Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ____________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Bodů	6	10	10	10	36
Získáno					

[6] 1. Budiž dána funkce

$$h(z) =_{\mathrm{def}} \frac{z}{(z-1)(z+2)}.$$

V bodě $z_0 = \infty$ (máme samozřejmě na mysli standardně zavedené nekonečno v komplexních číslech):

a) najděte Laurentovu řadu funkce $h(z)$,

b) spočtěte reziduum,

c) určete typ singularity.

Spočtěte residuum ve zbývajících singularitách funkce $h(z)$ a ověřte, že součet všech residuí (to jest včetně residua v nekonečnu) je roven nule.

Řešení:

Hledáme koeficienty takové, aby platilo

$$h(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{1}{z}\right)^n .$$

Klíčem je geometrická řada a rozklad na parciální zlomky. Jest

$$\frac{z}{(z-1)(z+2)} = \frac{z}{z^2(1-\frac{1}{z})(1+\frac{2}{z})} = \frac{1}{z}\left(\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{z}} + \frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{z}}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-2)^n\right)\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} .$$

Residuum v nekonečnu je dle definice *záporně* vzatý koeficient u mocniny $\frac{1}{z}$, tedy koeficient pro $n = 0$ ve výše uvedeném rozvoji, což vede na

$$\operatorname{res}_{z_0=-\infty} = -\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = -1.$$

Singularita je zjevně pól násobnosti jedna.

Zbývající singularity funkce $h(z)$ jsou zjevně $z_0 = 1$ a $z_0 = -2$ a jsou to póly násobnosti jedna. Residua v těchto singularitách spočteme kupříkladu podle věty

> Buďte $f(z)$, $g(z)$ holomorfní funkce na okolí bodu z_0 a nechť má funkce $g(z)$ v bodu z_0 kořen násobnosti jedna, pak
>
> $$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \left.\frac{f(z)}{g'(z)}\right|_{z=z_0} .$$

V našem případě tedy

$$\operatorname{res}_{z_0=1} \frac{z}{(z-1)(z+2)} = \left.\frac{z}{z+2}\right|_{z=1} = \frac{1}{3},$$

$$\operatorname{res}_{z_0=-2} \frac{z}{(z-1)(z+2)} = \left.\frac{z}{z-1}\right|_{z=-2} = \frac{2}{3},$$

a skutečně tedy platí, že $\operatorname{res}_{z_0=1} f(z) + \operatorname{res}_{z_0=-2} f(z) + \operatorname{res}_{z_0=\infty} f(z) = 0$.

[10] 2. Pomocí integrace vhodné komplexní funkce přes křivku v komplexní rovině spočtěte integrál

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\cos x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

Integrál lze zřejmě standardním postupem úspěšně převést na integraci přes jednotkovou kružnici v komplexní rovině. Postupujeme známým způsobem

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} & \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} & \cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \\ \mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}z\,\mathrm{d}x & \sin x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right) & \cos x = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \end{matrix} \right|$$
$$= \int_{|z|=1} \frac{1}{\left(5-\frac{3}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} = \int_{|z|=1} \frac{4z}{\mathrm{i}\left(3z^2-10z+3\right)^2}\,\mathrm{d}z.$$

Prozkoumáme singularity funkce $f(z) =_{\mathrm{def}} \frac{4z}{\mathrm{i}(3z^2-10z+3)^2}$, kořeny polynomu $3z^2-10z+3$ ve jmenovateli jsou zřejmě

$$z_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \begin{cases} 3, \\ \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Uvnitř jednotkové kružnice se nachází zřejmě pouze bod $z_1 = \frac{1}{3}$, dále je jasné, že singularita v tomto bodě bude dvojnásobným pólem. Integrál spočteme podle reziduové věty

$$\int_{|z|=1} \frac{4z}{\mathrm{i}\left(3z^2-10z+3\right)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_{z=\frac{1}{3}}\left(\frac{4z}{\mathrm{i}\left(3z^2-10z+3\right)^2}\right).$$

Zbývá spočíst residua. Residuum v bodě $z_1 = \frac{1}{3}$ (dvojnásobný pól) spočteme například podle věty

Buď $f(z)$ komplexní funkce, která má v bodě z_0 pól násobnosti nejvýše n, pak

$$\mathrm{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left((z-z_0)^n f(z)\right)\right).$$

V našem případě tedy dostaneme

$$\mathrm{res}_{z=\frac{1}{3}}\left(\frac{4z}{\mathrm{i}\left(3z^2-10z+3\right)^2}\right) = \mathrm{res}_{z=\frac{1}{3}}\left(\frac{4z}{9\mathrm{i}\left(z-\frac{1}{3}\right)^2(z-3)^2}\right)$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{4z}{9\mathrm{i}\,(z-3)^2}\right)\bigg|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{4}{9\mathrm{i}}\,\frac{(z-3)^2-2z\,(z-3)}{(z-3)^4}\bigg|_{z=\cancel{2-}\sqrt{3}} = -\frac{5}{64}\mathrm{i}.$$

Podle residuové věty tedy platí

$$\int_{|z|=1} \frac{4z}{\mathrm{i}\left(3z^2-10z+3\right)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{5}{64}\mathrm{i}\right) = \frac{5}{32}\pi.$$

[10] 3. Buď $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ daná funkce, $y \in \mathbb{R}$ dané reálné číslo a $k \in \mathbb{N}$ dané přirozené číslo. (Pro účely tohoto příkladu upřesňujeme, že přirozená čísla chápeme *včetně nuly*.) Pro libovolné $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definujeme distribuci $T_n^{y,k}$ jako

$$\left\langle T_n^{y,k}, \varphi \right\rangle =_{\mathrm{def}} \int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n^3 \left[g(y+x) - 2g(y) + g(y-x) \right] \varphi\left(\frac{x+y}{n^k} \right) \mathrm{d}x. \tag{1}$$

a) Ukažte, že definicí (1) je skutečně pro libovolné pevné n zavedena distribuce (korektnost definice, linearita, spojitost).

b) Ukažte, že posloupnost distribucí $\left\{ T_n^{y,k} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ je pro dané pevné $y \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$ a pro danou pevnou funkci $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ konvergentní ve smyslu distribucí. Určete limitní distribuci, to jest najděte $\lim_{n \to +\infty} T_n^{y,k}$.

Řešení:

Linearita definičního vztahu (1) vůči testovací funkci φ je zřejmá, integrál v definičním vztahu je taktéž dobře definovaný (připomínáme, že $n \in \mathbb{N}$ je *pevné* přirozené číslo) kvůli vlastnostem funkce g a testovací funkce φ.

Zbývá ověřit spojitost. Abychom ukázali spojitost, je nutné ukázat, že pro každou posloupnost funkcí $\{\varphi_m\}_{m=1}^{+\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ konvergující k nule $\varphi_m \to 0$ ve smyslu $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ platí

$$\left\langle T_n^{y,k}, \varphi_m \right\rangle \to 0,$$

což po rozepsání znamená, že chceme ukázat

$$\lim_{m \to +\infty} \left\langle T_n^{y,k}, \varphi_m \right\rangle = \lim_{m \to +\infty} \int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n^3 \left[g(y+x) - 2g(y) + g(y-x) \right] \varphi_m\left(\frac{x+y}{n^k} \right) \mathrm{d}x = 0. \tag{2}$$

Protože je $\varphi_m \to 0$ ve smyslu konvergence v $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, tak víme, že existuje kompaktní množina $K \subset \mathbb{R}$, taková, že pro každou funkci φ_m platí $\operatorname{supp} \varphi_m \subset K$ a dále, že také platí $\varphi_m \rightrightarrows 0$ na množině K. (Stejnoměrná konvergence.) Rovněž pro libovolnou derivaci $l \in N$ platí $\frac{\mathrm{d}^l \varphi_m}{\mathrm{d}x^l} \rightrightarrows 0$ na množině K. Důkaz požadovaného tvrzení (2) je jednoduchý, neboť

$$\begin{aligned} 0 \leq & \left| \int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n^3 \left[g(y+x) - 2g(y) + g(y-x) \right] \varphi_m\left(\frac{x+y}{n^k} \right) \mathrm{d}x \right| \\ & \leq n^3 \max_{x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]} \left| \left[g(y+x) - 2g(y) + g(y-x) \right] \right| \max_{x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]} \left| \varphi_m\left(\frac{x+y}{n^k} \right) \right| \frac{2}{n} \xrightarrow{m \to +\infty} 0, \end{aligned}$$

kde jsme využili stejnoměrné konvergence posloupnosti φ_m.

Pro pevné $y \in \mathbb{R}$ a $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ zkoumáme limitu

$$\lim_{n \to +\infty} \left\langle T_n^{y,k}, \varphi \right\rangle = \lim_{n \to +\infty} \int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n^3 \left[g(y+x) - 2g(y) + g(y-x) \right] \varphi\left(\frac{x+y}{n^k} \right) \mathrm{d}x,$$

přičemž výsledek se snažíme upravit do tvaru linerárního funkcionálu působícího na testovací funkci φ. Začneme s úpravami. Jest

$$\begin{aligned} & \int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n^3 \left[g(y+x) - 2g(y) + g(y-x) \right] \varphi\left(\frac{x+y}{n^k} \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n^3 \left[g(y+x) - 2g(y) + g(y-x) \right] \varphi(0) \, \mathrm{d}x + \int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n^3 \left[g(y+x) - 2g(y) + g(y-x) \right] \left[\varphi\left(\frac{x+y}{n^k} \right) - \varphi(0) \right] \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{g(y) + \left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=y} x + \frac{1}{2} \left.\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\xi,\, \xi \in (y, y+x)} x^2 - 2g(y) + g(y) - \left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=y} x + \frac{1}{2} \left.\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\chi,\, \chi \in (y-x, y)} x^2}{\frac{1}{n^3}} \varphi(0) \, \mathrm{d}x \\ & \qquad + \int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n^3 \left[g(y+x) - 2g(y) + g(y-x) \right] \left[\varphi(0) + \left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\xi,\, \xi \in \left(0, \frac{x+y}{n^k}\right)} \frac{x+y}{n^k} - \varphi(0) \right] \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{3}$$

přičemž jsme použili Taylorův rozvoj s Lagrangeovým tvarem zbytku. (Dvakrát pro funkci $g(y \pm x)$ se středem v y a jednou pro funkci φ se středem v nule. Interval pro volbu ξ značíme $\left(0, \frac{x+y}{n^k}\right)$, pro $x+y<0$ bychom pochopitelně měli psát $\left(\frac{x+y}{n^k},0\right)$; touto drobností si ovšem nebudeme zápis komplikovat. Obdobně pracujeme s intervaly $(y,y+x)$ a $(y-x,y)$ v Taylorově rozvoji.) První ze získaných integrálů v (3) mírně upravíme,

$$\int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{g\left(y\right)+\left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=y} x+\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\xi,\,\xi\in(y,y+x)} x^2-2g(y)+g\left(y\right)-\left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=y} x+\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\chi,\,\chi\in(y-x,y)} x^2}{\frac{1}{n^3}}\varphi(0)\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\left[\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\xi,\,\xi\in(y,y+x)}+\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\chi,\,\chi\in(y-x,y)}\right]n^3x^2\varphi(0)\,\mathrm{d}x$$

a můžeme spočíst limitu,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\left[\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\xi,\,\xi\in(y,y+x)}+\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\chi,\,\chi\in(y-x,y)}\right]n^3x^2\varphi(0)\,\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\left[\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\xi,\,\xi\in(y,y+x)}-\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=y}\right]n^3x^2\varphi(0)\,\mathrm{d}x$$
$$+\lim_{n\to+\infty}\int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\left[\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\xi,\,\xi\in(y-x,y)}-\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=y}\right]n^3x^2\varphi(0)\,\mathrm{d}x+\lim_{n\to+\infty}\int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=y}n^3x^2\varphi(0)\,\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=y}\left(n^3\int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}x^2\,\mathrm{d}x\right)\varphi(0)=\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=y}\left(\lim_{n\to+\infty}n^3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\right)\varphi(0)=\frac{2}{3}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=y}\varphi(0),\qquad(4)$$

přičemž jsme využili toho, že

$$\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\xi,\,\xi\in(y,y+x)}-\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=y}\xrightarrow{x\to0+}0,$$

z čehož plyne

$$\left|\int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\left[\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\xi,\,\xi\in(y,y+x)}-\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=y}\right]n^3x^2\varphi(0)\,\mathrm{d}x\right|$$
$$\le\frac{1}{2}\left(\max_{x\in\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]}\left|\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\xi,\,\xi\in(y,y+x)}-\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=y}\right|\right)|\varphi(0)|\int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}n^3x^2\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}\left(\max_{x\in\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]}\left|\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\xi,\,\xi\in(y,y+x)}-\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=y}\right|\right)|\varphi(0)|\xrightarrow{n\to+\infty}0.$$

V druhém z integrálů v (3) pak postupujeme následovně

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}n^3\left[g\left(y+x\right)-2g(y)+g\left(y-x\right)\right]\left[\varphi(0)+\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\xi,\,\xi\in\left(0,\frac{x+y}{n^k}\right)}\frac{x+y}{n^k}-\varphi(0)\right]\,\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}n^3\left[g\left(y+x\right)-2g(y)+g\left(y-x\right)\right]\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\xi,\,\xi\in\left(0,\frac{x+y}{n^k}\right)}\frac{x+y}{n^k}\,\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}n^3\left(\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\xi,\,\xi\in(y,y+x)}+\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\chi,\,\chi\in(y-x,y)}\right)x^2\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\xi,\,\xi\in\left(0,\frac{x+y}{n^k}\right)}\frac{x+y}{n^k}\,\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}n^{3-k}\left(\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\xi,\,\xi\in(y,y+x)}+\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\chi,\,\chi\in(y-x,y)}\right)\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\xi,\,\xi\in\left(0,\frac{x+y}{n^k}\right)}x^3\,\mathrm{d}x$$
$$+\lim_{n\to+\infty}\int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}n^{3-k}\left(\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\xi,\,\xi\in(y,y+x)}+\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\chi,\,\chi\in(y-x,y)}\right)\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\xi,\,\xi\in\left(0,\frac{x+y}{n^k}\right)}yx^2\,\mathrm{d}x,$$

přičemž jsme opět využili Taylorův rozvoj s Lagrangeovým tvarem zbytku. První z integrálů na pravé straně je identicky rovný nule neboť integrujeme lichou funkci na intervalu $\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$. Pro druhý z interálu je klíčový výpočet

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}n^{3-k}x^2\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}n^{3-k}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{3}\frac{1}{n^k}=\begin{cases}\frac{2}{3}, & k=0,\\ 0, & k\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\end{cases}$$

a proto dostaneme

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n^3\left[g\left(y+x\right)-2g(y)+g\left(y-x\right)\right]\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\xi,\,\xi\in\left(0,\frac{x+y}{n^k}\right)}\frac{x+y}{n^k}\,\mathrm{d}x\\
&=\lim_{n\to+\infty}\int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n^{3-k}\left(\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\xi,\,\xi\in(y,y+x)}+\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\chi,\,\chi\in(y-x,y)}\right)\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\xi,\,\xi\in\left(0,\frac{x+y}{n^k}\right)} yx^2\,\mathrm{d}x\\
&=\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=y}\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=0} y\lim_{n\to+\infty}\int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n^{3-k}x^2\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{2}{3}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=y}\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=0}y, & k=0,\\ 0, & k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\,,\end{cases}
\end{aligned}
$$

přičemž při manipulaci se členem $\left(\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\xi,\,\xi\in(y,y+x)}+\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=\chi,\,\chi\in(y-x,y)}\right)\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\xi,\,\xi\in\left(0,\frac{x+y}{n^k}\right)}$ jsme využili podobných úprav jako výše, viz úpravy při výpočtu limity (4).

Celkem jsme tedy zjistili, že platí

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\int_{x=-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n^3\left[g\left(y+x\right)-2g(y)+g\left(y-x\right)\right]\varphi\left(\frac{x+y}{n^k}\right)\mathrm{d}x\\
&\qquad=\frac{2}{3}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=y}\varphi(0)+\begin{cases}\frac{2}{3}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=y}\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=0}y, & k=0,\\ 0, & k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\,,\end{cases}
\end{aligned}
$$

což lze pro $k=0$ přepsat jako

$$
\lim_{n\to+\infty}\left\langle T_n^{y,k},\varphi\right\rangle=\left\langle\frac{2}{3}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=y}T_{\delta(x-0)}-\frac{2}{3}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=y}yT_{\delta'(x-0)},\varphi\right\rangle,
$$

přičemž $T_{\delta(x-0)}$ značí Diracovu distribuci v nule, a $T_{\delta'(x-0)}$ značí derivaci Diracovy distribuce v nule a uvedená rovnost platí pro libovolnou testovací funkci $\varphi\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}\right)$. Ve smyslu konvergece distribucí tedy pro $k=0$ platí

$$
\lim_{n\to+\infty}T_n^{y,k}=\frac{2}{3}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=y}T_{\delta(x-0)}-\frac{2}{3}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=y}yT_{\delta'(x-0)}.
$$

Pro $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ pak máme pouze

$$
\lim_{n\to+\infty}T_n^{y,k}=\frac{2}{3}\left.\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\zeta^2}\right|_{\zeta=y}T_{\delta(x-0)}.
$$

[10] 4. Označme si $\chi_{[-1,1]}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ charakteristickou funkci intevalu $[-1,1]$, to jest

$$\chi_{[-1,1]} =_{\mathrm{def}} \begin{cases} 1, & x \in [-1,1], \\ 0, & x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

a) Podle definice spočtěte $\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}$. (Než začnete počítat, nakreslete si obrázek!)

b) Spočtěte Fourierovu transformaci $\chi_{[-1,1]}$, to jest spočtěte

$$\mathcal{F}\left[\chi_{[-1,1]}\right].$$

c) Spočtěte inverzní Fourierovu transformaci funkce $\left(\frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi\xi}\right)^2$, to jest spočtěte

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\left(\frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi\xi}\right)^2\right].$$

(Proměnnou ve Fourierově prostoru značíme ξ.) Při výpočtu lze výhodně využít výsledků z předchozích bodů.

Řešení:

Konvoluce je definována jako

$$(f * g)(y) =_{\mathrm{def}} \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x) g(y-x)\,\mathrm{d}x,$$

což po dosazení dává

$$\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]} = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \chi_{[-1,1]}(x)\chi_{[-1,1]}(y-x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \chi_{|x|\leq 1}\chi_{|y-x|\leq 1}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty,-2], \\ 2+y, & y \in (2,0), \\ 2, & y = 0, \\ 2-y, & y \in (0,2), \\ 0, & y \in [2,+\infty). \end{cases}$$

Při výpočtu jsme využili skutečnost, že pro $y = 2$ okamžitě vidíme, že hodnota integrálu musí být rovná dvěma, zatímco pro $|y| > 2$ musí být hodnota integrálu rovná nule. (Funkce mají různý nosič.) Tyto dvě hodnoty pak musí být spojeny lineární funkcí. (Postupně se překrývající nosiče.) Označme si výslednou funkci jako T od slova trojúhelník, to jest

$$T(x) =_{\mathrm{def}} \begin{cases} 0, & x \in (-\infty,-2], \\ 2+x, & x \in (2,0), \\ 2, & x = 0, \\ 2-x, & x \in (0,2), \\ 0, & x \in [2,+\infty). \end{cases}$$

Nyní spočteme Fourierovu transformaci funkce $\chi_{[-1,1]}$. Použijeme definici Fourierovy transformace používanou na přednášce,

$$\mathcal{F}[f(x)](\xi) =_{\mathrm{def}} \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x$$

a po dosazení dostaneme

$$\mathcal{F}\left[\chi_{[-1,1]}\right](\xi) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \chi_{[-1,1]}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{x=-1}^{1} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}}{2\pi\mathrm{i}\xi}\right]_{x=-1}^{1} = \frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi} - \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi}}{2\pi\mathrm{i}\xi} = 2\frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi\xi},$$

přičemž hodnotu pro $\xi = 0$ definujeme prostřednictvím limity $\mathcal{F}\left[\chi_{[-1,1]}\right](\xi)\big|_{\xi=0} = \lim_{\xi\to 0} 2\frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi\xi}$.

Pro výpočet inverzní Fourierovy transformace $\left(\frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi\xi}\right)^2$ využijeme poznatků o Fourierově transformaci konvoluce. Platí

$$\mathcal{F}\left[\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right] = \mathcal{F}\left[\chi_{[-1,1]}\right]\mathcal{F}\left[\chi_{[-1,1]}\right],$$

což s použitím vztahu pro Fourierovu transformaci funkce $\chi_{[-1,1]}$ znamená, že

$$\mathcal{F}\left[\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right] = 4\left(\frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi\xi}\right)^2.$$

Na předchozí rovnost aplikujeme inverzní Fourierovu transformaci a dostaneme,

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\left(\frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi\xi}\right)^2\right] = \frac{1}{4}\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}.$$

Nyní využijeme toho, že konvoluci $\chi_{[-1,1]}$ jsme již spočetli, a můžeme proto napsat výsledek

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\left(\frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi\xi}\right)^2\right] = \frac{1}{4}T(x).$$