Termín pro odevzdání: pondělí 29.11. 2021

Na cvičení jsme si ukázali, že řešení počáteční úlohy pro vlnovou rovnici

$$\begin{aligned} \Box_c u(t,x) &= f(t,x) && \text{v } \mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d) \\ u(0,x) &= u_0(x) && \text{v } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \\ u_{,t}(0,x) &= u_1(x) && \text{v } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d), \end{aligned}$$

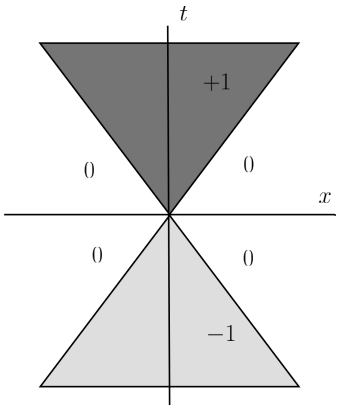
kde $\Box_c u := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, lze nalézt ve tvaru

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}(u_F(t,\cdot) \overset{(x)}{\star} u_0)(x) + (u_F(t,\cdot) \overset{(x)}{\star} u_1)(x) + (H(t)u_F \overset{(t,x)}{\star} f)(t,x), \tag{1}$$

kde $\overset{(x)}{\star}$ značí konvoluci v prostorové proměnné a $\overset{(t,x)}{\star}$ značí konvoluci v čase i prostoru, $H(t)$ je Heavisideova skoková funkce. Příště si ukážeme, ze pro $d = 1$ platí

$$\boxed{u_F(t,x) = \frac{1}{2c}\chi_{[-c|t|,c|t|]}(x)\operatorname{sgn}(t)} \tag{2}$$

kde $\chi_{[a,b]}$ značí charakteristickou funkci intervalu $[a,b]$, viz. obrázek pro vizualizaci nosiče a hodnot funkce u_F.



1. Odvoďte z formule (2) výpočtem dle (1) d'Alembertovu formuli (její obecnou variantu pro nehomogenní rovnici).
2. Ověřte výpočtem, že platí

   a)

   $$\Box_c u_F = 0 \qquad \text{v } \mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$$

   b)

   $$\Box_c(H(t)u_F) = \delta(t)\otimes\delta(x) \qquad \text{v } \mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$$

   Nápověda: Postupujte dle definic, tedy uvažujte libovolnou testovací fci $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ a počítejte $\langle \Box_c u_F, \varphi\rangle = \langle u_F, \Box_c\varphi\rangle$ a dále upravujte s využitím toho, že u_F je evidentně regulární distribuce a můžete tedy dualitu nahradit integrací.