M. BULÍČEK & J. MÁLEK : MATEMATICKÁ ANALÝZA 1
NOFY151 , ZS 2019/20

Zahájení : přivítání
obecné informace
sylabus
nutné požadavky ke zkoušce

1. LIMITA, SPOJITOST, DERIVACE

1.1 ZÁKLADNÍ POJMY

▶ MATEMATIKA, JEJÍ ROLE VE VĚDĚ, JEJÍ STRUKTURA

Věda jako celek představuje systematický, racionální a empirický způsob poznávání objektů a procesů reálného světa. Věda se dělí (nejednoznačným a navzájem se stále více překrývajícím způsobem) na vědy

- přírodní (fyzika, biologie, chemie, ...)
- technické (inženýrství – aplikované vědy přírodní ...)
- lékařské či obecněji vědy o živé přírodě
- společenské (ekonomie, lingvistika, teologie, .. psychologie, ...

Vědní obory shrnují poznatky a usilují o porozumění souvislostí, vztahů, procesů, případně předikce či co nejlepší posouzení dané situace. Procesy, vztahy, souvislosti jsou popisovány verbálně a následně, ve snaze dosáhnout přesnějšího popisu, popisovány univerzálnějším jazykem – matematikou, která intuitivní mění v konzistentní.

Matematika je jazykem (přírodních) věd

Filosofie či počítačová věda jsou další vědní disciplíny s přesahem přes vědu jako celek.

Znám-li dobře češtinu, slovenštinu, angličtinu, ruštinu, či jakýkoliv jiný jazyk, což zahrnuje pravopis, gramatiku, výslovnost, slovní zásobu, literaturu, ... mohu velmi dobře (verbálně či písemně) popisovat procesy (= život) kolem sebe.

Zcela podobně, čím lépe známe matematiku, tím lépe (přesněji) dokážeme popsat pozorované jevy, zpracovávat/interpretovat experimenty, hledat souvislosti a odhalovat věci jinak takřka neodhalitelné, zvláště lépe rozumět dané "fyzikální" teorii.

MATEMATIKA (podobně jako jiný dorozumívací jazyk) má mnoho oblastí:

LOGIKA, ALGEBRA, GEOMETRIE, TEORIE MNOŽIN, MATEMATICKÁ ANALÝZA, ..., TOPOLOGIE, které se často dále dělí.

Ačkoliv předmětem našeho kursu je matematická analýza (což je, hrubě řečeno, studium nekonečných procesů, kde klíčovým pojmem je funkce), dnes se analýze věnovat nebudeme. Potřebujeme se nejdříve domluvit na základech matematické gramatiky (tj. logice) a zavést číselné množiny (spojené se základy algebry, teorie množin, teorie čísel).

ZÁKLADY LOGIKY

angl. sentence

Věty v běžné řeči nazývejme vyjádření (anglicky statements).
VÝROKEM rozumíme vyjádření, o kterém lze jednoznačně rozhodnout, zda je <u>pravdivé</u> či <u>nepravdivé</u>.
Výrokům, které jsou pravdivé, přiřadíme hodnotu 1 (true T)
Výrokům, které jsou nepravdivé, přiřadíme hodnotu 0 (false F)

Výroky tak splňují dvě pravidla:
(i) <u>dichotomie</u>, které říká, že každý výrok musí mít hodnotu buď 0 nebo 1.
(ii) <u>vyloučeného středu</u>, které říká, že vyjádření, kterému nelze přiřadit jednoznačně hodnotu 0 nebo 1, není výrok.

VÝROKOVÝ POČET (tj. počítání s výroky) je založen na následujících operacích s výroky popsaných v Tabulce 1.:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Tabulka 1. Popis operací <u>negace</u>, <u>konjunkce</u>, <u>disjunkce</u>, <u>implikace</u> a <u>ekvivalence</u>.

Matematická tvrzení (výroky), pravidla nazývané Věty (angl. Theorems), Lemmy, ...), jsou často ve tvaru implikace $\Rightarrow$ či ekvivalence $\Leftrightarrow$. Protože pravdivostní tabulka $A \Leftrightarrow B$ je stejná jako pravdivostní tabulka $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, tak se častá matematická tvrzení redukují na implikace $\Rightarrow$.

Protože (viz Tabulka 2) jsou výroky

- $A \Rightarrow B$
- $\neg B \Rightarrow \neg A$
- $\neg(A \wedge \neg B)$

z pohledu logiky stejné, neboť mají stejnou pravdivostní tabulku, tak rozlišujeme tři způsoby důkazu implikací:

PŘÍMÝ $A \Rightarrow B$
NEPŘÍMÝ $\neg B \Rightarrow \neg A$
SPOREM $\neg(A \wedge \neg B)$

které ilustrujeme na následujícím příkladě.

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0	1

Tabulka 2 Pravdivostní tabulky výroků $A \Rightarrow B$, $\neg B \Rightarrow \neg A$ a $\neg(A \wedge \neg B)$ jsou stejné.

Příklad Buď $n = 1, 2, 3, \dots$ neboli $n \in \mathbb{N}$ (množina přirozených čísel). Dokážeme trojím způsobem, že platí ~~x~~ pro každé $n \in \mathbb{N}$ výrok: **Je-li n^2 liché, pak n je liché.**

Buď $n \in \mathbb{N}$ libovolné, ale pevné.

PŘÍMÝ DŮKAZ Protože n lze rozložit na součin prvočísel, máme $n = p_1 \cdots p_r$ a $n^2 = p_1^2 \cdots p_r^2$. Protože n^2 je liché, tak každé p_i^2, $i = 1, \dots, r$, je liché. Odsud a ze skutečnosti, že p_i je prvočíslo plyne, že p_i je liché. Pak však n = součin lichých čísel je liché. ▨

NEPŘÍMÝ DŮKAZ Dokazujeme implikaci

Není-li n liché (tj. n je sudé), pak není n^2 liché (tj. n^2 je sudé)

(Dk) Je-li n sudé, pak $n = 2k$ a pak $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ tedy n^2 je sudé. ▨

DŮKAZ SPOREM Předpokládáme, že n^2 je liché a zároveň n je sudé a chceme nalézt nepravdivý výrok, neboli **spor** (značíme ↯) s předpoklady. Je-li však n^2 liché a n sudé, pak n^2+n je liché a zároveň $n^2+n = n(n+1)$ je číslo sudé neboť jedno z čísel n resp. $n+1$ musí být sudé. Tedy n^2+n má být liché i sudé, což je hledaný spor. ↯

Výše uvedený příklad je zajímavý ještě ze dvou důvodů.

ZAPRVÉ Výrok „je-li n^2 liché, pak je n liché" závisí na parametru $n \in \mathbb{N}$. Lze jej tedy označit $V(n)$. Tvrzení, které jsme dokázali třemi způsoby, říká, že $V(n)$ má platit pro všechna $n \in \mathbb{N}$, což zapisujeme: $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N})\, V(n)}$

Symbol $\forall$ čteme "pro všechna" se nazývá obecný kvantifikátor.

Negace výroku

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n)$ tzn. $(\forall n \in \mathbb{N})\, V(n)$

zní

Existuje $n \in \mathbb{N}$ neplatí $V(n)$.

Tento výrok zapíšeme

$$(\exists n \in \mathbb{N})\, \neg V(n)$$

Symbol $\exists$ čteme "existuje" se nazývá existenční kvantifikátor. Chceme-li zapsat "existuje právě jeden" píšeme $\exists!$. Někdy lze také vidět symbol $\exists_1$, který značí totéž.

ZADRUHÉ Výrok (nebo výroková forma = výrok s kvantifikátory) $(\forall n \in \mathbb{N})\, V(n)$ kde $V(n)$ je např. "je-li n^2 liché, pak n liché" je parametrizován množinou přirozených čísel, což je nejmenší induktivní množina v množině reálných čísel (viz později) a takové tvrzení lze dokazovat principem indukce: (α) ověříme, že $V(n_0)$ platí pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$ (typicky $n_0 = 1$)

(β) ověříme, že platí implikace: Pokud $V(n_0)$ pak $V(n_0+1)$ pro $\forall n \geq n_0$

Pro ilustraci dokažme naše jednoduché tvrzení z Příkladu metodou indukce.

Ad (α) $V(1)$ tj. "je-li 1^2 liché, pak 1 liché" platí ✓

$\boxed{\text{Ad }(\beta)}$ Předpokládejme, že $V(n)$ platí $\forall n \le n_0$. Chceme dokázat $V(n_0+1)$ tj. "je-li $(n_0+1)^2$ liché, pak n_0+1 je liché"

Avšak: $$\underbrace{(n_0+1)^2}_{\text{liché}} = n_0^2 + \underbrace{2n_0}_{\text{sudé}} + \underbrace{1}_{\text{liché}} = (n_0-1)^2 + \underbrace{4n}_{\text{sudé}} \Rightarrow (n_0-1)^2 \text{ je liché}$$

n_0^2 sudé

Pro n_0^2 nelze indukční předpoklad použít

pak z indukčního předpokladu n_0-1 je liché, a tedy n_0+1 je rovněž liché.

Můžeme (a budeme) mít výroky (výrokové formy), které závisí na více proměnných. Uvažujme pro jednoduchost situaci, kdy výrok závisí na dvou parametrech $x \in X$ a $y \in Y$, tj. $V(x,y)$. Pak jsou možné tyto kombinace kvantifikátorových forem:

(1a) $(\forall x \in X)(\forall y \in Y)\ V(x,y)$ (1b) $(\forall y \in Y)(\forall x \in X)\ V(x,y)$

(2a) $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\ V(x,y)$ (2b) $(\exists y \in Y)(\forall x \in X)\ V(x,y)$

(3a) $(\exists x \in X)(\forall y \in Y)\ V(x,y)$ (3b) $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ V(x,y)$

(4a) $(\exists x \in X)(\exists y \in Y)\ V(x,y)$ (4b) $(\exists y \in Y)(\exists x \in X)\ V(x,y)$

Výroky (Na) a (Nb) se liší pořadím kvantifikátorů. U výroků se stejnými kvantifikátory na pořadí nezáleží, neboť je můžeme zapsat $(\forall (x,y) \in X \times Y)\ V(x,y)$ resp. $(\exists (x,y) \in X \times Y)\ V(x,y)$.
Tedy (1a) a (1b) jsou ekvivalentní a podobně (4a) a (4b).

NAOPAK, (2a) a (2b) a podobně (3a) a (3b) ekvivalentní NEJSOU, a pořadí kvantifikátorů je extrémně důležité jak podtrhuje následující příklad.

Příklad M množina mužů, $Ž$ množina žen, $V(m,ž)$ označuje výrok "$ž$ je matkou m". Pak

$(\forall m \in M)(\exists ž \in Ž)\ V(m,ž)$ je pravdivý výrok

zatímco

$(\exists ž \in Ž)(\forall m \in M)\ V(m,ž)$ je výrok nepravdivý.

Cvičení: Napište si negace obou výroků a rozhodněte které jsou pravdivé.