§7 OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Ve vědě a inženýrství jsou formulovány matematické modely k porozumění fyzikálních, chemických, biologických, ekonomických a jiných přírodních jevů. Tyto matematické modely často zahrnují rovnice, ve kterých se vyskytují derivace neznámé (hledané) funkce. Takovéto rovnice se nazývají DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE (DR).

Je-li neznámá funkce y závislá jen na jedné (reálné) proměnné, řekněme $x \in (a,b)$, a v DR se tak vyskytují klasické (obyčejné) derivace fce y, tzn. $y', y'', \dots, y^{(k)}, \dots$ (nebo jen některé z nich), pak se daná DR nazývá obyčejná diferenciální rovnice (ODR) respektive systém ODR

Přesněji:

- je-li $y: (a,b) \to \mathbb{R}$ mluvíme o skalární ODR
- je-li $y: (a,b) \to \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, mluvíme o systému ODR

Nejvyšší řád derivace, který se v dané DR vyskytuje, určuje řád ODR či řád systému ODR

Příklady ① DR $\boxed{y' + a(x)y = g(x)}$ (1)

kde $a: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ a $g: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ jsou dané funkce, je skalární ODR 1. řádu pro neznámou

$$y: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R} \qquad \left(y = y(x)\right).$$

Pozorování Užijeme-li značení $y' = \frac{dy}{dx}$, lze (1) psát ve tvaru $\frac{dy}{dx} + a(x)y = g(x)$. Označíme-li $L := \frac{d}{dx} + a(x)$, pak L je příklade diferenciálního operátoru, který funkci $y: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ přiřadí funkci $Ly = \frac{dy}{dx} + a(x)y : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$. Navíc L je LINEÁRNÍ operátor a (1) lze psát ve tvaru $Ly = g(x)$.

$\boxed{\text{Př. } ②}$ DR $\boxed{y'' + by' + k\,y = \sin\alpha t}$ (2)

kde b, k a α jsou dané nezáporné parametry (konstanty) představuje skalární ODR 2. řádu pro neznámou

$$y: (0,T) \to \mathbb{R} \qquad (y = y(t)) \text{ z kontextu zadání DR.}$$

Označíme-li $x_1 := y$ a $x_2 := y'$ a $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$, pak lze rovnici (2) přepsat do tvaru

$$(3) \quad \boxed{\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -bx_2 - k\,x_1 + \sin\alpha t \end{aligned}} \iff \boxed{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \mathbb{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha t \end{pmatrix} \quad \text{kde } \mathbb{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{pmatrix}}$$

$$\iff \boxed{\begin{aligned} \vec{x}\,' &= \mathbb{A}\vec{x} + \vec{f}(t) \\ \vec{f}(t) &= (0, \sin\alpha t)^T \end{aligned}}$$

což je systém dvou ODR 1. řádu

Vidíme, že je úzká souvislost mezi skalární ODR vyššího řádu a systémem ODR 1. řádu.

Pozorování: Opět se značením $y' = \frac{dy}{dx}$ lze rovnici (2) psát ve tvaru

$$(2') \quad \boxed{Ly = g(t)}, \text{ kde } \boxed{L := \frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx} + k} \text{ a } g(t) := \sin\alpha t$$

Protože $L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$ a $L(\alpha y) = \alpha L y$, tak L je lineární diferenciální operátor 2. řádu.

$\boxed{\text{Př. } ③}$ DR $\boxed{y'' + \frac{g}{l}\sin y = 0}$ je opět skalární ODR 2. řádu (rovnice jednoduchého kyvadla). V tomto případě je však diferenciální operátor

$$Ly := \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{g}{l}\sin y \qquad \text{nelineární!}$$

Připomeňme si na jednoduchém fyzikálním systému jak jsou různé diferenciální rce generovány.

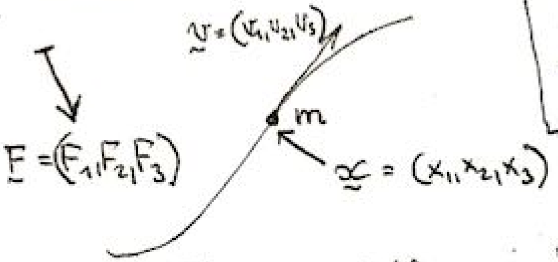
NEWTONOVA KLASICKÁ MECHANIKA

SYSTÉM: PRUŽINA ZÁVAŽÍ

- popisuje pohyb částic pomocí diferenciálních rovnic
- částice (tělesa) chápeme jako hmotné body
- tři základní postuláty

1. ZÁKON Pokud nepůsobí na částici ŽÁDNÉ SÍLY, částice se pohybuje přímočarým (nezrychleným) pohybem ŽÁDNÉ ZRYCHLENÍ

2. ZÁKON

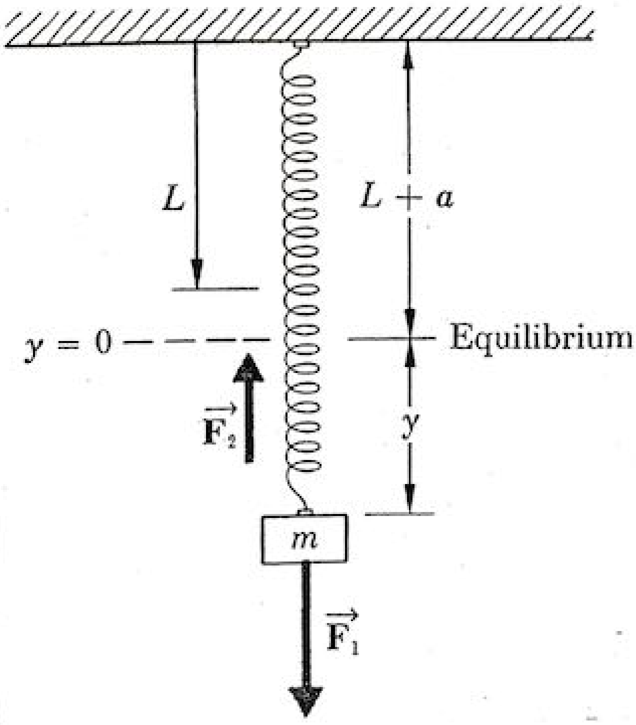


$$\boxed{\underset{\sim}{F} = \frac{d}{dt}\left(m\underset{\sim}{v}\right) = m\frac{dv}{dt} = m\underset{\sim}{a} = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{\underset{\sim}{x}}}$$

m konstant

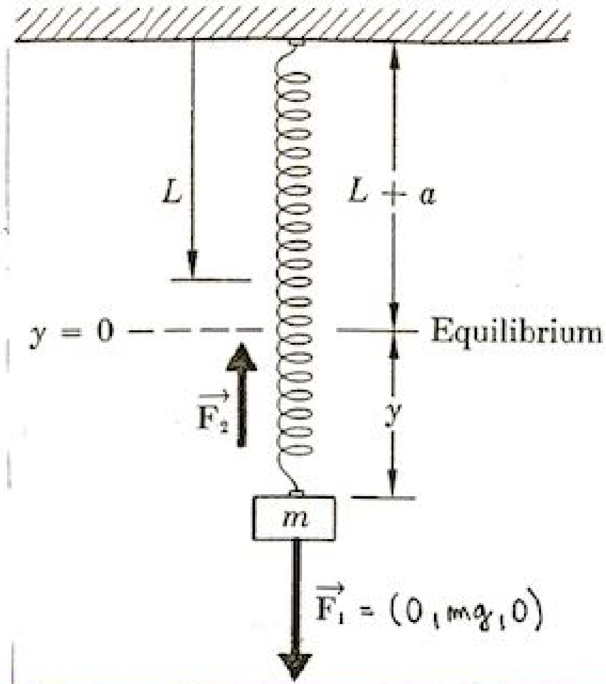
3. ZÁKON Síla $\underset{\sim}{F}$ vyvolá reakční sílu $-\underset{\sim}{F}$

SYSTÉM: PRUŽINA - ZÁVAŽÍ



ZÁKLADNÍ PŘEDPOKLADY

- Pohyby možné jen ve vertikálním směru
- závaží chápeme jako hmotný bod o hmotnosti m
- Hmotnost pružiny zanedbáme



Předpoklady na materiály

(S) pružina splňuje Hookeův zákon: pružina vyvolává "rekonstrující" sílu F_2 na závaží směrem k poloze přirozené délky pružiny, a tato síla je úměrná $y+a$, tj.

$$\underset{\sim}{F_2} = (0, -k(y+a), 0) \qquad (k>0)$$

(A) odpor vzduchu je zanedbatelný (vakuum)

$\boxed{\text{Z 2. ZÁKONA}} \Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} = \underset{\sim}{F_1} + \underset{\sim}{F_2} = (0, mg - k(y+a), 0)$

V rovnováze: $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$ a $y = 0 \Rightarrow ka = mg$

Rovnice pohybu: $\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0}$

! Počáteční podmínky: $y(0) = y_0$, $\frac{dy}{dt}(0) = y_1$

(A*) Odpor vzduchu je úměrný rychlosti

$$\underset{\sim}{F_3} = \left(0, -b\frac{dy}{dt}, 0\right) \Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = 0$$

koeficienty: setrvačnosti, tlumení, tuhosti

(A**) Odpor vzduchu (prostředí) závisí na rychlosti nelineárně

$$\underset{\sim}{F_3} = \left(0, h\left(\frac{dy}{dt}\right), 0\right) \Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} + h\left(\frac{dy}{dt}\right) + ky = 0$$

(S*) Pružina vyvolává sílu $\underset{\sim}{F_2}$, která závisí na $(y+a)$ nelineárně

$$\underset{\sim}{F_2} = (0, g(y+a), 0) \Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} + g(y) + \begin{cases} 0 & (A) \\ b\frac{dy}{dt} & (A^*) \\ h\left(\frac{dy}{dt}\right) & (A^{**}) \end{cases} = 0$$

(S*) + (A**) je speciální případ rovnice $\frac{d^2y}{dt^2} + f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) = 0$

Vnější (daná) síla $\underset{\sim}{F_4} = (0, \xi(t), 0)$ například $\xi(t) = \sin\omega t$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) = \sin\omega t$$

ŽÁDNÁ PRUŽINA ⇒ PADAJÍCÍ TĚLESO

$\underset{\sim}{F_2} = (0, 0, 0)$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \begin{cases} 0 & (A) \\ b\frac{dy}{dt} & (A^*) \\ h\left(\frac{dy}{dt}\right) & (A^{**}) \end{cases} = G \quad z := \frac{dy}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dz}{dt} + \begin{cases} 0 \\ bz \\ h(z) \end{cases} = G \quad \text{ROVNICE 1. ŘÁDU}}$$

JSOU VŠECHNY DR OBYČEJNÉ?

$\to t \in [0,T]$

Je-li neznámá funkce u závislá na více proměnných z nichž jedna může být čas t a ostatní jsou prostorové proměnné $x_1, \dots, x_d$, kde $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, a v DR se vyskytují parciální derivace fce u, např. $\frac{\partial u}{\partial t}$ nebo $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}$, atd., pak se daná DR nazývá parciální diferenciální rovnice (PDR) respektive systém PDR. Přesněji:

- je-li $u: \Omega \to \mathbb{R}$ resp. $u: (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$ mluvíme o skalární stacionární resp. evoluční PDR
- je-li $\vec{u}: \Omega \to \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, resp. $\vec{u}: (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}^N$ mluvíme o systému stacionárních resp. evolučních PDR

Příklady (4) a) Poissonova rce

$$\boxed{-\Delta u = f \text{ v } \Omega}$$

$$-\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$ LINEÁRNÍ OPERÁTOR

b) Rovnice vedení tepla

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{v } (0,T) \times \Omega \\ &\text{kde } f: (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R} \text{ je daná funkce.} \end{aligned}}$$

skalární evoluční PDR 2. řádu vzhledem k $x_1, x_2, \dots, x_d$
1. řádu vzhledem k t

c) Vlnová rovnice

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad \text{v } (0,T) \times \Omega \\ &\text{kde } f: (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R} \text{ je daná fce} \end{aligned}}$$

skalární evoluční PDR 2. řádu vzhledem k $x_1, x_2, \dots, x_d$
2. řádu —"— k t

Oba evoluční diferenciální operátory

$L := \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ Tepelný operátor

$L := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ d'Alembertův vlnový operátor $\Box$.

jsou lineární

⑤ Navier-Stokesovy rovnice:

Neznámé: rychlost $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a "tlak" p

$$v_i, p : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}, \quad i = 1,2,3$$

$$(NS) \quad \left[\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_1}{\partial x_k} - \Delta v_1 &= -\frac{\partial p}{\partial x_1} \\
\frac{\partial v_2}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_2}{\partial x_k} - \Delta v_2 &= -\frac{\partial p}{\partial x_2} \\
\frac{\partial v_3}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_3}{\partial x_k} - \Delta v_3 &= -\frac{\partial p}{\partial x_3} \\
\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} &= 0
\end{aligned}\right.$$

je systém (čtyř) nelineárních PDR, který je

stacionární pokud $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$ pro $i = 1,2,3$

evoluční jinak.

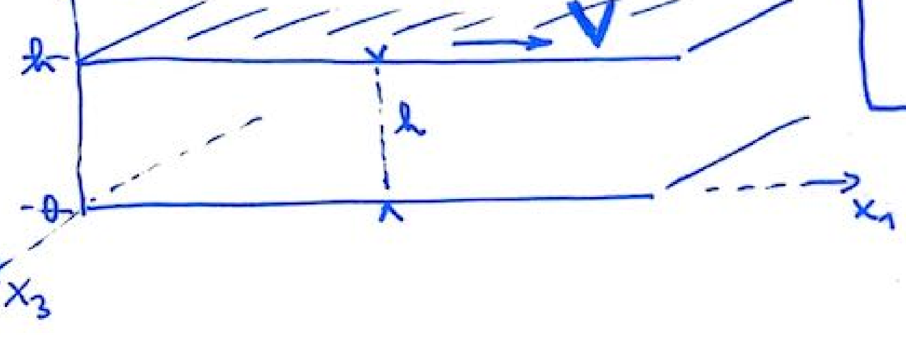
Navier-Stokesovy rce, popisující proudění nestlačitelných tekutin (jako je voda) při standardních podmínkách, se obvykle píšou v kompaktním tvaru

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} - \Delta \vec{v} &= -\nabla p \\
\operatorname{div} \vec{v} &= 0
\end{aligned}}$$

- Uvažujme ustálené (stacionární) proudění mezi dvěma deskami, kde se horní deska pohybuje konstantní rychlostí V (viz obrázek), dolní deska je (v klidu). Hledejme řešení úlohy ve tvaru $\vec{v} = (u(x_2), 0, 0)$, $p = $ konst.

Pak dostame pro u úlohu:

$$\boxed{\begin{aligned}
u'' &= 0 \ \text{ v } (0,h) \\
u(0) &= 0 \\
u(h) &= V
\end{aligned}}$$



SHRNUTÍ Diferenciální rovnice (DR) jsme si rozdělili na:

- OBYČEJNÉ vs. PARCIÁLNÍ
  - systém pružina-závaží
  - Poissonova, vlnová, tepelná rce; Navier-Stokesovy rovnice (NSR)
- LINEÁRNÍ / NELINEÁRNÍ
  - systém lineární pružina-závaží
  - Laplaceův, tepelný, vlnový operátor
  - rovnice jednoduchého kyvadla
  - NSR
  - systém nelineární pružina-závaží v nelineárním prostředí
- SKALÁRNÍ / VEKTOROVÉ
  - systém DR
- STACIONÁRNÍ / EVOLUČNÍ
  - jedna z proměnných je čas
- 1. ŘÁDU / 2. ŘÁDU
  - $y' + a(t)y = g(t)$
  - tepelná rovnice vzhledem k času
  - rovnice volného pádu po rychlost

OBYČEJNÉ (LINEÁRNÍ) DR 2. a 1. ŘÁDU

Pro ODR 2. řádu lze formulovat dvě (svým charakterem zcela) odlišné úlohy: počáteční úlohu a okrajovou úlohu.

Motivací pro <u>počáteční úlohu</u> je systém pružina-závaží s lineární (Hookeovou) pružinou a lineárním odporem vnějšího prostředí.
Cílem je: nalézt funkci $y: (-T,T) \to \mathbb{R}$, která má $y''(t)$ pro každé $t \in (-T,T)$ a splňuje

$$
(P) \quad \boxed{\begin{aligned} & y'' + \frac{b}{m} y' + \frac{k}{m} y = f(t) \qquad \forall t \in (-T,T) \\ & y(0) = y_0 \\ & y'(0) = y_1 \end{aligned}}
$$

pro daná DATA úlohy:

$T > 0$ (časový interval), b, k, m (materiálové koeficienty), $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ (počáteční podmínky), $f: (-T,T) \to \mathbb{R}$ (pravá strana)

Motivací pro okrajovou úlohu je úloha nalézt speciální typ ustáleného proudění tekutiny proudící mezi dvěma rovnoběžnými deskami.

Cílem je: nalézt funkci $y:(a,b)\to\mathbb{R}$, která má $y''(x)$ pro všechna $x\in(a,b)$ a splňuje

(O)

$$y''+\alpha y'+\beta y=g(x) \quad \text{v } (a,b)$$

ve spojení s jedním typem z následujících okrajových podmínek:

Dirichletova → (D) $y(a)=A$ a $y(b)=B$

Neumann → (N) $y'(a)=A$ a $y'(b)=B$

Smíšená → (S) $y(a)=A$ a $y'(b)=B$ nebo $y'(a)=A$ a $y(b)=B$

pro daná DATA úlohy:

$I=(a,b)$ ← oblast, kde úlohu řeším

α,β ← koeficienty

A,B ← předepsané hodnoty hledané fce či její derivace v bodech $\underline{a}$ a $\underline{b}$

$g:(a,b)\to\mathbb{R}$ ← pravá strana

Ukažme si důležité odlišné i společné rysy obou úloh na jednoduchém příkladě:

(*) $$y''=0$$

Z existence druhé derivace a Lagrangeovy věty o střední hodnotě plyne, že obecný tvar řešení rce (*) má tvar:

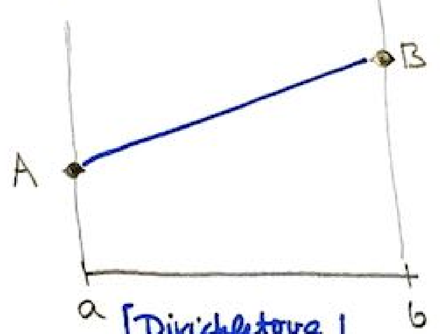
(P1) $y_{OB}(t)=C_1t+C_2$ $\quad t\in\mathbb{R},\ C_1,C_2\in\mathbb{R}$ v kontextu počáteční úlohy

resp.

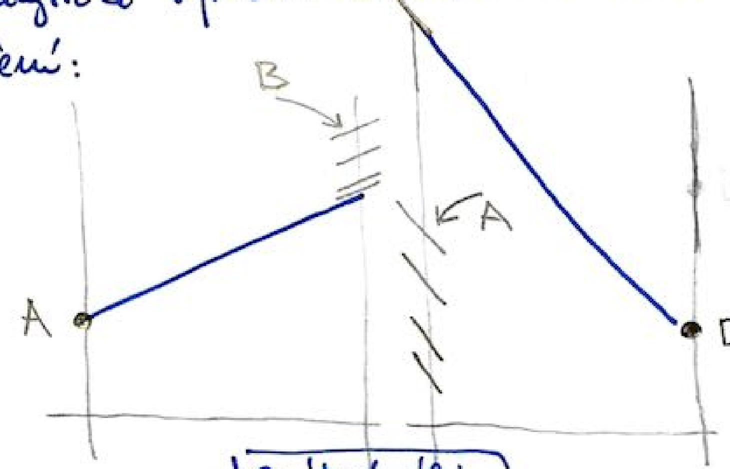
(O1) $y_{OB}(x)=C_1x+C_2$ $\quad x\in(a,b),\ C_1,C_2\in\mathbb{R}$ v kontextu okrajové úlohy

Z (P1) snadno dostáváme, že řešení počáteční úlohy (P) pro rovnici (*) má tvar $\boxed{y_P(t)=y_1t+y_0}$. Všimněme si, že (P1) je formulace 1. pohybového zákona klasické mechaniky.

Pro okrajové úlohy (Dirichlet, Neumann, smíšená) hledáme mezi všemi afinními funkcemi (01) ty, které splňují předepsané okrajové podmínky. Zatímco u Dirichletovy či smíšené úlohy se nám to vždy podaří a toto řešení je jediné, u Neumannovy úlohy řešení existuje jen pokud $A=B$ (tzn. data jsou kompatibilní). Navíc, pokud $A=B$ pak máme nekonečně mnoho řešení (typu $y(x) = Ax + C_2$ kde C_2 je libovolné) a k určení jediného z nich musíme přidat k úloze další selektivní podmínku (např. $\int_a^b y(x)\,dx = 0$). Analytické vyřešení všech úloh (D), (N), (S) najdete sami. Zde je grafické řešení:



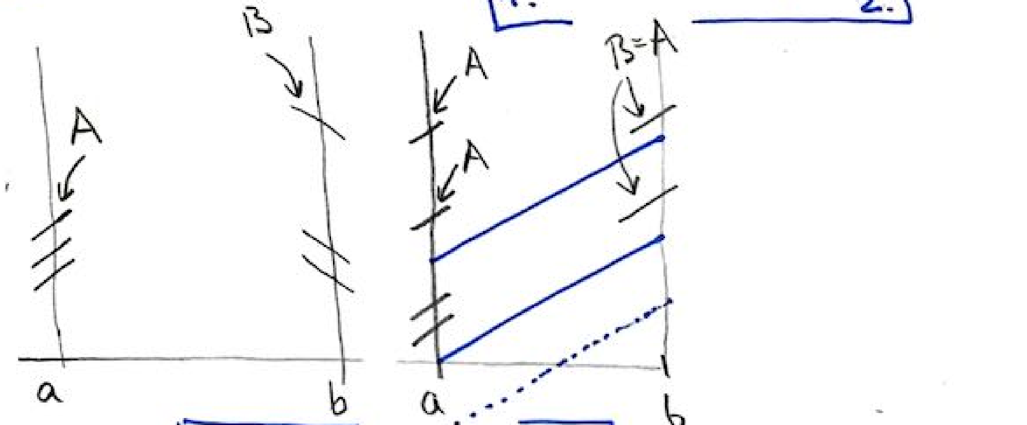
Dirichletova úloha



Smíšené úlohy

1.

2.



Neumannova úloha

1. Neexistence řešení

2. Nekonečně řešení. Tečkovaně znázorněno řešení s nulovým průměrem.

Závěr Obecné řešení rovnice $y''=0$ má tvar $(x) = (C_1, C_2)\cdot\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}$, tj. lineární kombinace prvků báze $\{1, x\}$. Dimenze prostoru všech řešení rce $y''=0$ je tedy 2. Má-li řešení druhé derivace ve všech bodech, pak jsou první a nultá derivace spojité, tzn. $y \in C^1([T,T])$ resp. $C^1((a,b))$. Je tedy smysluplné zadávat hodnoty pro y resp. y' v počátku nebo krajních bodech intervalu.

Počáteční úloha má vždy řešení. Okrajová úloha Neumannova typu má řešení jen pokud data splňují podmínku kompatibility ($A=B$); jediné řešení je pak vybráno z ∞-mnoha řešení další selektivní podmínkou. $\blacksquare$

Dříve než začneme zkoumat vlastnosti rovnic z pohledu matematické analýzy, zdůrazněme, že je vždy cenné znát fyzikální (chemický, biologický) kontext studované rovnice resp. úlohy. Například, v kontextu systému pružina-závaží, kromě rovnice a počátečních podmínek (úloha(P)) víme, že

(i) $\quad m>0 \;,\; b\geq 0 \;\text{ a }\; k\geq 0$ (omezení na přípustné parametry)

a že platí, pro $f\equiv 0$, následující energetická identita:

(ii) $$\frac{1}{2}[y'(t)]^2+\frac{k}{2m}[y(t)]^2+\frac{b}{m}\int_0^t[y'(\tau)]^2\,d\tau=\frac{1}{2}y_1^2+\frac{k}{2m}y_0^2$$

neboli celková energie systému
$$E(t):=\frac{1}{2}[y'(t)]^2+\frac{k}{2m}[y(t)]^2,$$
splňující
$$E(t)+\frac{b}{m}\int_0^t[y'(\tau)]^2\,d\tau=E_0 \quad\text{kde } E_0:=\frac{1}{2}y_1^2+\frac{k}{2m}y_0^2=E(0)$$
neroste a v případě, kdy $b=0$, se zachovává:
$$E(t)=E_0 \quad \text{pro všechna } t\in[0,T].$$

Odvození (ii) si proveďte sami; násobte ODR v (P) y', užijte identitu $\left(\frac{|z|^2}{2}\right)'=zz'$, výsledek integrujte od 0 do t, $t\in(0,T]$ a užijte počátečních podmínek.

Uvažujme nyní jiné rovnici

(3) $\quad Ly := y'' + py' + qy = f(x) \qquad p,q \in \mathbb{R} \qquad x \in (-\infty,+\infty)$

a hledejme všechna řešení této rovnici. Za předpokladu $y''(x)$ existuje pro všechna $x \in \mathbb{R}$. V tuto chvíli tedy zapomínáme na počáteční a okrajovou úlohu a snažíme se najít tvar obecného řešení rovnice (3); toto řešení budeme značit $y_{OB} = y_{OB}(x)$.

Terminologie: Rce (3) s $f \equiv 0$ se nazývá **homogenní** ODR 2. řádu s konstantními koeficienty

Rce (3) s $f \not\equiv 0$ se nazývá **nehomogenní** ODR 2. řádu

Úkol: NALÉZT y_{OB} tj. NALÉZT VŠECHNA ŘEŠENÍ (3)

Případ 1 HOMOGENNÍ RCE; $f \equiv 0$

K řešení využijeme skutečnosti, že

- $(e^x)' = e^x$ a e^x tak řeší rci $y' = y$
- $(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$ a $e^{\lambda x}$ řeší rci $y' = \lambda y$

a otázku řešitelnosti (3) převedeme na algebraickou otázku.

Hledáme-li řešení (3) ve tvaru $y = e^{\lambda x}$, po dosazení dostáváme:

$$(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0} \qquad D := p^2 - 4q$$

(4) CHARAKTERISTICKÁ RCE

Mohou nastat tři situace:

(i) $D > 0 \Rightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq \lambda_2$, řešící (4)

$\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ tvoří bázi prostoru $\{z \in C^2(\mathbb{R});\ Lz = 0\}$
(prostor všech řešení homogenní rce)

neboli

$$\boxed{y_{OB}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

(ii) $D = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ je dvojnásobný kořen, což je situace, která nastane (mimojiné) u rovnice $y'' = 0$, jejíž charakteristická rce má tvar $\lambda^2 = 0$, 0 je kořen násobnosti 2 a víme, že $\{1, x\} = \{e^{0x}, xe^{0x}\}$ tvoří bázi.

Tedy: je-li $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ kořen násobnosti 2, pak $\{e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}\}$ tvoří bázi $\{z \in C^2(\mathbb{R});\ Lz = 0\}$

a $\boxed{y_{OB}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}}$

(iii) $D<0 \Rightarrow \underset{\mu_1+i\mu_2}{\lambda}, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ jsou dva různé kořeny (4). Pak

$\rightarrow y_{OB}(x) = C_1 w_1 + C_2 w_2, \; C_1, C_2 \in \mathbb{C}$

$$(\bullet) \quad \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} := \begin{Bmatrix} e^{\mu_1 x}(\cos\mu_2 x + i \sin\mu_2 x) \\ e^{\mu_1 x}(\cos\mu_2 x - i \sin\mu_2 x) \end{Bmatrix}$$ tvoří bázi prostoru $\{z \in C^2(\mathbb{R});\ Lz = 0\}$.

Nevýhodou této báze je skutečnost, že prvky (funkce) báze jsou funkce komplexní, ačkoliv v zadání rovnice nic komplexního nebylo.

Lineární kombinací báze $(\bullet)$ však mohu dostat bázi tvořenou reálnými funkcemi.

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(w_1+w_2) \\ \frac{1}{2i}(w_1-w_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e^{\mu_1 x}\cos\mu_2 x \\ e^{\mu_1 x}\sin\mu_2 x \end{Bmatrix}$$

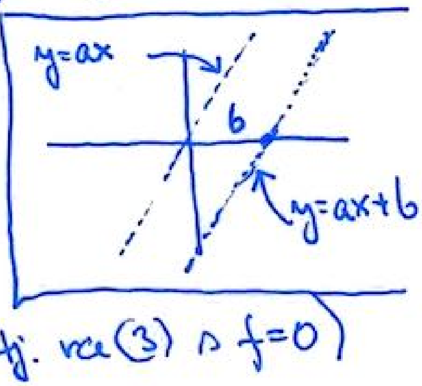
Pak
$$\boxed{y_{OB}(x) = C_1 e^{\mu_1 x}\cos\mu_2 x + C_2 e^{\mu_1 x}\sin\mu_2 x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

Příklad 1 $\boxed{\ddot{x} + x = 0}$ Najděte obecné řešení.

Řešení: Charakteristická rovnice $\lambda^2+1=0$ má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm i$. Báze tvořená reálnými funkcemi: $\{\cos t, \sin t\}$ a obecné řešení:

$$x_{OB}(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Pokud řeším počáteční úlohu (P) nebo okrajovou úlohu (O) pro homogenní rovnici, pak najdu obecné řešení a konstanty C_1, C_2 určím z počátečních nebo okrajových podmínek.



Případ 2 NEHOMOGENNÍ RCE; $f \not\equiv 0$

Pak platí, že obecné řešení $y_{OB,f}$ je ve tvaru

(5) $$\boxed{y_{OB,f}(x) = y_{OB}(x) + y_f(x)},$$

kde y_{OB} je obecné řešení homogenní rce (tj. rce (3) s $f=0$)

a y_f je jedno (partikulární) řešení rce (3) s f.

Otázka nalezení $y_{OB,f}$ se redukuje na otázku jak nalézt y_f — jedno řešení (3).

Tři různé metody (jak najít y_f) na různé situace:

(i) **uhodnutím** – tvar pravé strany je jednoduchý (např. konstanta)

(ii) **pravá strana je ve tvaru:**

$$f(x) = \boxed{P(x)e^{\lambda x}} \text{ (A) nebo } \boxed{\begin{array}{l} P(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \text{nebo } P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x \end{array}} \text{ (B)}$$

kde $P(x)$ je nějaký konkrétní polynom stupně m

např. $P(x) = x^2+1$ je polynom stupně 2.

Pak

(6) $y_f(x)$ hledáme ve tvaru $y_f(x) = \begin{cases} Q(x)x^L e^{\lambda x} & \text{pro (A)} \\ \tilde{Q}(x)x^L e^{\alpha x}\sin\beta x + \tilde{\tilde{Q}}(x)x^L e^{\alpha x}\cos\beta x & \text{pro (B)} \end{cases}$

kde

$$L = \begin{cases} 0 & \text{není-li } \lambda \text{ kořen (4) pro (A)} \\ & \text{není-li } \alpha+i\beta \text{ kořen (4) pro (B)} \\ k & \text{je-li } \lambda \text{ } k\text{-násobný kořen (4) pro (A)} \\ & \text{je-li } \alpha+i\beta \text{ násobný kořen 4 pro (B) *)} \end{cases}$$

a

$Q, \tilde{Q}$ a $\tilde{\tilde{Q}}$ jsou obecné polynomy stupně m.

např. je-li $P(x) = x^2+1$, pak $Q(x) = Ax^2+Bx+C$,

kde A, B, C určíme po dosazení (6) do rovnice (3).

(iii) obecná metoda nazývaná **variace konstant**.

Je-li obecné řešení homogenní rovnice ve tvaru

$y_{OB}(x) = C_1 w_1(x) + C_2 w_2(x)$ kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

báze

pak $y_f(x)$ hledám ve tvaru

(7) $$\boxed{y_f(x) = C_1(x)w_1(x) + C_2(x)w_2(x)}$$

*) pro rovnici 2. řádu $\alpha+i\beta$ může být nejvýše 1-násobným kořenem charakteristické rovnice (4).

Derivováním (7) dostávám
$$y_f'(x) = C_1'(x)w_1(x) + C_2'(x)w_2(x) + C_1(x)w_1'(x) + C_2(x)w_2'(x).$$
Na koeficienty (funkce) C_1, C_2 nyní položíme podmínku:
$$\boxed{(8_1) \qquad C_1'(x)w_1(x) + C_2'(x)w_2(x) = 0}$$
Pak
$$y_f'(x) = C_1(x)w_1'(x) + C_2(x)w_2'(x)$$
a
$$y_f''(x) = C_1'(x)w_1'(x) + C_2'(x)w_2'(x) + C_1(x)w_1''(x) + C_2(x)w_2''(x).$$
Po dosazení posledních dvou vztahů a (7) do rovnice (3) dostaneme
$$C_1(x)\underbrace{\{w_1''(x) + p w_1'(x) + q w_1(x)\}}_{Lw_1=0} + C_2(x)\underbrace{\{w_2''(x) + p w_2'(x) + q w_2(x)\}}_{Lw_2=0}$$
$$+ C_1'(x)w_1'(x) + C_2'(x)w_2'(x) = f(x).$$
Protože w_1, w_2 řeší homogenní rovnici $Lw_1 = 0$, $Lw_2 = 0$, tak z posledního vztahu plyne
$$\boxed{(8_2) \qquad C_1'(x)w_1'(x) + C_2'(x)w_2'(x) = f(x)}$$

Rovnice (8_1) a (8_2) představují systém dvou rovnic pro neznámé funkce $C_1'(x)$ a $C_2'(x)$. Dá se ukázat, že systém (8_1) a (8_2) má vždy řešení. Integrací určím $C_1(x)$ a $C_2(x)$ a po dosazení do (7) dostanu partikulární řešení y_f rovnice (3). ▨

Příklad ② Najděte obecné řešení rovnice $\ddot{x} + x = \sin 2t$

Řešení (I) Dle příkladu ① víme $x_{OB,hom}(t) = C_2 \sin t + C_1 \cos t$.

Funkce $f(t) = \sin 2t$ je pravá strana speciálního tvaru s $\alpha = 0, \beta = 2$. Tak $x_f(t)$ hledáme ve tvaru $\boxed{x_f(t) = A\cos 2t + B\sin 2t}$. Koeficienty A, B určíme dosazením $x_f(t)$ do rovnice $\ddot{x} + x = \sin 2t$.

Dostáváme:
$$-4A\cos 2t - 4B\sin 2t + A\cos 2t + B\sin 2t = \sin 2t,$$
což implikuje vztahy: $\boxed{-3A = 0}$ $\boxed{-3B = 1}$.

Tedy hledané obecné řešení
$$\left[\, x_{OB,nehom}(t) = C_1\cos t + C_2 \sin t - \frac{1}{3}\sin 2t \,\right]$$ ▨

Řešení (ii) x_f zkusíme najít metodou variace konstant:

$$x_f(t) = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t$$

Pro funkce $C_1(t), C_2(t)$ dostáváme:

$$(\bullet\bullet)\qquad \left\{\begin{array}{l} C_1'(t)\cos t + C_2'(t)\sin t = 0 \\ -C_1'(t)\sin t + C_2'(t)\cos t = \sin 2t \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} \sin t \\ \cos t \end{array}$$

Odtud $\quad C_2'(t) = 2\sin t\cos^2 t \quad$ a $\quad C_1'(t) = -2\sin^2 t\cos t$.

Tedy $\quad C_2(t) = -\frac{2}{3}\cos^3 t \quad$ a $\quad C_1(t) = -\frac{2}{3}\sin^3 t$

Tudíž $\quad x_f(t) = -\frac{2}{3}\sin^3 t\cos t - \frac{2}{3}\cos^3 t\sin t = -\frac{1}{3}\sin 2t$,

což je stejný výsledek jako ten získaný metodou $\underbrace{\text{ansatzu}}_{\text{udsady}}$ v (i).

Příklad 3 Najděte obecné řešení rovnic

$$\boxed{(g_1)\quad \ddot{x} + x = \sin t} \quad \text{a} \quad \boxed{\ddot{x} + x = \sin(1+\varepsilon)t \quad (g_2)}$$

Řešení Pozorování 1: Partikulární řešení (g_1) nelze najít ve tvaru $x_f(t) = A\sin t + B\cos t$. Skutečně, po dosazení dostáváme $0 = \sin t$. Sami zkuste vyřešit (g_1) variací konstant.

Pozorování 2: Frekvence uvnitř pravé strany se shoduje resp. je blízká $\underbrace{\text{frekvenci}}_{\text{kmitů}}$ systému "pružina-závaží" řízeným homogenní rovnicí.

Pozorování 3: Metodou ansatzu použitou na rci (g_2) dostáváme pro

$x_f(t) = A\sin(1+\varepsilon)t + B\cos(1+\varepsilon)t$. Po dosazení:

$$A\left(1-(1+\varepsilon)^2\right)\sin(1+\varepsilon)t + B\left(1-(1+\varepsilon)^2\right)\cos(1+\varepsilon)t = \sin(1+\varepsilon)t,$$

což implikuje $\quad B = 0 \quad$ a $\quad A = \frac{-1}{(2+\varepsilon)\varepsilon} \quad$ a tak $\quad x_f(t) = \frac{-1}{\varepsilon(2+\varepsilon)}\sin(1+\varepsilon)t$

Hledejme řešení počáteční úlohy $\quad x(0) = x_0$ a $x'(0) = 0$.

Z obecného řešení ve tvaru

$$x_{OŘ,nehom}(t) = C_1\cos t + C_2\sin t - \frac{1}{\varepsilon(2+\varepsilon)}\sin(1+\varepsilon)t$$

dostáváme $\quad C_1 = x_0 \quad$ a $\quad C_2 - \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon(2+\varepsilon)} = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon(2+\varepsilon)}$

$$x_P^{\varepsilon}(t) = x_0\cos t + \frac{1}{\varepsilon(2+\varepsilon)}\left[(1+\varepsilon)\sin t - \sin(1+\varepsilon)t\right]$$

$$x_P(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} x_P^{\varepsilon}(t) = x_0\cos t + \frac{1}{2}\sin t - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin(1+\varepsilon)t - \sin t}{\varepsilon(2+\varepsilon)}$$

$= x_0 \cos t + \frac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t$

a oscilace mají rostoucí amplitudu pro $t \to \infty$. Jev, kdy frekvence vnějších sil odpovídá vnitřním frekvencím systému, které se mohou zvětšovat, se nazývá resonance.

viz dodatek

- zároveň jsme odvodili/zdůvodnili proč v případě (9_1) musíme hledat partikulární řešení ve tvaru

$$x_f(t) = At\sin t + Bt\cos t.$$

Ověřte sami, že s touto násadou dostanete

$$x_f(t) = -\frac{1}{2}t\cos t.$$

Závěr: Pro skalární lineární ODR 2. řádu s konstantními koeficienty umíme:

obecné

1) nalézt řešení homogenní rovnice (charakteristická rce)
2) nalézt obecné řešení nehomogenní rce

$$y_{ob,nehom}(x) = y_{ob,hom} + y_f$$

- metoda násady ansatz
- metoda variace konstant

3) vyřešit počáteční úlohu
4) vyřešit okrajovou úlohu

Tyto metody platí (jak si ukážeme později) i pro rovnice vyššího řádu.

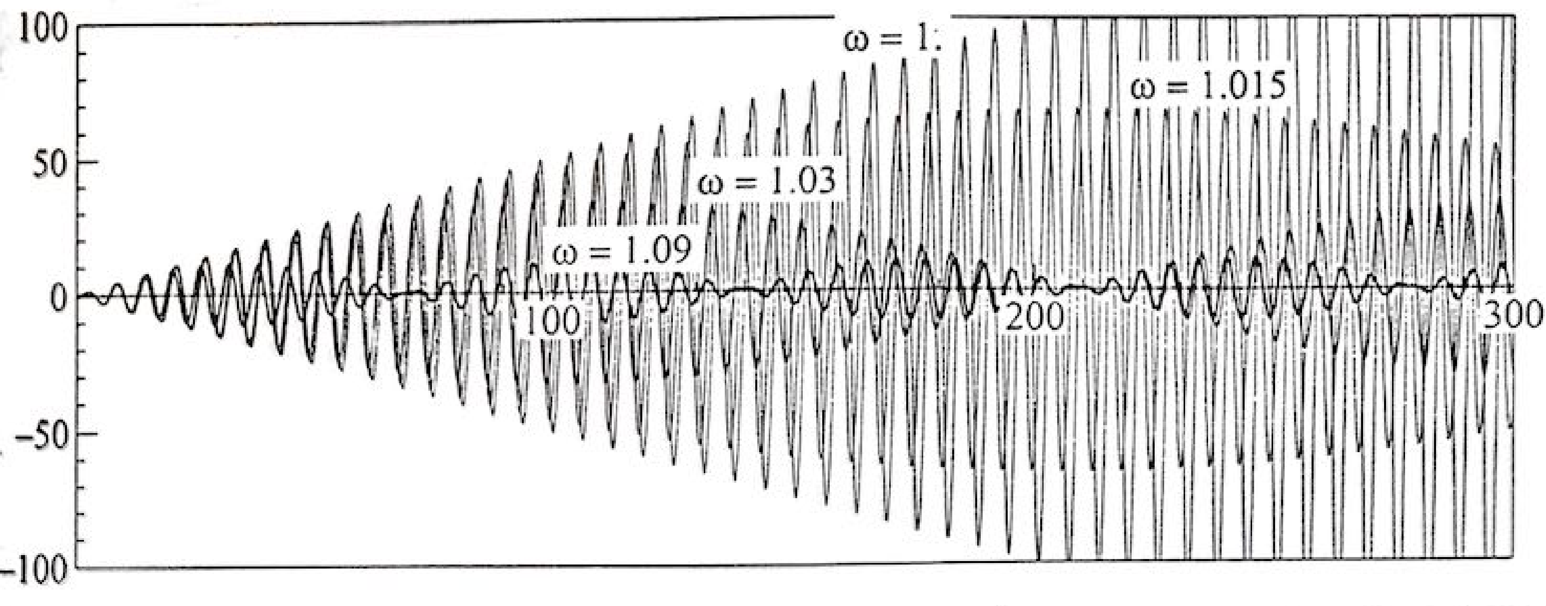


FIGURE 8.2. Solution for $y'' + y = \sin \omega x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $\omega = 1.09, 1.03, 1.015, 1.$

Souhrn poznatků o rovnici $y'' + \frac{b}{m} y' + \frac{k}{m} y = 0$ a počáteční úloze (P) s $f=0$.

Položme $m=1$ pro jednoduchost; předpokládejme: $k>0$ a $b\geq 0$.

① Charakteristická rovnice $\boxed{\lambda^2+b\lambda+k=0}$. Diskriminant $D=\sqrt{b^2-4k}$ a

$$\lambda_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4k}}{2}$$

- Je-li $D>0$, pak $\lambda_1<\lambda_2<0$

$$y_{OB}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

- Je-li $D=0$, pak $\lambda_1 = -\frac{b}{2} < 0$

$$y_{OB}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

tyto režimy mohou nastat jen pro $b>0$, přesněji pro $b\geq 2\sqrt{k}$.

ŽÁDNÉ OSCILACE

- Je-li $D<0$, pak $\lambda, \bar\lambda$ kde $\lambda = -\frac{b}{2} + i\frac{\sqrt{4k-b^2}}{2}$

$$y_{OB}(t) = C_1 e^{-\frac{b}{2}t}\cos\frac{\sqrt{4k-b^2}}{2}t + C_2 e^{-\frac{b}{2}t}\sin\frac{\sqrt{4k-b^2}}{2}t$$

TLUMENÉ KMITY PRO $b>0$

$\boxed{b=0}$ $\quad y_{OB}(t) = C_1\cos\sqrt{k}\,t + C_2 \sin\sqrt{k}\,t$

---

② Uvažovanou rci 2. řádu lze psát jako systém dvou rovnic 1. řádu:

$\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ výchylka, rychlost $\Rightarrow$ $\vec{x}' = \mathbb{A}\vec{x}$ kde $\mathbb{A} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -k & -b\end{pmatrix}$

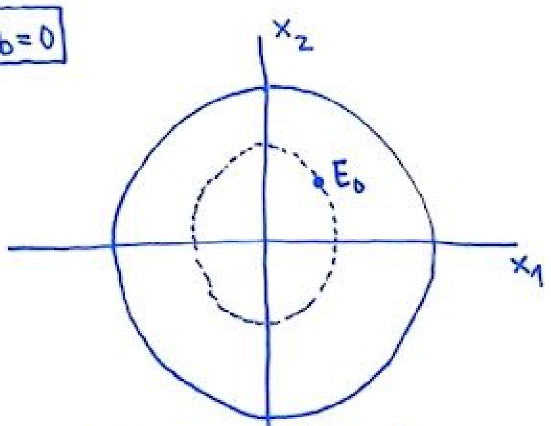
- ▶ důležitý obecný obrat: od $\boxed{\text{jedné rce k-tého řádu}}$ k $\boxed{\text{systému k rovnic 1. řádu}}$
- via lineární algebra ▶ $\det(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})=0$ je popis charakteristické rovnice $\lambda^2+b\lambda+k=0$.
- ▶ Specifikuji tzv. fázový prostor generovaný $\vec{x}=(x_1,x_2)$. V našem případě fázová rovina. $\vec{x}=(0,0)$ je stacionární řešení

---

③ Energetickou bilanci lze v "nových" proměnných x_1,x_2 psát ve tvaru

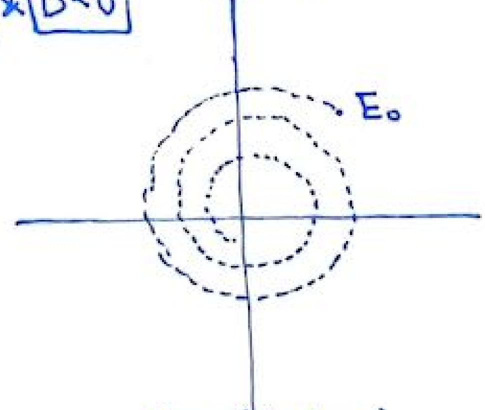
$\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{k}{2}x_1^2 = E_0$ je-li $b=0$ resp. $\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{k}{2}x_1^2 + \underbrace{D_b}_{\geq 0} = E_0$ je-li $b>0$

$\boxed{b=0}$



trajektorie ve fázovém prostoru jsou elipsy s poloosami určenými počáteční energií

$\boxed{b>0}$ & $\boxed{D<0}$



trajektorie je spirála kolem počátku (směřující do počátku)

$\boxed{7.2}$ ODR 1. řádu

V předchozí části jsme ukázali, že $\boxed{\text{ODR 2. řádu}}$ lze převést na $\boxed{\text{systém ODR 1. řádu.}}$ Obecněji, $\boxed{\text{ODR } k\text{-tého řádu}}$ lze převést na systém k ODR typu

(10) $$\vec{y}\,' = \vec{f}(t, \vec{y}) \qquad \text{pro } \vec{y} = (y_1, \dots, y_N).$$

Speciálními typy systému (10) jsou systémy lineárních ODR 1. řádu:

(11) $$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{g}.$$

Vyšetřování vlastností systémů (11) je předmětem kursu lineární algebry.

V této sekci se budeme zabývat skalárními rovnicemi 1. řádu, a to ne nutně lineárními. Budeme řešit rovnici

(12) $$y' = f(t, y)$$

kde $f : \underbrace{(a,b)}_{t} \times \underbrace{(c,d)}_{y}$ je daná funkce. Budeme hledat/zkoumat obecná řešení (12) nebo budeme řešit počáteční úlohu, kdy k rovnici (12) přidáme podmínku

(13) $$y(t_0) = y_0 \qquad t_0 \in (a,b), \; y_0 \in \mathbb{R}.$$

Definice ▶ Řekneme, že $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ je řešením (12) pokud

- $y'(t)$ existuje pro $\forall t \in (a,b)$,
- $y'(t) = f(t, y(t))$ platí pro $\forall t \in (a,b)$.

▶ Nechť y_1 je řešením (12) na (a_1, b_1) a y_2 je řešením (12) na (a_2, b_2). Pokud $(a_1, b_1) \subset (a_2, b_2)$ a $y_1 = y_2$ na (a_1, b_1), pak y_2 nazveme prodloužením y_1. Řešení (12) je maximální, pokud nemá prodloužení definované na ostře větším intervalu.

Nyní se budeme soustředit na dva typy ODR (12):

$\boxed{(i)}$ LINEÁRNÍ ODR (ne nutně s konstantními koeficienty)

$\boxed{(ii)}$ ODR SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI, tj $\boxed{f(t,y) = h(t)g(y)}$

Ad (i) Rovnice typu

(14) $$\boxed{y' + a(t)y = b(t) \qquad a, b : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R} \text{ dány}}$$

$L(y) := y' + a(t)y$ specifikuje LINEÁRNÍ operátor

Cíl: nalézt $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ maximální řešení (14)

Postup je založen opět na vlastnostech exponenciály. Buď $A(t)$ primitivní funkce k $a(t)$. Pak

$$\left[y(t) \exp A(t)\right]' = \exp A(t) \left\{ y'(t) + a(t)y(t) \right\} \overset{(14)}{=} b(t) \exp A(t)$$

$$y(t) e^{A(t)} = e^{A(t)} \left\{ y'(t) + a(t)y(t) \right\} \overset{(14)}{=} b(t) e^{A(t)}$$

Tedy: • je-li $B = B(t)$ primitivní funkce k $b(t) e^{A(t)}$, kde $A = A(t)$ je prim. fce k $a(t)$, pak rce (14) po vynásobení funkcí $e^{A(t)}$ přejde do tvaru

$$\left(y(t) e^{A(t)}\right)' = B'(t)$$

což implikuje

(15) $$\boxed{y(t) = \left(B(t) + C\right) e^{-A(t)} \quad \text{kde } C \in \mathbb{R}}$$

Funkce $e^{A(t)}$ se často nazývá integrační faktor, a dle této funkce i celé schéma: metoda integračního faktoru.

Příklad ④ Najděte maximální obecné řešení rovnice $\boxed{y' - 2ty = t}$.

Řešení Funkce $a(t) = -2t$ a $b(t) = t$ jsou definovány na $\mathbb{R}$. $A(t) := -t^2$ je prim. fce k $a(t)$. Násobme pak e^{-t^2}. Pak

$$\left(y e^{-t^2}\right)' = \left(y' - 2ty\right) e^{-t^2} = t e^{-t^2} = \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2}\right)'.$$

Tedy

$$y(t) e^{-t^2} = -\frac{1}{2} e^{-t^2} + C \qquad \boxed{C \in \mathbb{R}}$$

a tak

$$\boxed{y(t) = Ce^{t^2} - \frac{1}{2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$$ je maximální obecné řešení studované rce.

Konstantu C bychom určili z poč. podmínky.

$\boxed{\text{Ad (vi)}}$ Rovnice typu

$$\boxed{(16) \qquad y' = h(t)\,g(y) \qquad h:(a,b)\to\mathbb{R},\ g:(c,d)\to\mathbb{R} \text{ dány}}$$

Významnými řešeními rce (16) jsou tzv. <u>rovnovážné</u> (<u>stacionární</u>, <u>kritické</u>) <u>body</u> neboli <u>ekvilibria</u>, to jsou taková y_* splňující

$$g(y^*) = 0.$$

Odpovídajícími řešeními jsou $\boxed{y(t) = y_* \quad \forall t\in\mathbb{R}}$

P O S T U P

Je-li $g\neq 0$ na nějakém intervalu $(\tilde{c},\tilde{d})\subset(c,d)$, tzn. g nemění na $(\tilde{c},\tilde{d})$ znaménko, pak řešení najdeme takto: ① proložme

$$(16) \Rightarrow \frac{y'}{g(y)} = h(t), \text{ tak máme } \boxed{G(y) = H(t) + C \quad (\bullet\bullet)},$$

kde G je prim. fce k $\frac{1}{g(y)}$ na $(\tilde{c},\tilde{d})$ a H je primitivní fce k h na (a,b).

② Protože

$$G'(y) = \frac{1}{g(y)} > 0 \text{ nebo } < 0 \text{ na } (\tilde{c},\tilde{d})$$

tak

G je ryze monotónní a spojitá a existuje G^{-1}

③ Z $(\bullet\bullet)$ dostáváme $\boxed{y(t) = G^{-1}(H(t)+C)}$

<u>Poznámka</u> Již řešení v tvaru $(\bullet\bullet)$ může být užitečné! "implicitním" ------> tj. ve tvaru $G(t,y(t)) = 0$.

Výše uvedený postup a argumenty zformulujeme do následujícího tvrzení.

$\boxed{\text{Věta 7.1}}$ Nechť $h\in C((a,b))$ a $g\in C((c,d))$ a $\boxed{g(y)\neq 0 \text{ na } (c,d)}$. Pak každým bodem $(t_0,y_0)\in\mathcal{O} := (a,b)\times(c,d)$ prochází <u>právě jedno</u> maximální (vzhledem k $\mathcal{O}$) řešení rovnice (16). Toto řešení má tvar

$$y(t) = G^{-1}(H(t)+C), \tag{17}$$

<u>kde</u> H je prim. fce k f na (a,b) a G je primitivní funkce k $\frac{1}{g}$ na (c,d).

(Dk) • Víme, že $G'(y)$ existuje v (c,d) a $G'(y)\neq 0$ (neb $G'(y)=\frac{1}{g(y)}\neq 0$).
Tedy G^{-1} existuje a má derivaci. Derivováním (17) dostáváme

$$y'(t) = \left[G^{-1}(z)\right]'_{z=H(t)+C} H'(t) = \frac{1}{G'\left(G^{-1}(H(t)+C)\right)}\, h(t)$$

$$= g\Big(\underbrace{G^{-1}(H(t)+C)}_{y(t)}\Big)\, h(t)$$

$$= g(y(t))\, h(t).$$

• Zavedeme-li $\boxed{H(t) := \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds \quad \text{a} \quad G(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(z)}\,dz ,}$ (18)

pak $y(t_0) = G^{-1}(H(t_0)) = G^{-1}(0) = y_0$; tedy y s takto definovanými G a H splňuje počáteční podmínku neboli prochází bodem $(t_0,y_0)\in U$.

• Ukážeme, že y je definováno na maximálním intervalu $(t_0-\delta, t_0+\gamma)\subset(a,b)$ takový, že platí: je-li $t\in(t_0-\delta, t_0+\delta)$ pak $H(t)\in G[(c,d)]$ obraz intervalu

Je-li $\boxed{\begin{matrix} t_0-\delta=a \\ t_0+\gamma=b \end{matrix}}$, pak nelze rozšířit y (v U).

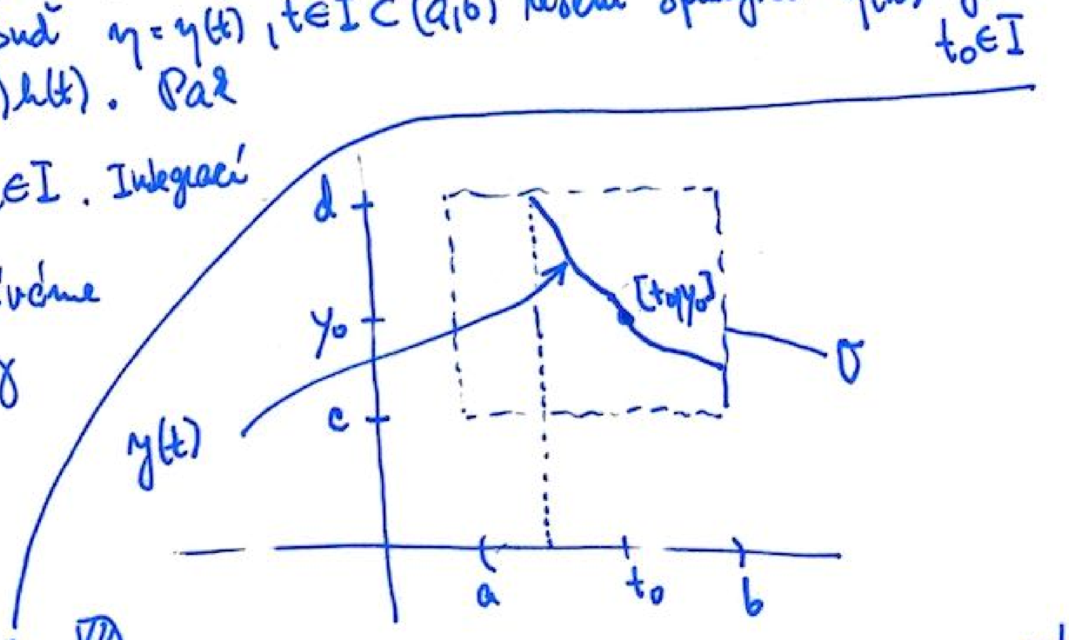
Je-li $t_0-\delta>a$, pak $H(t_0-\delta)\notin G[(c,d)]$. Kdyby totiž $H(t_0-\delta)\in G[(c,d)]$, pak $H(t)\in G[(c,d)]$ i pro $t\in(x_0-\delta-\delta_1, x_0)$, $\delta_1>0$, což však dává spor s definicí maximálního intervalu.

Je-li $t_0+\gamma<b$, argumentujeme podobně.

• Jednoznačnost Buď $\eta=\eta(t)$, $t\in I\subset(a,b)$ řešení splňující $\eta(t_0)=y_0$, $t_0\in I$ a $\eta'(t)=g(\eta(t))h(t)$. Pak

$$\frac{\eta'(t)}{g(\eta(t))} = h(t) \quad t\in I.$$

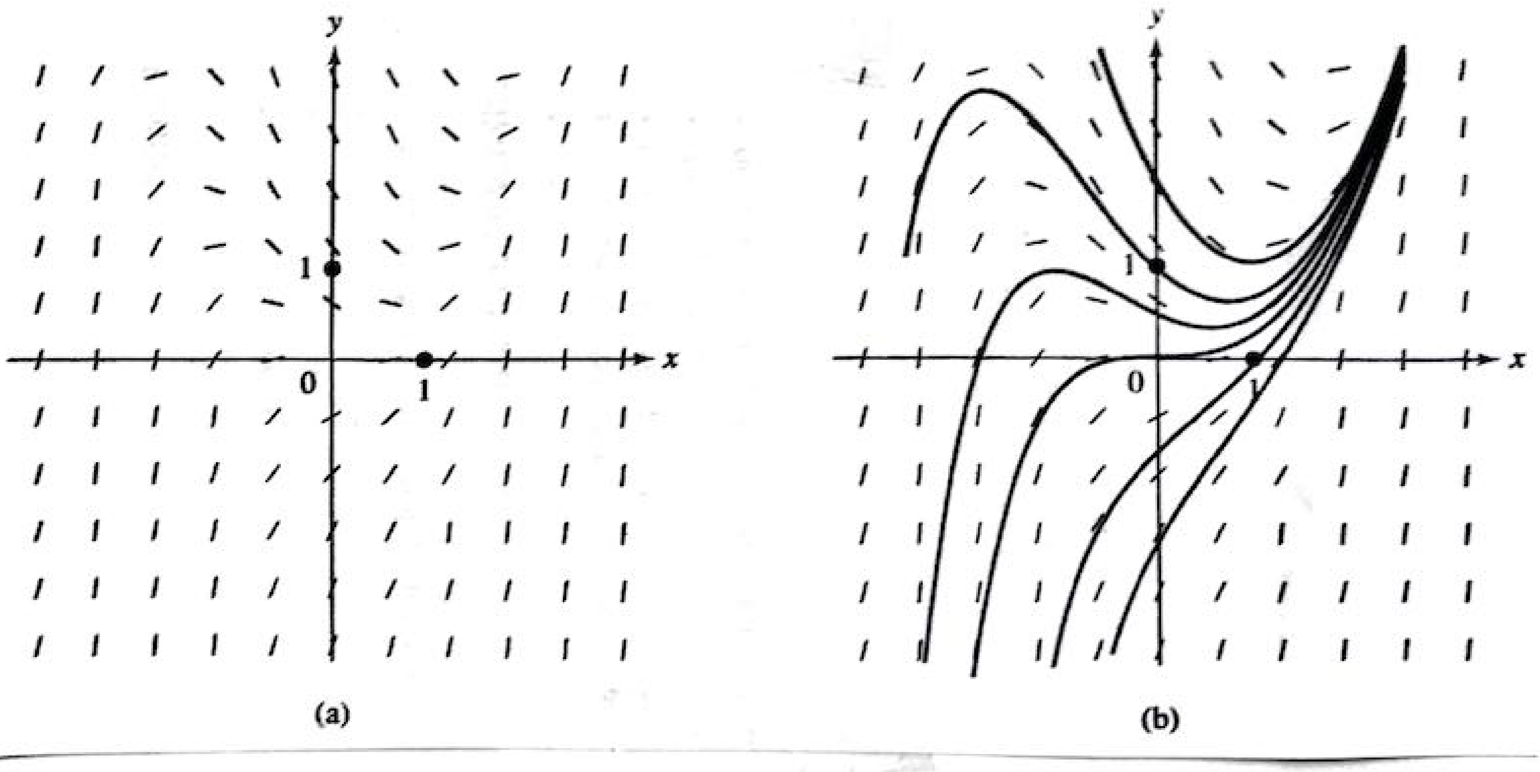
Integrací od t_0 do t dostáváme $G(\eta(t)) = H(t)$. Tedy $\eta(t) = y(t)$ na I a protože y je maximální, tak y je rozšířením η. ▨



Ještě než uvedeme několik příkladů, které lze řešit metodou separovaných proměnných, poznamenejme, že nalezení analytického řešení (vzorečku) pro ODR 1. řádu není až tak jednoduchá záležitost, jak se sami přesvědčíte. Navíc se může stát, že samotný vzoreček je natolik komplikovaný, že porozumění jak se (nalezené) řešení vlastně chová vyžaduje další úsilí. Pro skalární rovnice 1. řádu (typu $y' = f(t,y)$) existuje <u>grafická metoda</u>, která dává cenný náhled jak se řešení může chovat. Postup je založen na myšlence:

$$\left[\begin{array}{l}\text{Řešení } y \text{ rce } y' = f(t,y) \text{ procházející bodem } (t_0,y_0) \\ \text{má v tomto bodě tečnu se směrnicí } f(t_0,y_0)\end{array}\right]$$

Mohu si tedy nakreslit v různých bodech (síť) krátké úsečky s odpovídající směrnicí a získat tak velmi dobrý přehled o tom jak se řešení vycházející z nějakého bodu vyvíjí, viz obrázek.



směrové pole pro rci $y' = x^2 - y$
Vpravo (b) s naznačenými řešeními.

Př. 5 Najděte nejdříve obecné řešení rce $\boxed{y' = a(t)y}$ a poté řešení splňující $\boxed{y(0) = y_0}$. Pro případ $a(t) = a_* > 0$ načrtněte směrové pole.

Řešení Interpretace rce: změna veličiny y je úměrná dané veličině
(kontext) a parametr úměrnosti se mění s časem.

- $\boxed{y \equiv 0}$ je stacionární řeš. (ekvilibrium).
- $\boxed{y \neq 0} \Rightarrow \quad \dfrac{y'}{y} = a(t) \iff \left(\ln|y|\right)' = a(t)$

$\downarrow$ $y \in (0, +\infty)$ nebo $y \in (-\infty, 0)$

$$\iff \ln|y(t)| = \int a(t)\,dt + C =: A(t) + C$$

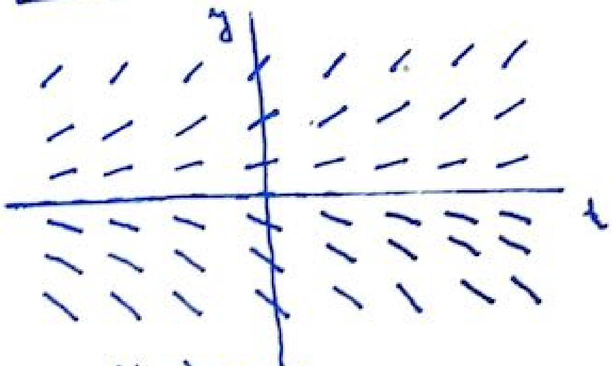
$$\iff |y(t)| = e^{A(t)+C} = e^{C} e^{A(t)} = K e^{A(t)} \qquad K > 0$$

$$\iff \boxed{y(t) = K e^{A(t)} \qquad K \in \mathbb{R}}$$ OBECNÉ ŘEŠENÍ

$$y(0) = y_0 \Rightarrow \underline{K = y_0 e^{-A(0)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = y_0 e^{A(t) - A(0)}}$$ ŘEŠENÍ POČÁTEČNÍ ÚLOHY

- $A(t) = a_*$



$f(t,y) = a_* y$

Př. 6 Úlohu $\boxed{y' = a_* y^2 \quad \text{s} \quad y(0) = y_0 > 0}$ mohu řešit i malinko jinak:

- $y \equiv 0$ mě nezajímá neboť $y_0 > 0$.
- $y \neq 0 \Rightarrow \quad \dfrac{y'}{y^2} = a_* \iff \left(-\dfrac{1}{y}\right)' = a_* \Rightarrow$ integrací od 0 do t

$$-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y_0} = a_* t \iff \boxed{y(t) = \frac{y_0}{1 - a_* y_0 t}}$$

Řešení existuje na intervalu $\left[0, \frac{1}{a_* y_0}\right)$ resp. $\left(-\infty, \frac{1}{a_* y_0}\right)$ a v čase $t = \frac{1}{a_* y_0}$ vykazuje singulární chování (BLOW-UP).

Př. 7 Úloha $y' = a_* y^{3/2}$ má nejen triviální řešení $y \equiv 0$ po nulové počáteční podmínky, ale existují ∞-mnoho řešení nenulových, kde $y(0) = 0$. VIZ CVIČENÍ.

SPECIÁLNÍ TYPY ROVNIC, KTERÉ LZE PŘEVÉST NA ODR ŘEŠITELNÉ PŘEDCHOZÍMI METODAMI.

Bernoulliova rovnice (▲) $\underbrace{y' + a(t)y = b(t)y^{\alpha}}$ kde $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$

Substitucí $\boxed{z := y^{1-\alpha}}$ dostáváme

$$z' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^{\alpha}} \overset{(▲)}{=} (1-\alpha)\,b(t) - (1-\alpha)a(t)y^{1-\alpha}$$
$$= (1-\alpha)b(t) - (1-\alpha)a(t)z$$

a tak z řeší

$$\boxed{z' + (1-\alpha)a(t)z = (1-\alpha)b(t)}$$

kterou mohu řešit metodou integračního faktoru.

Homogenní rovnice Máme rci $\boxed{y' = f(t,y)}$, kde f je invariantní na škálování (změnu měřítka) tzn.

$f(\lambda t, \lambda x) = f(t,x) \quad \forall \lambda > 0$ (f je homogenní stupně 0)

Pak se $f(t,x)$ dá psát ve tvaru $\tilde{f}\left(\frac{x}{t}\right)$ a klademe substituci $\boxed{z := \frac{y}{t}}$

Pak $y' = z + z't$ a tedy $tz' + z = \tilde{f}(z)$

neboli $\boxed{z' = \frac{\tilde{f}(z) - z}{t}}$ což mohu řešit metodou separovaných proměnných

(Př. 8) $\boxed{y' = \frac{t}{y} + \frac{y}{t}}$ S výše uvedenou substitucí

$tz' + z = \frac{1}{z} + z \iff \boxed{z' = \frac{1}{tz}}$

Pozorují, že $f(t,y) := \frac{t}{y} + \frac{y}{t}$ splňuje $f(\lambda t, \lambda y) = f(t,y) \quad \forall \lambda > 0$

a $\tilde{f}(z) := \frac{1}{z} + z$.

RICCATIOVA rovnice $y' + a(t)y + b(t)y^2 = c(t)$

nelze obecně vyřešit. Pokud však znám jedno partikulární řešení y_1 (uhodnutím), pak lze obecné řešení nalézt substitucí $y = z + y_1$, která vede na Bernoulliho rovnici pro z. PROVEĎTE.