Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale přesně odůvodněte. V případě studia číselných řad doslovně uveďte jaké kritérium používáte při studiu konvergence. Ve výpočtech můžete bez dalšího komentáře používat známé výsledky ohledně konvergence řad $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, vlastnosti řad $\sum_{n=1}^{N} \sin(nx)$, $\sum_{n=1}^{N} \cos(nx)$, a dále Taylorovy rozvoje elementárních funkcí.

Jméno: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	5	6	**Celkem bodů**
Bodů	6	6	6	6	6	6	36
Získáno							

[6] 1. Najděte pomocí Taylorova polynomu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - \arctan x}{x^3}.$$

Řešení:

Jelikož ve jmenovateli máme x^3, stačí určit Taylorovy polynomy funkcí arcsin a arctan stupně 3 v bodě $x = 0$. Platí

$$\begin{aligned}
\arcsin 0 &= 0,\\
(\arcsin x)'\big|_{x=0} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\bigg|_{x=0} = 1\\
(\arcsin x)''\big|_{x=0} &= -\frac{1}{2}\frac{-2x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\bigg|_{x=0} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\bigg|_{x=0} = 0\\
(\arcsin x)'''\big|_{x=0} &= \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x)}{(1-x^2)^3}\bigg|_{x=0} = \frac{(1-x^2) - \frac{3}{2}x(-2x)}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}\bigg|_{x=0}\\
&= \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}\bigg|_{x=0} = 1
\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
\arctan 0 &= 0,\\
(\arctan x)'\big|_{x=0} &= \frac{1}{1+x^2}\bigg|_{x=0} = 1,\\
(\arctan x)''\big|_{x=0} &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\bigg|_{x=0} = 0,\\
(\arctan x)'''\big|_{x=0} &= -\frac{2(1+x^2)^2 - 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}\bigg|_{x=0} = -\frac{2(1+x^2) - 8x^2}{(1+x^2)^3}\bigg|_{x=0}\\
&= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}\bigg|_{x=0} = -2.
\end{aligned}$$

Tudíž

$$\begin{aligned}
\arcsin x &= x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3),\\
\arctan x &= x - \frac{2x^3}{3!} + o(x^3),\\
\arcsin x - \arctan x &= \left(\frac{1+2}{6}\right)x^3 + o(x^3) = \frac{x^3}{2} + o(x^3),\ x \to 0.
\end{aligned}$$

To znamená, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - \arctan x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

[6] 2. Najděte $a \in \mathbb{R}$ tak, aby existovala vlastní limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\cos(x+y) + axy}{x^2+y^2}$$

a tuto limitu určete.

Řešení:

Položme $y = kx$, pak limita přejde na

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos(x(1+k)) + akx^2}{(1+k^2)x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1 - \frac{(1+k)^2x^2}{2!} + o(x^2)\right) + akx^2}{(1+k^2)x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1 - \frac{(1+k)^2x^2}{2!} + o(x^2)\right) + akx^2}{(1+k^2)x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{(1+k)^2x^2}{2} + o(x^2) + akx^2}{(1+k^2)x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-(1+2k+k^2)x^2 + 2akx^2 + o(x^2)}{2(1+k^2)x^2} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{ak-k}{1+k^2}.
\end{aligned}$$

Vidíme, že limita nezávisí na k jen pro $a = 1$. Pro tuto hodnotu a počítejme dále

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\cos(x+y) + xy}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to 0^+} \frac{\ln\cos(r(\cos\varphi + \sin\varphi)) + r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} \\
&= \lim_{r\to 0^+} \frac{\ln\left(1 - \frac{r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2}{2!} + o(r^2)\right) + r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} \\
&= \lim_{r\to 0^+} \frac{-\frac{r^2(1+2\cos\varphi\sin\varphi)}{2!} + o(r^2) + r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} \\
&= \lim_{r\to 0^+} \frac{-\frac{r^2}{2} + o(r^2)}{r^2} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Vidíme, že pro $a = 1$ limita skutečně existuje a rovná se $-\frac{1}{2}$.

[6] 3. Rozhodněte, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) n^{\alpha}.$$

Řešení:

Pro $n \geq 1$ platí $0 < \frac{1}{n} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ a tedy $0 < \cos \frac{1}{n} < 1$. Platí $(1 - \cos \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n^2}$ pro $n \to +\infty$ a tedy

$$\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) n^{\alpha} \sim n^{\alpha - 2}, \ n \to +\infty.$$

Z limitního srovnávacího kritéria pro řady s kladnými členy tedy plyne, že studovaná řada konverguje právě tehdy, když $\alpha - 2 < -1 \Leftrightarrow \alpha < 1$.

[6] 4. Nechť $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definována předpisem $F(x,y) = \dfrac{x^6}{2} + \dfrac{y^4}{4} - x + y - 1$ a nechť $\varphi : (0,1) \to \mathbb{R}^+$ je spojitá funkce splňující $F(x, \varphi(x)) = 0$, $x \in (0,1)$. Rozhodněte o platnosti následujících výroků:

1. φ je C^2 na nějakém okolí bodu $\frac{1}{2}$,
2. φ je monotonní na nějakém okolí bodu $\frac{1}{2}$,
3. φ je konvexní na na nějakém okolí bodu $\frac{1}{2}$.

Řešení:

Platí, že F je C^2 na $\mathbb{R}^2$. Pro použití věty o implicitní funkci potřebujeme ještě spočítat hodnotu $\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{1}{2}, \varphi(\frac{1}{2}))$. Platí

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = y^3 + 1,$$

a tedy

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\tfrac{1}{2}, \varphi(\tfrac{1}{2})\right) = (\varphi(\tfrac{1}{2}))^3 + 1 \neq 0,$$

protože $\varphi(\frac{1}{2}) > 0$ podle předpokladů. Podle věty o implicitní funkci tedy existují $\delta, \Delta > 0$ a C^2 funkce $\xi : (\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta) \to (\varphi(\frac{1}{2}) - \Delta, \varphi(\frac{1}{2}) + \Delta)$, že $\xi(\frac{1}{2}) = \varphi(\frac{1}{2})$ a

$$\{(x, \xi(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in (\tfrac{1}{2} - \delta, \tfrac{1}{2} + \delta)\} = \{(x,y) \in (\tfrac{1}{2} - \delta, \tfrac{1}{2} + \delta) \times (\varphi(\tfrac{1}{2}) - \Delta, \varphi(\tfrac{1}{2}) + \Delta) : F(x,y) = 0\}.$$

Protože je φ spojitá, existuje $U \subseteq (\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta)$, okolí bodu $\frac{1}{2}$, že $\varphi(x) \in (\varphi(\frac{1}{2}) - \Delta, \varphi(\frac{1}{2}) + \Delta)$ a tedy $\varphi = \xi$ na U, což dává, že φ je C^2 na U. Výrok (1) je tedy pravdivý.

Protože platí $F(x, \varphi(x)) = 0$, $x \in (0,1)$ a φ je C^2 na $(0,1)$, platí

$$3x^5 + (\varphi(x))^3 \varphi'(x) - 1 + \varphi'(x) = 0 \quad \text{a} \quad 15x^4 + 3(\varphi(x))^2(\varphi'(x))^2 + (\varphi(x))^3 \varphi''(x) + \varphi''(x) = 0$$

a tedy

$$\varphi'(\tfrac{1}{2}) = \frac{1 - 3(\frac{1}{2})^5}{(\varphi(\frac{1}{2}))^3 + 1} > 0 \quad \text{a} \quad \varphi''(\tfrac{1}{2}) = -\frac{15(\frac{1}{2})^4 + 3(\varphi(\frac{1}{2}))^2(\varphi'(\frac{1}{2}))^2}{(\varphi(\frac{1}{2}))^3 + 1} < 0$$

První rovnice a fakt, že φ je C^2 (stačí C^1), dává, že φ' je kladná na nějakém okolí bodu $\frac{1}{2}$ a tedy φ je rostoucí na okolí bodu $\frac{1}{2}$ a výrok (2) je pravdivý.

Druhá rovnice a fakt, že φ je C^2, dává, že φ'' je záporná na nějakém okolí bodu $\frac{1}{2}$ a tedy φ je ryze konkávní na okolí bodu $\frac{1}{2}$ a výrok (2) je nepravdivý.

[6] 5. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' + 2xy = \frac{4x}{y}$. (Nápověda: Jde o Bernoulliho rovnici $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$ pro $p(x) = 2x$, $q(x) = 4x$ a $\alpha = -1$. Zaveďte substituci $z = y^2$.)

Řešení:

Rovnici přenásobíme výrazem $2y$, dostanete rovnici $2yy' + 4xy^2 = 8x$. Jelikož $z' = 2yy'$ a tedy rovnice má po substituci tvar $z' + 4xz = 8x$, což je lineární rovnice 1. řádu, tj. rovnice tvaru $z' + a(x)z = b(x)$ pro $a(x) = 4x$ a $b(x) = 8x$.

Integrací dostaneme $A(x)$, primitivní funkce a $a(x)$ je např. $2x^2$ a $B(x)$, primitivní funkce k $b(x)e^{A(x)} = 8xe^{2x^2}$ je např. $2e^{2x^2}$.

Obecné řešení je tedy ve tvaru

$$z(x) = B(x)e^{-A(x)} + Ce^{-A(x)} = 2e^{2x^2}e^{-2x^2} + Ce^{-2x^2} = 2 + Ce^{-2x^2}, \quad x \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R}.$$

Pro obecné řešení původní rovníce provedeme zpětnou substituci a dostaneme

$$y(x) = \pm\sqrt{2 + Ce^{-2x^2}}.$$

Je ale nutné, aby x splňovalo $2 + Ce^{-2x^2} > 0$.

Pokud $C > -2$, je i $Ce^{-2x^2} > -2$, $x \in \mathbb{R}$. Pro $C \leq -2$ platí

$$Ce^{-2x^2} > -2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x| > \sqrt{-\frac{1}{2}\log\left(-\frac{2}{C}\right)}.$$

Dostáváme tedy řešení

$$y(x) = \pm\sqrt{2 + Ce^{-2x^2}}, \begin{cases} x \in \mathbb{R}, & C > -2, \\ x \in \left(-\infty, \sqrt{-\frac{1}{2}\log\left(-\frac{2}{C}\right)}\right),\ \left(\sqrt{-\frac{1}{2}\log\left(-\frac{2}{C}\right)}, \infty\right) & C \leq -2. \end{cases}$$

[6] 6. Jaký nejmenší a největší obsah může mít trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,-1)$ a (x,y), kde $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ a $x,y\le 0$. Připomeňme, že obsah trojúhelníku s vrcholy (x_A,y_A), (x_B,y_B) a (x_C,y_C) je dán

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ x_A & x_B & x_C\\ y_A & y_B & y_C\end{pmatrix}\right|.$$

Řešení:

Položme

$$M_1=\left\{(x,y)\in(-\infty,0)\times(-\infty,0):\frac{x^2}{4}+y^2=1\right\},\ M_2=\{(-2,0),(0,-1)\},.$$

a

$$M=M_1\cup M_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{4}+y^2=1,\ x,y\le 0\right\}.$$

Obsah trojúhelníku s vrcholy $(0,0)$, $(1,-1)$ a (x,y) je roven $\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ x & y\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}|x+y|$. Protože pro všechny body $(x,y)\in M$ platí $x+y<0$, zajímají nás globální extrémy funkce $f(x,y)=-\frac{1}{2}(x+y)$ vzhledem k množině M. Ty jistě existují protože M je uzavřená a omezená (a neprázdná) a f spojitá vzhledem k M.

Pokud má být bod (x,y) bodem globálního extrému f vzhledem k M, musí být bodem lokálního extrému f vzhledem k M_1, nebo M_2. Body lokálního extrému f vzhledem k M_2 jsou zjevně body $(-2,0)$ a $(0,-1)$.

Položme $g(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2-1$. Pro bod (x,y), který je bodem lokálního extrému f vzhledem k M_1 musí platit alespoň jedna z podmínek

- $\nabla g(x,y)=0$.
- existuje $\lambda\in\mathbb{R}$, že $\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$.

Máme $\nabla f(x,y)=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ a $\nabla g(x,y)=(\frac{x}{2},2y)$. První podmínka není splněna v žádném bodě M_2 a druhá podmínka dává soustavu

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}&=\frac{\lambda x}{2},\\ -\frac{1}{2}&=2\lambda y,\\ \frac{x^2}{4}+y^2&=1.\end{aligned}$$

První dvě rovnice dávají podmínku $x=4y$ a jejím dosazením do třetí rovnice dostáváme $5y^2=1$. Tedy $y=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ (chceme $y<0$) a tedy dostáváme bod $(-\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}})$. Dosazením dostaneme

$$f(-2,0)=1,\quad f(0,-1)=\tfrac{1}{2},\quad \text{a}\quad f(-\tfrac{4}{\sqrt{5}},-\tfrac{1}{\sqrt{5}})=\tfrac{\sqrt{5}}{2}.$$

Nejmenší mozný obsah je tedy $\frac{1}{2}$ a největší $\frac{\sqrt{5}}{2}$.