbrace{\frac{1}{2}\left[d^{(2)} f(x_0+\theta h) - d^{(2)} f(x_0)\right](h,h)}_{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0+\theta h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right] h_i h_j}$$

Ze spojitosti druhých derivací: $\left| \quad \vdots \quad \right| \leq \frac{\alpha}{2}|h|^2$

pro $|h|$ dostatečně malé

Tedy

$$f(x) \geq f(x_0) + \underbrace{\alpha |h|^2 - \frac{\alpha}{2}|h|^2}_{>0} > f(x_0) \qquad \forall x \in U_\delta(x_0)$$

což jsme chtěli ověřit. !! ◪

$h \neq 0$

$\boxed{A = A^T}$

Druhý diferenciál $d^{(2)}f(x)(h,h)$ je kvadratická forma.

Řekneme, že kvadratická forma $Q(h,h) := h\cdot Ah = \sum_{i,j=1}^{d} A_{ij} h_i h_j : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je

- positivně definitivní $\stackrel{df.}{\equiv}$ $Q(h,h) > 0 \quad \forall h \neq 0$ (PD)
- negativně definitivní $\equiv$ $Q(h,h) < 0 \quad \forall h \neq 0$ $\Big\}\, h \in \mathbb{R}^d$ (PN)
- indefinitní $\equiv$ $\exists h^1 \in \mathbb{R}^d \quad Q(h^1,h^1) > 0$, $\exists h^2 \in \mathbb{R}^d \quad Q(h^2,h^2) < 0$ (IN)

Pozor! $Q(h,h)$ je

- positivně semidefinitní $\equiv$ $Q(h,h) \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^d$
- negativně —"— $\equiv$ $Q(h,h) \leq 0$ —"—.

Platí:

$$Q(h,h) > 0 \quad \forall h \neq 0,\ h \in \mathbb{R}^d \iff (\exists \alpha > 0)\left(Q(h,h) \geq \alpha |h|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^d\right)$$

Dk $\boxed{\Leftarrow}$ přímo.

$\boxed{\Rightarrow}$ Množina $\{h \in \mathbb{R}^d;\ |h|_2 = 1\}$ je kompaktní v $\mathbb{R}^d$, $Q(h,h) \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, a $Q(h,h)$ nabývá na $\{h \in \mathbb{R}^d;\ |h|_2 = 1\}$ minima, označme jej $\alpha > 0$.

Pak pro $h \neq 0$ libovolné

$$\frac{1}{|h|_2^2} Q(h,h) = Q\left(\frac{h}{|h|_2}, \frac{h}{|h|_2}\right) \geq \alpha > 0,$$

což implikuje $Q(h,h) \geq \alpha |h|_2^2 \quad \forall h \neq 0$. ∎

$\boxed{\text{POZOROVÁNÍ}}$ Pro $\boxed{d=2}$ je podmínka $d^{(2)}f(x)(h,h) > 0$ ekvivalentní zápisu

$$(\bullet) \qquad (h_1, h_2) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} > 0$$

$\boxed{x = \vec{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2}$

Označme $A := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) \qquad B := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x) \qquad C := \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x)$

Pak $(\bullet)$ je ekvivalentní s

$$A h_1^2 + 2B h_1 h_2 + C h_2^2 > 0 \qquad \forall (h_1, h_2) \neq (0,0)$$

$$\stackrel{h_1 \neq 0}{\iff} \quad A + 2B\left(\frac{h_2}{h_1}\right) + C\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 > 0$$

$$\stackrel{h_2 \neq 0}{\iff} \quad C + 2B\left(\frac{h_1}{h_2}\right) + A\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 > 0$$

nastane pokud

$\boxed{A > 0 \wedge B^2 - AC < 0}$ nebo $\boxed{C > 0 \wedge B^2 - AC < 0}$

Obecněji, pro $\boxed{d \geq 2}$ ▪ $d^{(2)}f(x)(h,h) > 0 \iff \underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_d}_{\text{vlastní čísla „}D^{(2)}f(x)\text{"}} > 0$

▪ $< 0 \iff \lambda_1, \dots, \lambda_d < 0$

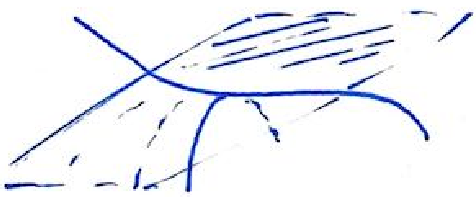
▪ , indefinitní $\iff \lambda_1 > 0, \lambda_d < 0$

---

Def. Řekneme, že $x^0 = (x_1^0, \dots, x_d^0) \in \mathbb{R}^d$ je sedlový bod funkce $f \in C^2(U_\delta(x^0))$ pokud

- $\nabla f(x^0) = 0$
- $\exists\, h^1, h^2 \in \mathbb{R}^d$ tak, že $d^2 f(x^0)(h^1, h^1) > 0$ a $d^2 f(x^0)(h^2, h^2) < 0$

v $\boxed{d=2}$ nastane pokud $B^2 - AC > 0$ (viz str. 8/48)



---

Pozorování $\boxed{d=1}$ • $f'(x) = 0,\ f''(x) > 0 \Rightarrow$ v $x$ lokální minimum $[f(x) = x^2]$

• $f'(x) = 0,\ f''(x) < 0 \Rightarrow$ v $x$ lok. maximum $[f(x) = -x^2]$

$\boxed{d=2}$ • $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\quad \nabla f(x)\big|_{(x,y)=(0,0)} = (2x, 2y)\big|_{(x,y)=(0,0)} = (0,0)$

$Hf(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad d^{(2)}f(0,0)(h,h) = 2h_1^2 + 2h_2^2$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{v } (0,0) \text{ lokální minimum}}$

• $f(x,y) = -x^2 - y^2$ $\quad Hf(x)\big|_{x=(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\boxed{\text{v } (0,0) \text{ lokální maximum}}$

• $f(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad \nabla f(x) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$

$Hf(x)\big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow d^2 f(0,0)(\underset{(h_1,h_2)}{h}, h) = 2h_1^2 - 2h_2^2$

$h^{I} = (1,0) \Rightarrow d^2 f(0,0)(h^{I}, h^{I}) > 0$

$h^{II} = (0,1) = d^{(2)} f(0,0)(h^{II}, h^{II}) < 0$

$\boxed{\text{v } (0,0) \text{ SEDLOVÝ BOD}}$

Pokud $d^2 f(x^0)(h,h) = 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^d$, nelze nic říci o chování fce v okolí $x^0$, jak ukazují následující příklady:

(a) $f(x,y) = x^4 + y^4$ v $(0,0)$ minimum

(b) $f(x,y) = -(x^4+y^4)$ v $(0,0)$ maximum

(c) $f(x,y) = x^4 - y^4$ v $(0,0)$ sedlový bod.

**Příklady** ① Najděte a klasifikujte extrémy funkce

$$f(x,y) = \frac{x}{y^2} + xy.$$

**Řešení** $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \neq 0\}$

v $D_f$: $\nabla f(x,y) = \left(y + \frac{1}{y^2},\ x - 2\frac{x}{y^3}\right) = (0,0) \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} y^3+1 = 0 \ \& \\ x(y^3-2) = 0 \end{array}}$

$\Leftrightarrow (y=-1) \wedge \boxed{x=0}$ $\qquad y^3+1 = (y+1)(y^2+y+1)$

Podezřelý bod: $\boxed{x^0 = (0,-1)}$

Hessián $f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1-2y^{-3} \\ 1-2y^{-3} & 6xy^{-4} \end{pmatrix} \overset{(x,y)=x^0}{\Longrightarrow} Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Tedy, (ii) $d^2 f(0,0)(h,h) = 3(h_1,h_2)\cdot(h_2,h_1) = 6h_1h_2$

$h^{I} = (1,1) \Rightarrow d^2 f(0,0)(h^{I},h^{I}) > 0$

$h^{II} = (1,-1) \Rightarrow d^2 f(0,0)(h^{II},h^{II}) < 0$

(i) $B^2 - AC = 9 > 0$
$\Rightarrow$ v $(0,-1)$ je sedlový bod

(iii) $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ charakteristická rovnice $+\lambda^2 - 1 = 0$

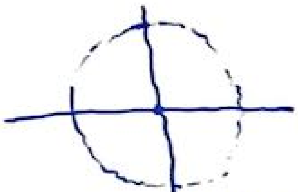
$\mathbb{A} := Hf(0,0)$

$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{array}}$

(2) Najděte a klasifikujte extrémy $f(x,y) = -xy\,e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$

<u>Řešení:</u> (cvičení) $\boxed{D_f = \mathbb{R}^2}$ neboť
- $(x,y) \mapsto -\frac{x^2+y^2}{2} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$
- $(x,y) \mapsto -xy \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$
- $t \mapsto e^t \in C^\infty(\mathbb{R})$

(a užiji věty o derivování, spojitosti součinu, složeného zobrazení.)



Nutná podmínka na extrém

$$0 = \nabla f(x,y) = \left(e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\left[-y + x^2 y\right],\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\left[-x + xy^2\right]\right)$$

$$\iff \boxed{y(x^2-1)=0} \wedge \boxed{x(y^2-1)=0}$$

$$[y=0 \vee x=1 \vee x=-1] \wedge [x=0 \vee y=1 \vee y=-1]$$

Podezřelé body $[0,0], [1,1], [1,-1], [-1,-1], [-1,1]$

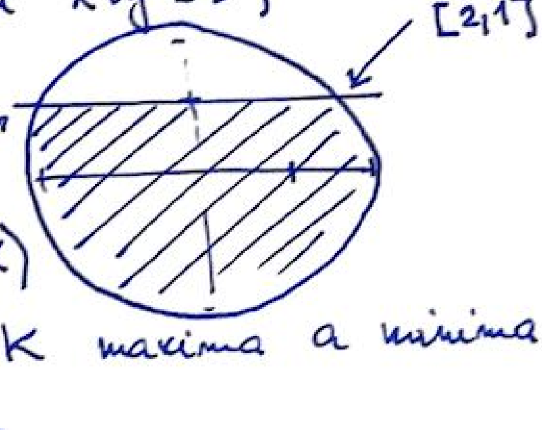
Hessián

$$H_f(x,y) := e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \begin{pmatrix} 2xy + yx - x^3y & x^2-1+y^2-x^2y^2 \\ y^2-1+x^2-x^2y^2 & 2xy+xy-xy^3 \end{pmatrix} = e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} \begin{bmatrix} 3xy - x^3y & x^2+y^2-1-x^2y^2 \\ x^2+y^2-1-x^2y^2 & 3xy-xy^3 \end{bmatrix}$$

- $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ <u>$(0,0)$ je sedlový bod</u> (neb $\underbrace{B^2-4AC}_{=1} > 0$) | $f(0,0)=0$
- $H_f(1,1) = e^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (1,1)$ je lokální minimum $f(1,1) = -\frac{1}{e}$
- $H_f(1,-1) = e^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (1,-1)$ je bod lok. maxima $f(1,-1) = \frac{1}{e}$
- $H_f(1,-1) = e^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1,1)$ —"— $f(-1,1) = \frac{1}{e}$
- $H_f(-1,-1) = H_f(1,1) \Rightarrow (-1,-1)$ je lokální minimum $f(-1,-1) = \frac{1}{e}$

<u>Globální extrémy</u> v $[-1,-1]$ a $[1,1]$ jsou globální minima
v $[1,-1]$ a $[-1,1]$ jsou globální maxima
neboť $|f(x,y)| \to 0$ pro $\|(x,y)\| \geq r$ a $r \to \infty$

③ Najděte globální extrémy funkce $f(x,y) = x - y$ na množině $K := \{(x,y);\ y \leq 1 \text{ a } x^2+y^2 \leq 5\}$




Řešení
- $K$ je uzavřená, omezená v $\mathbb{R}^2$ tedy kompaktní
- $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ speciálně $f \in C(K)$

Tedy dle Věty 8.21 $f$ nabývá na $K$ maxima a minima.

Dále $\nabla f(x,y) = (1,-1) \neq (0,0)$ v $\mathbb{R}^2$

a tedy $f$ nabývá maxima a minima na $\partial K$, kde

$$\partial K = \underbrace{\{(x,y);\ x \in (-2,2),\ y=1\}}_{\partial K_1} \cup \{[2,1],[-2,1]\} \cup \underbrace{\{(x,y);\ x^2+y^2=5 \wedge y<1\}}_{\partial K_2}$$

$\boxed{\text{Na } \partial K_1}$ $\left.\begin{array}{l} f(x,y) = x-1 =: g(x) \\ g'(x) = 1 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ podezřelé body $[2,1]$ a $[-2,1]$

3 podezřelé body

$\boxed{\text{Na } \partial K_2}$ $x = \sqrt{5}\cos\varphi$

$y = \sqrt{5}\sin\varphi \quad (<1)$

$h(\varphi) = \sqrt{5}(\cos\varphi - \sin\varphi)$

$h'(\varphi) = -\sqrt{5}(\sin\varphi + \cos\varphi) = 0 \iff \operatorname{tg}\varphi = -1$

& $y<1$

$\varphi = -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \Longrightarrow x = \sqrt{5}\frac{\sqrt{2}}{2},\ y = -\sqrt{5}\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left[\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right]$

$x = -\frac{\sqrt{10}}{2},\ y = \frac{\sqrt{10}}{2} > 1,$

VIZ DOKONČENÍ NA STRANĚ 8/54.

Vidíme, že výpočet není jednoduchý ani pro snadné funkce: potřebuji znát popis a parametrizaci hranice a vypočítat intervaly parametrizace.

Úkol: $\min\limits_{(x,y)\in A} f(x,y)$ kde $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ g(x,y)=0\}$ .... vazba

je tzv. úloha na vázané extrémy. K řešení takovýchto úloh lze využít s úspěchem metodu tzv. Lagrangeových multiplikátorů (značených $\lambda$ ... Lagrange).

$\boxed{\text{Věta 8.26}}$ (Lagrangeova věta o multiplikátorech o vázaných extrémech)

Buď $f, g \in C^1(M)$, $M \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $d \geq 2$.

Buď $A := \{x \in M;\ g(x) = 0\}$. (VAZEBNÍ PODMÍNKA)

Buď $z^0 \in M$ takový, že $f(z^0) = \min_{z \in A} f(z)$ nebo $f(z^0) = \max_{z \in A} f(z)$

Buď $\nabla g(z^0) \neq 0$

Pak existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že $\nabla f(z^0) = \lambda \nabla g(z^0)$.

„Dk" Dnes jen pro $\boxed{d=2}$

V okolí $z^0 = (x^0, y^0)$ si parametrizujeme body vazební podmínky parametrizací: $t \longmapsto (x(t), y(t))$ pro $t \in (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$.

tak, že $(x(0), y(0)) = (x^0, y^0)$.

Máme tedy

$$(*) \qquad g(x(t), y(t)) = 0 \qquad \text{pro } t \in (-\delta, \delta)$$

Derivováním $(*)$ dostáváme:

$$\nabla g(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0$$

Speciálně pro $t = 0$:

$$(1) \qquad \nabla g(x^0, y^0) \cdot (x'(0), y'(0)) = 0$$

Avšak $(x^0, y^0)$ je extrém funkce $f$ vzhledem k vazbě respektive její parametrizaci. Tedy

$h(t) := f(x(t), y(t))$ má v $t = 0$ extrém,

což implikuje

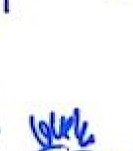
$$(2) \qquad 0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\Big|_{t=0} = \nabla f(x^0, y^0) \cdot (x'(0), y'(0))$$

Porovnáním (1) a (2) dostáváme

$$\nabla f(x^0, y^0) \parallel \nabla g(x^0, y^0)$$

Oba vektory jsou kolmé na $(x'(0), y'(0))$ a jsou tedy kolineární!

Tedy $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $\nabla f(x^0, y^0) = \lambda \nabla g(x^0, y^0)$.



Ad Příklad 3 $\quad f(x,y) = x-y \quad \Longrightarrow$
$\qquad g(x,y) = x^2+y^2-5$

$$\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \neq (0,0) \quad \text{na} \quad g(x,y)=0.$$

Nutné podmínky optimality:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} \Rightarrow$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} \Rightarrow$
- $g(x,y)=0 \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} 1 &= 2\lambda x \\ -1 &= 2\lambda y \\ x^2+y^2 &= 5 \end{aligned}}$$

systém rovnic pro $x, y, \lambda$.

což implikuje $\quad \begin{aligned} 2\lambda(x+y) &= 0 \\ x^2+y^2 &= 5 \end{aligned} \quad \left.\begin{aligned} \lambda = 0 \vee \boxed{y=-x} \\ \boxed{x^2+y^2=5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2x^2=5$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \quad \wedge \quad y_{1,2} = \mp\sqrt{\frac{5}{2}} \qquad y<1 \text{ jen pro } y_1 = -\sqrt{\frac{5}{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Podmínky $y=-x$ a $y<1$ splňuje jen bod $\left[\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right]$.

Tedy celkově porovnáním hodnot v podezřelých bodech získáme odpověď na náš úkol:

$$f\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = \sqrt{10} > 3, \quad f(2,1) = 1, \quad f(-2,1) = -3$$

Tedy $f$ nabývá globálního minima v bodě $[-2,1]$
a globálního maxima v bodě $\left[\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right]$.

VK

## 8.7 O čtyřech hlubších (krásných) větách

(1) Banachova věta o pevném bodě

(2) Věta o implicitních funkcích

(3) Věta o inverzním zobrazení

(4) Lagrangeova věta o vázaných extrémech

### 8.7.1 BANACHOVA VĚTA O PEVNÉM BODĚ A JEJÍ DŮSLEDKY.

Připomenutí: $X$ je Banachův $\equiv$ úplný normovaný vektorový prostor

$(X, \|\cdot\|_X)$

$\forall$ cauchyovská $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní v $(X, \|\cdot\|_X)$.

**Definice** Buď $X$ množina. Řekneme, že zobrazení $T: X \to X$ má pevný bod pokud existuje $x_0 \in X$ : $\boxed{Tx_0 = x_0}$

**Věta 8.27** (BANACHOVA)

Buď $(X, \|\cdot\|_X)$ Banachův prostor a $T: X \to X$ kontrakce,

tzn.
(K) $\exists\ \theta \in (0,1)$ tak, že
$$\|Tx - Ty\|_X \leq \theta \|x-y\| \quad \text{pro } \forall x, y \in X$$

Pak $T$ má právě jeden pevný bod.

**Pozorování**
- Kontraktivní zobrazení je lipschitzovské zobrazení s konstantou lipschitzovskosti menší než 1.
- Lipschitzovské zobrazení je lipschitzovsky spojité zobrazení, tedy spojité.
- Tedy kontrakce nebo kontraktivní zobrazení je spojité zobrazení.

**POZNÁMKA** Věta platí v úplném metrickém prostoru $(X, \varrho)$.
Tvrzení sami přeformulujte !!

Dk Banachovy věty [1] $T: X \to X$ je spojité (neboť je kontraktivní)

[2] Jednoznačnost Kdyby $T$ měl dva různé pevné body $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in X$, pak $Tx_1 = x_1$ a $Tx_2 = x_2$ a z podmínky (K) plyne

$$\|x_1 - x_2\|_X = \|Tx_1 - Tx_2\|_X \leq \theta \|x_1 - x_2\|$$

což implikuje

$$(1-\theta)\|x_1 - x_2\|_X \leq 0.$$

[3] Existence Volme $x_1 \in X$ libovolně a definujme

$$x_n := Tx_{n-1} \qquad n \geq 2.$$

Ukážeme, že takto definovaná posloupnost je cauchyovská. Protože $X$ je úplný, tak existuje $x_0 \in X$ tak, že

$$x_n \to x_0 \quad v\ X$$

Ze spojitosti

$$\boxed{Tx_n \to Tx_0 \quad v\ X} \qquad (*)$$

Ale

$$\boxed{Tx_n = x_{n+1} \to x_0 \quad v\ X} \qquad (**)$$

Z jednoznačnosti limity $Tx_0 = x_0$, což jsme chtěli ukázat.

[4] Zbývá ověřit, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská.

Avšak:

$$\|x_{n+1} - x_n\|_X = \|Tx_n - Tx_{n-1}\| \overset{(K)}{\leq} \theta \|x_n - x_{n-1}\|_X$$

$$\text{------} \leq \theta^{n-1} \|x_2 - x_1\|_X$$

Odsud: pro $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$:

$$\|x_n - x_m\|_X = \|x_n \underbrace{- x_{n-1} + x_{n-1}}_{} - x_{n-2} + \dots + x_{m+1} - x_m\|$$

($\Delta$-nerovnost)

$$\leq \|x_n - x_{n-1}\|_X + \|x_{n-1} - x_{n-2}\|_X + \dots + \|x_{m+1} - x_m\|_X$$

$$\leq \underbrace{(\theta^{n-1} + \dots + \theta^{m-1})}_{\text{část konvergentní geometrické řady}} \|x_2 - x_1\|$$

(B-C podmínka pro geom. řadu)

$$\leq \varepsilon \|x_2 - x_1\| \Rightarrow \{x_n\} \text{ je cauchyovská.}$$

**Banachova věta v úplném metrickém prostoru**

• Buď $(X,\varrho)$ úplný metrický prostor se vzdáleností (metrikou) $\varrho : X \times X \mapsto \mathbb{R}_0^+$.

• Buď $T: X \to X$ kontrakce (respektive kontraktivní zobrazení) tj.

$$\boxed{\exists\, \theta \in (0,1): \quad \varrho(Tx,Ty) \le \theta\, \varrho(x,y) \quad \text{pro všechna } x,y \in X.}$$

Pak $T$ má právě jeden pevný bod $\overline{x} \in X$, tj. $\boxed{T\overline{x} = \overline{x}}$

Navíc: je-li $x_0 \in X$ zvoleno libovolně, pak posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaná $\quad x_{n+1} := Tx_n \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

konvergují k $\overline{x}$ exponenciálně a platí tyto odhady:

$$(\ast)\quad \left\{ \begin{aligned} \varrho(x_n,\overline{x}) &\le \frac{\theta^n}{1-\theta}\, \varrho(x_1,x_0) \\ \varrho(x_{n+1},\overline{x}) &\le \frac{\theta}{1-\theta}\, \varrho(x_{n+1},x_n) \\ \varrho(x_{n+1},\overline{x}) &\le \theta\, \varrho(x_n,\overline{x}). \end{aligned} \right.$$

Dk [i] Jednoznačnost. Kdyby $x$ a $y$ byly dva různé pevné body, pak splňují $Tx = x$ a $Ty = y$ a máme: ↯

$$\varrho(x,y) = \varrho(Tx,Ty) \le \theta\, \varrho(x,y) \Rightarrow \underbrace{(1-\theta)}_{>0}\, \varrho(x,y) \le 0 \Rightarrow \varrho(x,y) = 0 \Rightarrow x = y. \quad \square$$

[ii] Existence. Buď $x_0 \in X$. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ položme $x_{n+1} := Tx_n$.

Pak $(n \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned} \varrho(x_{n+1},x_n) &= \varrho(Tx_n,Tx_{n-1}) \le \theta\, \varrho(x_n,x_{n-1}) \\ &= \varrho(Tx_{n-1},Tx_{n-2}) \le \theta^2 \varrho(x_{n-1},x_{n-2}) \\ &\ \ \vdots \\ &\ \ \dots\dots \le \theta^n \varrho(x_1,x_0) = \theta^n \varrho(Tx_0,x_0), \end{aligned}$$

což implikuje

$\boxed{p > n}$
$$\varrho(x_p,x_n) \le \sum_{j=n}^{p-1} \varrho(x_{j+1},x_j) \le \sum_{j=n}^{p-1} \theta^j \varrho(x_1,x_0) \le \frac{\theta^n}{1-\theta}\, \varrho(x_1,x_0)$$

$$\sum_{j=n}^{p-1} \theta^j \le \sum_{j=n}^{\infty} \theta^j = \theta^n \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j = \frac{\theta^n}{1-\theta}$$

Tedy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská a protože $(X,\varrho)$ je úplný, existuje $\overline{x} \in X$ tak, že $\quad x_n \to \overline{x}$ v $(X,\varrho)$ tj. $\boxed{\varrho(x_n,\overline{x}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

Limitním přechodem v $\quad x_{n+1} = Tx_n$ dostáváme

$$\boxed{\overline{x} = T\overline{x}}$$

[iii] Odhady $(\ast)$ si odvoďte sami postupy jako výše.

Pomocí Banachovy věty o pevném bodě (věta 8.27) nyní dokážeme Picard-Lindelöfovu větu 7.3. Připomeňme si její znění.

**Věta 7.3** (Picard-Lindelöfova věta o existenci a jednoznačnosti)

Nechť

(P1) $\vec{f} : E \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je spojitá na otevřené množině $E \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$

(P2) $\vec{f} : E \to \mathbb{R}^N$ je na $E$ lokálně lipschitzovsky spojitá vzhledem k $\vec{y}$

tzn. $\forall K \subset E$ kompaktní $\exists \lambda = \lambda_K$ tak, že

$\forall (t,\vec{y}_1),(t,\vec{y}_2) \in K \quad |\vec{f}(t,\vec{y}_1) - \vec{f}(t,\vec{y}_2)|_{\mathbb{R}^N} \le \lambda |\vec{y}_1 - \vec{y}_2|_{\mathbb{R}^N}$

Pak pro $\forall (t_0,\vec{y}_0) \in E$ $\exists!$ (existuje právě jedno) $\vec{y} : (t_0-\delta, t_0+\delta) \to \mathbb{R}^N$ splňující

$$(P_d)\quad \boxed{\vec{y}\,' = f(t,\vec{y}) \text{ a } \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0} \iff \boxed{\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(s,\vec{y}(s))\,ds} \quad (P_i)$$

Dk [1] K důkazu využijeme integrální formulaci $(P_i)$, která je ekvivalentní v našem kontextu formulaci $(P_d)$.

[2] Buď $(t_0,\vec{y}_0) \in E$ libovolné, pevné. Buď $K := \{(t,\vec{z});\ t \in \langle t_0-a, t_0+a\rangle \text{ a } |\vec{z}-\vec{y}_0|_{\mathbb{R}^N} \le b\}$

takové, že $K \subset E$. Protože $K$ je kompaktní

a $f$ splňuje (P1), tak existuje $M>0$: $|f(t,\vec{z})| \le M \quad \forall (t,\vec{z}) \in K$.

[3] Definujme $X := \{\vec{y} \in C(\langle t_0-\delta, t_0+\delta\rangle)^N;\ |\vec{y}(t)-\vec{y}_0|_{\mathbb{R}^N} \le b \text{ pro } t \in \langle t_0-\delta, t_0+\delta\rangle\}$

s normou $\|\vec{y}\|_X := \max_{t\in\langle t_0-\delta,t_0+\delta\rangle} |\vec{y}(t)|_{\mathbb{R}^N}$.

Víme, že $(X, \|\cdot\|_X)$ je úplný.

[4] Definujme $\boxed{T : X \to X \text{ předpisem } T\vec{y} := \vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(s,\vec{y}(s))\,ds.}$

Potřebujeme ukázat, že

a) $T$ zobrazuje $\vec{y} \in X$ do $X$

b) $T$ je kontrakce.

} Tyto dva požadavky dají restrikci na $\delta$.

**Ad a)** $|T\vec{y} - \vec{y}_0|_{\mathbb{R}^N} \le \int_{t_0}^{t} |\vec{f}(s,\vec{y}(s))|\,ds \le M|t-t_0| \le M\delta \le b$

pokud $\boxed{\delta \le \frac{b}{M}}$

**Ad b)**

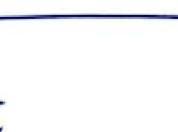
$|T\vec{y}_1(t) - T\vec{y}_2(t)| \le \int_{t_0}^{t} |\vec{f}(s,\vec{y}_1(s)) - \vec{f}(s,\vec{y}_2(s))|\,ds$

$$\underset{(P2)}{\leq} \lambda_K \int_{t_0}^{t} |\vec{y}_1(s)-\vec{y}_2(s)|_{\mathbb{R}^N}\, ds$$

$$\leq \lambda_K \delta \max_{s\in\langle t_0-\delta, t_0+\delta\rangle} |\vec{y}_1(s)-\vec{y}_2(s)|_{\mathbb{R}^N}$$

Tedy, pokud $\theta := \lambda_K \delta < 1$, pak $T$ je kontrakce, neboť přechodem k maximu přes $t\in\langle t_0-\delta, t_0+\delta\rangle$ na levé straně dostáváme

$$\|T\vec{y}_1 - T\vec{y}_2\|_X \leq \theta \|\vec{y}_1-\vec{y}_2\|_X$$

Je-li tedy $\delta < \min\left\{\frac{1}{\lambda_K}, \frac{b}{M}, a\right\}$, pak $T$ splňuje a) a b) tj. zobrazuje $(X, \|\cdot\|_X)$ do $(X, \|\cdot\|)$ a navíc je $T$ kontrakce. Dle Banachovy věty $\exists!\ \vec{y}\in X$ splňující $T\vec{y}=\vec{y}$. To však znamená, že platí $(P_i)$. Důkaz je hotov.  .

---

Věta o existenci řešení počáteční úlohy $(P_d)$ platí i za slabších (obecnějších) předpokladů, než vyžaduje Peanova věta 7.2 (které zatím nebudeme dokazovat). Řešení $(P_d)$ existuje pokud

(i) $\vec{y}\mapsto f(t,\vec{y})$ je spojité pro <u>skoro všechna</u> $t\in(t_0-\delta, t_0+\delta)$

(ii) $t\mapsto f(t,\vec{y})$ je <u>měřitelné</u> pro všechna $\vec{y}$

Pojmy <u>skoro všude</u> a <u>měřitelná</u> funkce si objasníme v kapitole o Lebesgueově integrálu v ZS 2020/21.

---

**Věta 8.28** (Ještě jedna varianta Banachovy věty)

Buď $T: B_R(0)\to\mathbb{R}^m$ spojité, $B_R(0)\subset\mathbb{R}^m$. Nechť existují $q\in(0,1)$ a $\delta>0$ tak, že $B_\delta(0)\subset B_R(0)$ a platí:

$$\boxed{(\alpha)\quad |T(y)-T(z)|_{\mathbb{R}^m} \leq q\,|y-z|_{\mathbb{R}^m} \text{ pro každé } y,z\in B_\delta(0)} \quad \& \quad \boxed{(\beta)\quad T(0)\leq\delta(1-q)}$$

Pak $\exists!\ y_0\in\overline{B_\delta(0)}$ tak, že $Ty_0=y_0$.

Dk: Volme $q\in(0,1)$ libovolně, pevně a nechť $(\alpha)$ a $(\beta)$ platí.

Pro posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ platí:

$$\boxed{x_n = T^n(0) = Tx_{n-1}} \qquad |x^n|_{\mathbb{R}^m} = |T^n(0)| \leq \sum_{i=0}^{n-1}|T^{i+1}(0)-T^i(0)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} q^i\,|T(0)-0|$$

$$\leq \frac{1}{1-q}|T(0)| \underset{(\beta)}{\leq} \delta.$$

[OSTATNÍ KROKY JAKO V. 8.27]

# 8.7.2 Věta o implicitních funkcích

V této sérii se budeme zabývat rovnicemi tvaru

(1) $$F(x,y)=0$$

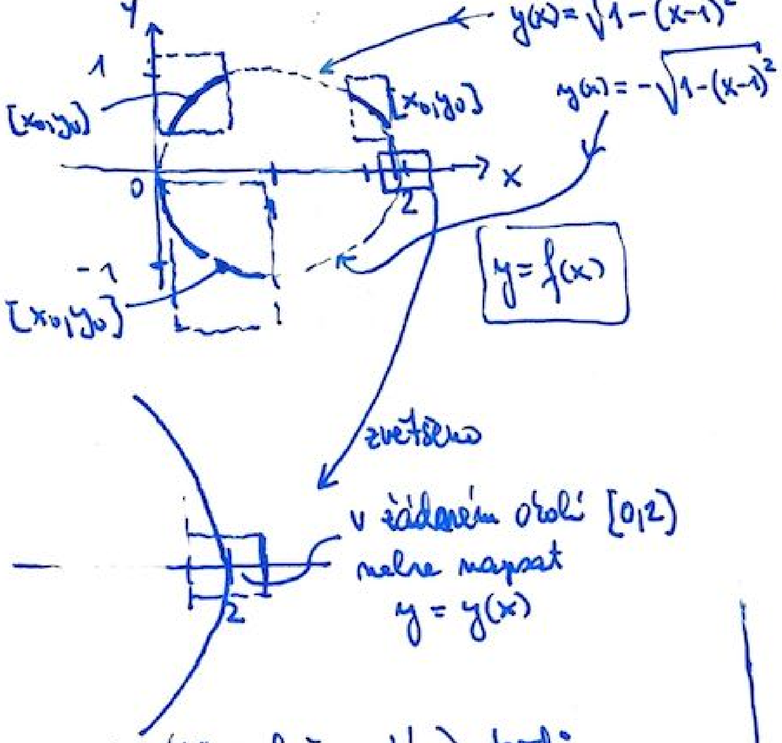
Úkolem je rozhodnout, zda a kde tato rovnice určuje $y$ jako fci $x$, resp. $x$ jako funkci $y$, tj.

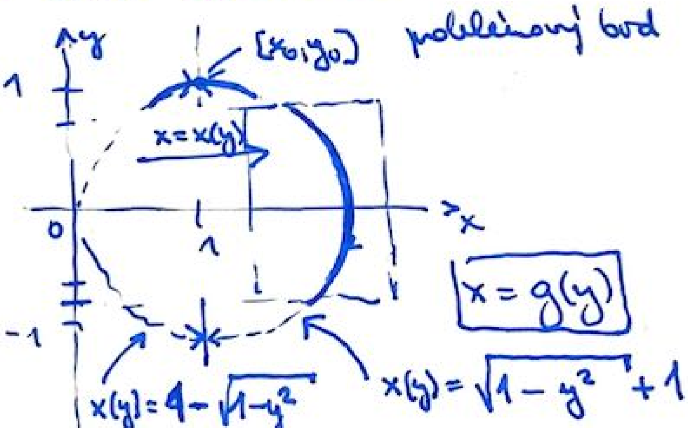
(2) $$\underline{y=f(x)} \quad \text{resp.} \quad \underline{x=g(y)}$$

$\boxed{\text{Explicitní funkční zápis}}$

Pokud to lze, tak říkáme, že funkce $f$ resp. $g$ je dána rovnicí (1) *implicitně*.

**Příklad** ① Buď $F(x,y)=(x-1)^2+y^2-1$. Pak (1) určuje body jednotkové kružnice se středem v $[1,0]$. Obecně nelze napsat body kružnice "globálně" jako funkci typu (2). "Lokálně" to však možné je až na dvě výjimky v obou situacích. Viz obr. 1 a 2.




! V okolí (libovolně malém) bodů $[0,0]$ a $[2,0]$ NELZE psát $y$ jako funkci $x$

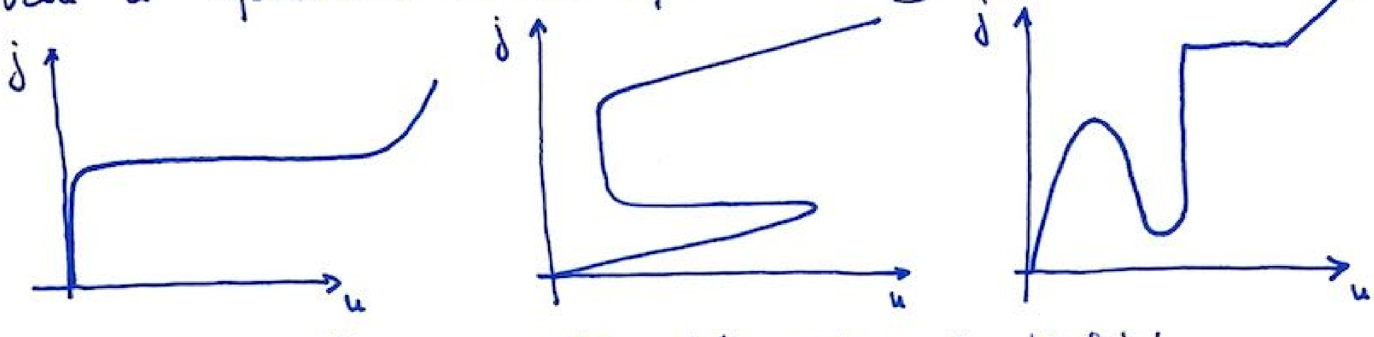
Ostatní body kružnice mají vždy okolí, na kterém lze $y$ vnímat jako funkci $x$.

V libovolně malém okolí bodů $[1,1]$ a $[1,-1]$ NELZE psát $x$ jako funkci $y$

V ostatních bodech to však udělat lze

$\boxed{\text{OTÁZKA: JAKÁ VLASTNOST CHARAKTERIZUJE "ŠPATNÉ" BODY?}}$

Ve fyzikálních experimentech mohu získat pozoruhodné závislosti mezi veličinami $j$ a $u$. Tato data mohu proložit křivkou a výsledkem mohou být obrázky typu:



Ačkoliv historicky/tradicí můžeme být vedeni k hledání závislosti $j$ na $u$, tj. $j=\tilde{j}(u)$, může být vhodnější sledovat $u$ jako fci $j$, tj. $u=\tilde{u}(j)$ nebo obecněji $g(j,u)=\underline{0}$.

Skalární (implicitní) rovnici (1) lze zobecnit následujícím způsobem. Uvažujme

$$(3) \qquad \vec{F}(\vec{x},\vec{y})=\vec{0},$$

kde $\vec{F}=(F_1,\dots,F_m)$, $\vec{y}=(y_1,\dots,y_m)$ a $\vec{x}=(x_1,\dots,x_k)$ a ptáme se, zda (3) lze lokálně chápat tak, že

$$(4) \qquad \vec{y}=\vec{g}(\vec{x}), \quad \text{kde} \quad \vec{g}=(g_1,\dots,g_m).$$

Připišme si (3) po složkách:

$$(3') \qquad \left.\begin{aligned} F_1(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_m)&=0\\ F_2(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_m)&=0\\ \vdots \qquad\qquad & \ \ \vdots\\ F_m(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_m)&=0 \end{aligned}\right\}$$

Vidíme, že (3) představují $m$-rovnic o $(m+k)$-neznámých, z kterých chceme $m$-složek vyjádřit pomocí ostatních (zbylých) $k$-složek.

Otázka zní: Máme $\underline{m}$ rovnic o $(m+k)$-neznámých $x_1,x_2,\dots,x_k,y_1,\dots,y_m$. Je možné, alespoň v okolí nějakého bodu $\vec{a}=(a_1,\dots,a_k,a_{k+1},\dots,a_{k+m})$ takového, že $\vec{F}(\vec{a})=\vec{0}$ vyjádřit $\underline{m}$-souřadnic (proměnných), např. $y_1,\dots,y_m$ jako funkce zbylých proměnných $x_1,\dots,x_k$.

Pozorování: Posunutím souřadného systému do bodu $\vec{a}$ vidíme, že stačí uvažovat jen případ $\vec{a}=\vec{0}$.

Speciálním, ale důležitým příkladem systému rovnic (3) resp. (3'), je známý problém lineární algebry:

- Hledáme-li řešení soustavy $\underline{m}$ - lineárních rovnic o $\underline{m}$ neznámých

$$(3'') \qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j = x_i \quad i=1,\dots,m \iff \mathbb{A}\vec{y} = \vec{x},$$

pak víme, že (3'') má jediné řešení (∃!) právě když $\det \mathbb{A} \neq 0$.

- Všimněme si, že (3'') lze psát ve tvaru (3) či (3'), kde

$$F_i(\vec{x},\vec{y}) := \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j - x_i \qquad \text{a tedy } m=k.$$

Také pozorujeme, že

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_j} = a_{ij} \qquad \text{pro } i=1,\dots,m \quad \text{a} \quad j=1,\dots,m$$

a tedy Jacobiho matice se shoduje s maticí $\mathbb{A}$, o které víme, že $\det \mathbb{A}$ musí být nenulový, aby (3'') bylo řešitelné.

Protože libovolnou hladkou funkci lze lokálně aproximovat lineární funkcí (diferenciálem), nepřekvapí nás, že v řešení naší úlohy bude hrát klíčovou roli

$$\det \left( \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right)_{i,j=1}^{m}.$$

$\boxed{\text{Věta 8.29 (O implicitních funkcích)}}$

Buď $\vec{F} = (F_1,\dots,F_m) : U \times V \to \mathbb{R}^m$, kde $U \subset \mathbb{R}^k$ a $V \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené. Nechť $\vec{F} \in C^1(U\times V)^m$. Nechť $\vec{x}_0 \in U$ a $\vec{y}_0 \in V$ tak, že

- $\vec{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0) = \vec{0}$
- $\det \left[ \left( \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right)(x_0,y_0) \right]_{i,j=1}^{m} \neq 0$

Pak existují $U_0 \subset U$, $\vec{x}_0 \in U_0$ a existuje právě jedna $\vec{g} : U_0 \to V$ tak, že

- $\vec{g} \in C^1(U_0)^m$
- $\vec{F}(\vec{x},\vec{g}(\vec{x})) = 0 \qquad \forall \vec{x} \in U_0.$

<u>Pozorování</u> Pokud platí poslední rovnost, lze ji derivovat dle proměnných $x_i$, $i=1,\dots,k$ a odsud můžu spočítat tyto derivace explicitně.

Speciálně: je-li $m = k = 1$. Pak z rovnosti

$$F(x, g(x)) = 0$$

plyne

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} g'(x) = 0,$$

což implikuje

$$(*) \quad \boxed{g'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}} \neq 0$$

Aplikace K implicitně zadané funkci $F(x,y) = 0$ můžeme spočítat tečnu. Její rovnice je dána vztahem $y(x) = y_0 + g'(x_0)(x - x_0)$ neboli

$(y(x) - y_0, x - x_0) \cdot (1, -g'(x_0)) = 0$. Odsud plyne, že

$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + [g'(x_0)]^2}} \left(-g'(x_0), 1\right)$ je normálový vektor k $F(x,y) = 0$ v bodě $(x_0, y_0)$.

Dosazením $(*)$ dostáváme

$$\vec{n} = \frac{1}{\|\nabla F\|_2} \left(\frac{\partial F}{\partial F}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)\Bigg|_{(x_0, y_0)} = \frac{\nabla F(x_0, y_0)}{\|\nabla F(x_0, y_0)\|_2}$$

▨

Příklad Buď $F(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 1$. Určete, ve kterých bodech rovnice $F(x,y) = 0$ lokálně popisuje $y$ jako funkci $x$. V těchto bodech spočtěte $y'(x)$.

Řešení: $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2y = 0$ právě když $y = 0$. Po dosazení do $F(x,y) = 0$ vidíme, že v bodech $[0,0]$ a $[2,0]$ nelze aplikovat větu o implicitních funkcích. V ostatních bodech „lokálně" $y$ je fcí $x$. V těchto bodech

$$y'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} = - \frac{2(x-1)}{2y} = - \frac{x-1}{y}$$

Hodnota udává směrnici tečny v bodě $[x,y]$ ležící na $F(x,y) = 0$.

▨

Dk Věty 8.29 Transformací počátku souřadného systému lze zajistit, že $(\vec{x}_0,\vec{y}_0) = (\vec{0},\vec{0})$. Protože matice $\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\vec{0},\vec{0})\right)_{i,j=1}^{m}$ má nenulový determinant, existuje matice inverzní, kterou označíme $\Gamma(\vec{0},\vec{0})$.

tj. $\underbrace{\Gamma}_{\text{GAMMA}}(\vec{0},\vec{0}) := \left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\vec{0},\vec{0})\right)\right]^{-1}$.

Pro každé $\vec{x} \in U$ definujeme

$T_{\vec{x}} : V \to \mathbb{R}^m$ předpisem $\boxed{T_{\vec{x}}(\vec{y}) := \vec{y} - \Gamma(\vec{0},\vec{0})\vec{F}(\vec{x},\vec{y})}$

Cílem je ukázat, že $T$ má jediný pevný bod. Důvod / motivace pro násobení $\vec{F}$ zleva maticí $\Gamma$ plyne z diskuse před větou 8.29 resp. z nahrazení $\vec{F}(\vec{x},\vec{y})$ "linearizací" $\underbrace{F(\vec{0},\vec{0})}_{=0} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)\Big|_{(\vec{0},\vec{0})} y_j$

Zbývá ověřit dva předpoklady $(\alpha)$ a $(\beta)$ modifikované Banachovy věty 8.28.

$\boxed{\text{Ad }(\alpha)}$ $$|T_{\vec{x}}(\vec{y}^1) - T_{\vec{x}}(\vec{y}^2)|_{\mathbb{R}^m} = |(\vec{y}^1-\vec{y}^2) - \Gamma(0,0)[\vec{F}(\vec{x},\vec{y}^1) - \vec{F}(\vec{x},\vec{y}^2)]|_{\mathbb{R}^m}$$

$$= \left|\Gamma(0,0)\left[\left(\vec{F}(\vec{x},\vec{y}^1) - \vec{F}(\vec{x},\vec{y}^2)\right) - \left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0,0)\right](y^1-y^2)_j\right]\right|_{\mathbb{R}^m}$$

$$\overset{\text{LVOSH}}{\leq} \underbrace{\|\Gamma(0,0)\|}_{\overset{!!}{C}} \underbrace{\left|\left(\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial y_j}(x,\vec{y}^*) - \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0,0)\right)(y^1_j - y^2_j)\right|_{\mathbb{R}^m}}_{\text{ze spojitosti lze udělat malé}}$$

Tedy:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\quad \forall \vec{y}^1,\vec{y}^2 \in V_\delta(0) \text{ a } \forall x \in U_\delta(0)$$

$$|T_{\vec{x}}(\vec{y}^1) - T_{\vec{x}}(\vec{y}^2)|_{\mathbb{R}^m} \leq C\varepsilon|\vec{y}^1-\vec{y}^2|_{\mathbb{R}^m}$$

Speciálně, pro $\varepsilon = \frac{q}{C}$ s $q \in (0,1)$ dostáváme, že $T_{\vec{x}}$ je kontrakce.

$\boxed{\text{Ad }(\beta)}$ $$|T_{\vec{x}}(\vec{0})| = \|\Gamma(0,0)\|\,|\vec{F}(\vec{x},0)| = \|\Gamma(0,0)\|\,|\vec{F}(\vec{x},\vec{0}) - F(\vec{0},\vec{0})| \leq \tilde{C}|\vec{x}| < \tilde{\varepsilon}$$

Tak pro $\tilde{\varepsilon} = \delta(1-q)$ $\exists\, \theta$ $(\theta<\delta)$ tak, že $|T_{\vec{x}}(0)| \leq \delta(1-q)$ $\forall \vec{x} \in U_\theta(\vec{0})$.

Speciálně

Pak dle Věty 8.28: $\forall \vec{x} \in U_\theta(0)\ \exists!\, \vec{y} \in \overline{V_\delta(0)}$ splňující $T_{\vec{x}}\vec{y} = \vec{y}$, tj. $\boxed{\vec{F}(\vec{x},\vec{g}(x)) = 0.}$

Označíme $\vec{g}$ zobrazení: $x \mapsto !y$

$\vdash$ Hladkost $\vec{g}$ plyne z hladkosti $\vec{F}$ a z věty o střední hodnotě 8.16:

$$0 = \vec{F}(\vec{x}+t\vec{e}_j, g(\vec{x}+t\vec{e}_j)) - \vec{F}(\vec{x},g(\vec{x})) = \frac{\partial F}{\partial x_j}(\vec{x},\vec{y})t + \frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x},\vec{y})[g(\vec{x}+t\vec{e}_j) - g(\vec{x})],$$ které umožňují vyjádřit $\frac{g(x+te_j)-g(x)}{t}$

S implicitními funkcemi úzce souvisí <u>ODR 1. řádu ve tvaru totálního diferenciálu</u>. Nechť

(5) $\qquad f(x,y) = 0 \quad$ v $\quad \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ otevřené

a nechť má $f$ v libovolném bodě $(x,y) \in \mathcal{U}$ totální diferenciál.
Pak plyne z (5):

(6) $\qquad df(x,y)(h_1,h_2) = 0 \qquad \forall \vec{h} = (h_1,h_2)$

resp.

(6') $\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, h_2 = 0$

Označíme-li "přírůstky" $(h_1,h_2)$ symboly $(dx, dy)$, tak máme

(6'') $\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dy = 0$

což mohu ztotožnit s ODR 1. řádu

(7) $\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, y'(x) = 0$

a to buď formálně, podělíme-li (6'') nenulovým přírůstkem $dx$ a ztotožníme $\frac{dy}{dx}$ s $y'$, nebo s využitím věty o implicitních funkcích (v bodech, kde ji použít mohu*).

Toto pozorování můžeme využít k řešení rovnic typu

(8) $\qquad \underline{M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0} \quad \begin{array}{l} \nearrow \ \underline{M(x,y) + N(x,y)\,y'(x) = 0} \\ \searrow \ \underline{M(x,y)\,x'(y) + N(x,y) = 0} \end{array}$

Pokud bychom věděli, že k (vektorovému) poli $(M(x,y), N(x,y))$ existuje skalární funkce (<u>potenciál</u>) $f$ tak, že $\boxed{\nabla f(x,y) = (M(x,y), N(x,y))}$ pak <u>$f(x,y) = 0$ je řešení</u> rovnice (8) zapsané v implicitním tvaru.

<u>Příklad</u> ① Rovnice ve tvaru separovaných proměnných: $\frac{dy}{dx} = h(x)g(y)$

<u>Řešení</u> Na intervalech, kde $g \neq 0$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = h(x)g(y) \iff \frac{1}{g(y)}\,dy = h(x)\,dx \iff h(x)\,dx - \frac{1}{g(y)}\,dy = 0$$

$H$ je P.F. k $h$
$G$ je P.F. k $\frac{1}{g}$

$$\iff \boxed{H(x) - G(y) + C = 0} \quad \text{kde } \boxed{f(x,y) := H(x) - G(y) + C} \text{ je hledaný potenciál.}$$

■

*) Tam, kde ji využít nemohu lze však (obecně) nahlédnout $x = x(y)$.

(2) Najděte řešení rovnice

(PÚ) $$5x^4y + 2x^3y^2 + (x^5 + x^4y + 2y)\,y' = 0 \quad \text{a} \quad y(0) = 1$$

**Řešení** Jedná se o počáteční úlohu pro (nelineární obyč. dif.) rovnici 1. řádu.

Rovnice má tvar (8), kde

$$M(x,y) = 5x^4y + 2x^3y^2 \quad \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$
$$N(x,y) = x^5 + x^4y + 2y \quad \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

Hledáme potenciál $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tak, aby $\nabla f = (M,N)$ tj.

$$(9_1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 5x^4y + 2x^3y^2$$

$$(9_2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^5 + x^4y + 2y$$

Odsud, resp. z $(9_1)$, dostáváme

obecná funkce závislá na proměnné $y$.

$$(10) \qquad f(x,y) = x^5y + \frac{1}{2}x^4y^2 + C(y)$$

Po dosazení (10) do $(9_2)$ máme:

$$x^5 + x^4y + C'(y) = x^5 + x^4y + 2y,$$

což implikuje

$$C'(y) = 2y$$

a tedy

$$C(y) = y^2 + C \qquad \text{kde } C \in \mathbb{R} \text{ je libovolné.}$$

Odsud a z (10) plyne, že potenciál

$$f(x,y) = x^5y + \frac{1}{2}x^4y^2 + y^2 + C$$

splňuje $\boxed{f(x,y) = 0}$ a dává obecný tvar řešení (zadané) ODR.

Počáteční podmínka $y(0)=1$ vede k rovnici

$$f(0,1) = 1 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -1$$

Tedy řešení počáteční úlohy lze psát ve tvaru

$$(11) \qquad \boxed{\left(\frac{1}{2}x^4 + 1\right)y^2 + x^5y - 1 = 0}$$

což можно dále analyzovat přes větu o implicitní funkci a řešením kvadratické rovnice. To druhé dává

$$y(x) = \frac{-x^5 \pm \sqrt{x^{10} + 2(x^4+2)}}{x^4+2}$$

přičemž $y(0)=1$ je splněna jen pokud
$$\underline{\underline{y(x) = \frac{-x^5 + \sqrt{x^{10} + 2(x^4+2)}}{x^4+2}}}$$

Z Věty o implicitní funkci a z (11) plyne, že y lze psát jako funkci x pokud $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$. Avšak z (11):

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^4+2)y + x^5 = 0 \iff y = -\frac{x^5}{x^4+2}$$

což po dosazení do (11) dává $\frac{1}{2}\frac{x^{10}}{x^4+2} - \frac{x^{10}}{x^4+2} - 1 = 0 \iff \frac{1}{2}\frac{x^{10}}{x^4+2} + 1 = 0$

což nikdy nenastane.

<u>Tedy vždy lze lokálně psát $y = y(x)$.</u>

---

Předchozí úvahy nás vedou k jedné <u>otázce</u> a jednomu <u>rozšíření</u>.

Není pravda, že k danému vektorovému poli $(M,N)$ existuje vždy potenciál $f$ (tak, aby $\nabla f = (M,N)$). <u>Otázka zní</u>:

- Za jakých podmínek existuje potenciál k danému vektorovému poli? Tuto otázku lze řešit i pro vícerozměrné pole $(T_1,\dots,T_N): \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$.

<u>Rozšíření</u> metody totálního diferenciálu pro řešení rovnic typu (8) spočívá ve vynásobení rovnice (8) vhodným integračním faktorem $\mu = \mu(x,y)$, který obvykle volíme ve tvaru

$$\mu(x,y) = m(\phi(x,y))$$

kde $\phi(x,y)$ je zvolena na základě naší intuice, pokusů a omylů. Např. $\phi(x,y) = x$, $\phi(x,y) = y$, $\phi(x,y) = xy$, $\phi(x,y) = x+y$.

- <u>Otázka zní</u>: jak nalézt $m$?

Obě tyto otázky spolu souvisí a odpověď (byť částečnou) dává následující tvrzení.

<u>Tvrzení</u> (NUTNÁ PODMÍNKA EXISTENCE POTENCIÁLU) Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ otevřená a $\vec{T} \in [C^1(\Omega)]^N$. Pokud má $T = (T_1,\dots,T_N)$ potenciál, pak platí

(*) $$\frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \quad \text{v } \Omega \quad (\text{pro všechna } i,j = 1,\dots,N).$$

Dk. Z existence potenciálu plyne: $\nabla U = \vec{T} \in [C^1(\Omega)]^N$ a tedy $U \in C^2(\Omega)$ a dle Věty o záměně derivací platí $\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i}$ v $\Omega$.

Což však dává tvrzení. ☺.

Pozoruhodné je, že podmínka (*) je za <u>některých</u> situacích také podmínka postačující. Platí:

<u>Tvrzení</u> (POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA EXISTENCE POTENCIÁLU).

Nechť (i) $\Omega = (a_1,b_1)\times \dots \times (a_N,b_N)$ $\left(\begin{array}{c}-\infty \le a_i < b_i \le +\infty \\ i=1,\dots,N\end{array}\right)$

(ii) $\vec{T} = (T_1,\dots,T_N) \in \left[C^1(\Omega)\right]^N$

(iii) $\dfrac{\partial T_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial T_j}{\partial x_i}$ v $\Omega$

Pak $\vec{T}$ má potenciál, tzn. $\exists\, U: \Omega \to \mathbb{R}$ $\nabla U = \vec{T}$ v $\Omega$. ▨

Dk Skripta Černý, Pokorný. str. 166, 167.

<u>Příklad</u> (který ukazuje, že (*) není obecně postačující.)

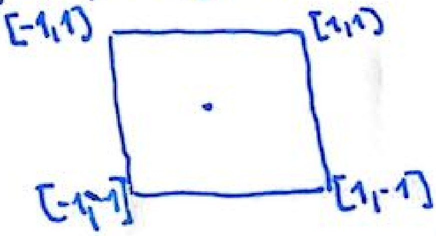
Buď $\vec{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definováno jen v $\underline{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ předpisem

(♣) $$\vec{T}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Pak $\vec{T} \in \left[C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\})\right]^2$ splňuje $\dfrac{\partial T_1}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{\partial T_2}{\partial x}(x,y)$

Kdyby existoval potenciál $U$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ tak, by mělo platit

$$0 = U(1,1) - U(-1,1) + \underbrace{U(-1,1) - U(-1,-1)}_{} + U(-1,-1) - U(1,-1) + U(1,-1) - U(1,1)$$




$$\overset{\text{Newtonův vzorec}}{=} \int_{-1}^{1} \frac{\partial U}{\partial x_1}(s,1)\,ds + \int_{-1}^{1} \frac{\partial U}{\partial x_2}(-1,s)\,ds + \int_{-1}^{1} \frac{\partial U}{\partial x_1}(s,-1)\,ds + \int_{-1}^{1} \frac{\partial U}{\partial x_2}(1,s)\,ds$$

dosadím (♣) a provedu integraci $= -2\pi$. ↯ potenciál neexistuje. ▨

Z pohledu druhé otázky (jak nalézt $m$ u metody integračního faktoru) nám <u>předchozí tvrzení</u> říká, že $m$ musí splňovat

(12) $$\boxed{\frac{\partial}{\partial y}\Big(m(\phi(x,y))\,M(x,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(m(\phi(x,y))\,N(x,y)\Big)}$$

kde $M, N$ jsou funkce v rovnici (8).

Z (12) dostáváme derivováním ODR pro $m$ ve tvaru:

$$m'(\phi(\cdot\cdot))\frac{\partial\phi}{\partial y}(\cdot\cdot)M(\cdot\cdot) + m(\phi(\cdot\cdot))\frac{\partial M}{\partial y}(\cdot\cdot) = m'(\phi(\cdot\cdot))\frac{\partial\phi}{\partial x}(\cdot\cdot)N(\cdot\cdot) + m(\phi(\cdot\cdot))\frac{\partial N}{\partial x}(\cdot\cdot),$$

která implikuje

$$(13)\qquad \frac{m'(\phi(\cdot\cdot))}{m(\phi(\cdot\cdot))} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x}(\cdot\cdot) - \frac{\partial M}{\partial y}(\cdot\cdot)}{\frac{\partial\phi}{\partial y}(\cdot\cdot)M(\cdot\cdot) - \frac{\partial\phi}{\partial x}(\cdot\cdot)N(\cdot\cdot)}.$$

Pokud lze pravou stranu této rovnici zapsat ve tvaru $h(\phi(\cdot\cdot))$, pro vhodně nalezené $\phi$, tak (13) implikuje

$$m(\phi(\cdot\cdot)) = e^{H(\phi(\cdot\cdot))} \qquad \text{kde } H(z) \text{ je primitivní fce k } h(z).$$

Ilustrujme si tuto metodu na příkladě.

<u>Příklad</u> 3 Najděte obecné řešení rovnice $(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}) + (x^2+y^2)y' = 0$.

<u>Řešení</u>: Označíme-li $M(x,y) = 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}$ a $N(x,y) = x^2+y^2$, vidíme, že

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 2x + x^2 + y^2 \neq 2x = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$ a potenciál neexistuje.

Zkusíme tedy metodu integračního faktoru a po dosazení do (13) dostáváme:

$$\frac{m'(\phi(x,y))}{m(\phi(x,y))} = \frac{-(x^2+y^2)}{\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)\left[2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right] - \frac{\partial\phi}{\partial x}\left[x^2+y^2\right]}$$

Pravá strana se výrazně zjednoduší zvolíme-li $\phi(x,y) = x$. Pak

$$\frac{m'(x)}{m(x)} = 1 \quad \text{a tedy} \quad m(x) = e^x.$$

Nyní víme, že k poli $\left(e^x M(x,y), e^x N(x,y)\right)$ existuje potenciál $U$.

Platí

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) \quad \text{a} \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = e^x(x^2+y^2)$$

Z druhé rovnice ihned plyne $U(x,y) = e^x\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + C(x)$.

Zderivováním podle $x$ a porovnáním s první rovnicí pak máme:

$$e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) = e^x\left(x^2y + \frac{y^3}{3} + 2xy\right) + C'(x),$$

což implikuje $C'(x) = 0$ a tedy $C(x) = C$.

Hledané <u>řešení má tedy tvar</u>:

$$\boxed{e^x\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + C = 0}$$

Dle věty o implicitních funkcích $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 0 \Leftrightarrow [x,y] = (0,0)$.

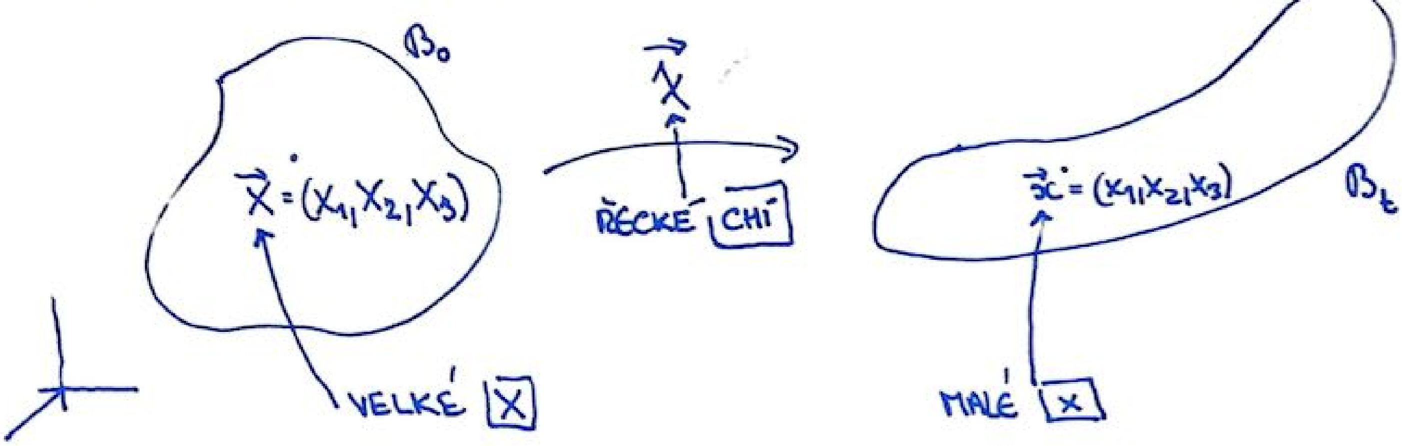
$C$ je třeba volit různé od 0. ◼

## 8.7.3 Věta o inverzním zobrazení

V mechanice pevných látek se zkoumají deformace těles. Pokud mě zajímá výchozí a koncový stav tohoto procesu, lze jej popsat zobrazením

$$\vec{\chi} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

které otevřené množině $\mathcal{B}_0 \subset \mathbb{R}^d$ přiřadí $\vec{\chi}(\vec{\mathcal{B}}_0) =: \mathcal{B}_t$




Předpokládá se, že při popisu (elastických) deformací těles nedochází k trhlinám, rozdělení těles, atd. Naopak se požaduje, že (alespoň lokálně) existuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi $\vec{X}$ a $\vec{x}$, tedy zobrazení $\vec{\chi}$ má inverzní zobrazení.

[ Protože písmena $\vec{X}, \vec{x}$ a $\vec{\chi}$ mohou vést k záměně, budeme dále psát $\vec{f}$ místo $\vec{\chi}$.

Definice Buď $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $M \subset \mathbb{R}^d$. Řekneme, že

$f$ je regulární zobrazení v $M \overset{df.}{\equiv}$
(i) $M$ je otevřená
(ii) $f \in C^1(M)^d$
(iii) $\det Df(x) \neq 0 \quad \forall x \in M$

Zde:

$$Df(x) := \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_d}{\partial x_1}(x), & \dots, & \frac{\partial f_d}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix}}_{\text{Jakobiho matice}}, \quad \det Df(x) \dots \text{Jakobián.}$$

$\parallel \leftarrow$ také

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_d)}{\partial(x_1, \dots, x_d)}(x)$$

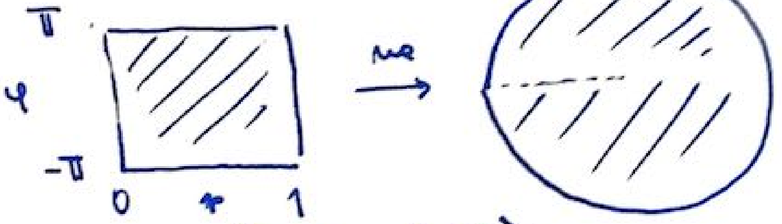
**Příklady** ① <u>Polární souřadnice</u> $\quad x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$\boxed{f : (r,\varphi) \to (x,y)}$$

$$(0,+\infty)\times(-\pi,\pi) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0);\ x\in(-\infty,0)\}$$

nebo

$$(0,1)\times(-\pi,\pi) \xrightarrow{\text{na}} B_1(0) \setminus \{(x,0);\ x\in(-1,0)\}$$



$$\det\left[Df(r,\varphi)\right] = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r > 0$$

[Tedy $f$ je regulární zobrazení na $(0,+\infty)\times(-\pi,\pi)$]

② <u>Sférické souřadnice</u>: $f : (r,\psi,\varphi) \mapsto (x,y,z)$ je dáno předpisem

$$x = r\cos\psi\cos\varphi$$
$$y = r\cos\psi\sin\varphi$$
$$z = r\sin\psi$$

$$: \underbrace{(0,\infty)\times\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right)\times(-\pi,\pi)}_{M} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z);\ x\le 0\}$$

$$\det\left[Df(r,\psi,\varphi)\right] = \det\begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi & -r\sin\psi\cos\varphi & -r\cos\psi\sin\varphi \\ \cos\psi\sin\varphi & -r\sin\psi\sin\varphi & r\cos\psi\cos\varphi \\ \sin\psi & r\cos\psi & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$= -r^2\cos\psi \neq 0 \text{ na } M \Rightarrow \underline{f \text{ je regulární na } M.}$$

③ <u>Válcové (cylindrické) souřadnice</u> $\quad f : (r,\varphi,h) = (x,y,z)$ definujeme předpisem

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad z = h \ : \underbrace{(0,+\infty)\times(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}}_{M} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z);\ x\le 0\}$$

$$\det\left[Df(r,\varphi,h)\right] = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r > 0$$

Tedy opět $f$ je regulární na $M$.

**Věta 8.30** (o inverzním zobrazení – lokální verze)

Buď $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ regulární zobrazení na $\mathcal{U}(a)$ pro $a \in \mathbb{R}^d$.
Pak $\exists\ \mathcal{U}_\delta(a) \subset \mathcal{U}(a)$ tak, že

(i) $f$ je prosté na $\mathcal{U}_\delta(a)$

(ii) $f(\mathcal{U}_\delta(a))$ je otevřená v $\mathbb{R}^d$

(iii) označíme-li $g$ inverzní zobrazení k $f|_{\mathcal{U}_\delta(a)}$,

$$\text{pak} \quad g \in C^1(f[\mathcal{U}_\delta(a)])^d$$

(iv) Platí $\det(Df(x)) \det(Df^{-1}(f(x))) = 1$ neboli

$$\det(Dg(f(x))) = \frac{1}{\det(Df(x))}$$

(v) Pokud $f \in C^k(\mathcal{U}(a))^d$, pak $g = f^{-1} \in C^k(f[\mathcal{U}_\delta(a)])^d$

---

Dk Je založen na větě o implicitní funkci, kde definujeme

$F_i(x,y) := y_i - f_i(x) \qquad i = 1, \dots, d$

[Máme ekvivalenci pro inverzní zobr. $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$]

$\Rightarrow$

- $F_i(a, f(a)) = 0$
- $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{d}(a, f(a)) = \det(Df(a)) \neq 0$ dle předp.

Dle věty o implicitní funkci dostáváme na okolí vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi $y$ a $x$ (pro $\forall y \in \mathcal{U}_\delta(f(a))$ $\exists!\ x \in \mathcal{U}_\Delta(a)$) tak, že

$$\boxed{0 = F_i(x,y) = y_i - f_i(x) \quad i = 1, \dots, d}$$

Označme toto $x$ buď $g(y)$ nebo $f^{-1}(y)$. Pak $g \in C^1(\mathcal{U}_\delta(f(a)))^d$.

Protože $f$ je spojité v $a$, $\exists\ \delta \in (0, \Delta)$ tak, že

$$f(x) \in \mathcal{U}_\delta(f(a))$$

Nyní již $f$ je prosté na $\mathcal{U}_\delta(a)$ a zobrazuje do $\mathcal{U}_\delta(f(a))$

[a víme, že $\forall y \in \mathcal{U}_\delta(f(a))\ \exists!\ x \in \mathcal{U}_\Delta(a)$]

Tedy $f$ zobrazuje prostě $\mathcal{U}_\delta(a)$ na $f[\mathcal{U}_\delta(a)]$

Máme tedy $g := f^{-1}$.

• Dokažme, že $f[\mathcal{U}_\delta(a)]$ je otevřená.

Je-li $y \in f[\mathcal{U}_\delta(a)]$ a $x \in \mathcal{U}_\delta(a)$ takový, že $f(x) = y$ tj. $y = f^{-1}(x) = g(x)$

~~...~~

tedy $y \in \mathcal{U}_\delta(f(a))$ a protože $g = f^{-1}$ je spojité na $f(\mathcal{U}_\delta(a))$

plyne $\exists\, \mathcal{U}_\eta(y) \subset \mathcal{U}_\delta(f(a))$

tak, že $\underset{f^{-1}}{\overset{\shortparallel}{g}}(\mathcal{U}_\eta(y)) \subset \mathcal{U}_\delta(a)$.

Tedy $\mathcal{U}_\eta(y) \subset f[\mathcal{U}_\delta(a)]$ a $f[\mathcal{U}_\delta(a)]$ je otevřená.

• Tvrzení (iv) plyne z řetízkového pravidla:

Protože $f^{-1}(f(x)) = x$ v $\mathcal{U}_\delta(a)$

tak

$$D_x\left(f^{-1}(f(x))\right) = \mathbb{I}_d$$

$$\shortparallel$$

$$D_y f^{-1}(y)\Big|_{y=f(x)} D_x f(x) = \mathbb{I}$$

Aplikací determinantů dostávám (iv) $\square$

$\boxed{\text{Věta 8.31}}$ (O inverzním zobrazení – globální verze)

Buď $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ regulární na $M \subset \mathbb{R}^d$. Pak

(i) $f(M)$ je otevřená

(ii) $f$ je lokálně prosté; $\forall x \in M\ \exists\, \mathcal{U}(x)$ $f|_{\mathcal{U}(x)}$ je prosté.

Je-li navíc <u>$f$ prosté na $M$</u>, odpovídající inverzní zobrazení je regulární na $f(M)$ a platí

• $D f^{-1}(y)\Big|_{y=f(x)} D f(x) = \mathbb{I}$ Matice jsou navzájem inverzní

• vztah (iv) předchozí věty

• $f \in C^k(M)^d \Rightarrow f^{-1} \in C^k(f(M))^d$.

(Dk) Plyne z předchozí věty a důkazu.

**8.7.4** Lagrangeova věta o vázaných extrémech (či o multiplikátorech) podruhé.

**Věta 8.31** Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $f : \Omega \to \mathbb{R}$ a $\vec{g} = (g_1, \dots, g_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ takové, že

(21) $f \in C^1(\Omega)$, $\vec{g} \in [C^1(\Omega)]^m$ a $1 \le m < d$.

Označme $A := \{x \in \Omega;\ \vec{g}(x) = \vec{0}\}$. Buď $x^0 \in \Omega$ extremální bod $f$ vzhledem k vazbám $\vec{g}(x) = \vec{0}$, tzn.,

(22) $f(x^0) = \max_{x \in A} f(x)$ resp. $f(x^0) = \min_{x \in A} f(x)$.

Nechť existuje $m$ sloupců Jacobiho matice $Dg(x^0)$, která je typu $m \times d$, tak, že determinant takto vybrané matice $D^* g(x^0)$ typu $m \times m$ je nenulový. Jinými slovy, předpokládáme, že

(23) $\dfrac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(x_1, \dots, x_d)}(x^0)$ má hodnost $m$.

Pak existuje $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ (vektor Lagrangeových multiplikátorů) tak, že

$$\nabla f(x^0) - (\vec{\lambda}, \nabla \vec{g}(x^0)) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell \frac{\partial g_\ell(x^0)}{\partial x_i} = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

Poznámka Je-li $x^0 = (x^0_1, \dots, x^0_d)$ a $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ vázaný extrém, pak lze uvažovat kvadratickou formu

(24) $d^2 f(x^0)(h, h) + \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell d^{(2)} g_\ell(x^0)(h, h)$ pro každé $h \in \mathbb{R}^d$.

Ze vztahu

$\nabla g_\ell(x^0) \cdot h = 0$ platný pro každé $h \in \mathbb{R}^d$

spočteme $h_1, \dots, h_m$ v závislosti na $h_{m+1}, \dots, h_d$ a dosadíme tyto vazby do (24). Ze znaménka takto upravené kvadratické formy zjistíme zda $f$ má v $x^0$ minimum resp. maximum vzhledem k vazební podmínce dané množinou $A$.

(DK) již dříve pro $d=2$ a $m=1$. Nyní $d>1$ a $m=1$ pro jednoduchost.
Protože $m=1$, z (2.3) plyne existence alespoň jedné nenulové složky $\nabla g(x^0)$. Nechť je to $d$-tá složka, tj. $\frac{\partial g}{\partial x_d}(x^0) \neq 0$. Pak z věty o implicitních funkcích plyne existence $\mathcal{U}((x^0)')$, kde $(x^0)' = (x_1^0, \dots, x_{d-1}^0)$, taková, že $\forall x' = (x_1, \dots, x_{d-1}) \in \mathcal{U}((x^0)')$ existuje právě jedno $x_d$: $g(x', x_d(x')) = 0$.

Definujme $\lambda$ vztahem:
$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_d}(x^0)}{\frac{\partial g}{\partial x_d}(x^0)}.$$
Chceme ukázat, že i pro $i = 1, \dots, d-1$ platí

(25) $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(x^0) = 0.$$

Protože však $f(x', x_d(x'))$ má v $(x^0)'$ extrém, tak platí

(26) $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) + \frac{\partial f}{\partial x_d}(x^0) \frac{\partial x_d}{\partial x_i}(x^0) = 0 \quad (i = 1, \dots, d-1).$$

Derivací vztahu $g(x', x_d(x')) = 0$ pak máme (po dosazení $(x^0)'$ za $x'$)

(27) $$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^0) + \frac{\partial g}{\partial x_d}(x^0) \frac{\partial x_d}{\partial x_i}((x^0)'). \quad (i = 1, \dots, d-1).$$

Porovnáním (26) a (27) dostáváme (25). ▨.

---

__Příklad__ Uvažujme $f(x) = (Ax, x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, kde $A$ je symetrická, a hledejme maximum a minimum $f$ na jednotkové sféře $S$, dané pomocí
$$S = \{x \in \mathbb{R}^d;\ |x|^2_{E,\mathbb{R}^d} - 1 = 0 \iff \sum_{i=1}^d x_i^2 - 1 = 0\}.$$

__Řešení__ Označme $g(x) := \sum_{i=1}^d x_i^2 - 1$. Pak $g, f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.
Nutná podmínka $\nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = 0$ na extrém má pak tvar
$$2(A\vec{x} - \lambda \vec{x}) = 0 \iff (A - \lambda I)\vec{x} = 0$$
neboli podezřelé body jsou vlastní vektory matice $A$. Protože v těchto bodech (tj. ve vlastních vektorech)
$$f(x) = (Ax, x) = \lambda(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda |\vec{x}|^2_{E,\mathbb{R}^d} = \lambda,$$
tak vidíme:

- $f$ nabývá maxima v vlastním vektoru matice $A$ odpovídající největšímu vlastnímu číslu.
- $f$ nabývá minima v vlastním vektoru matice $A$ odpovídající nejmenšímu vlastnímu číslu.