[8] 2. Buď f a g dvě reálné funkce definované v (a, b), $-\infty \le a < b \le +\infty$.

- Pro $x \in (a, b)$, zadefinujte pojem: $f'(x)$ existuje a je vlastní.
- Zformulujte a dokažte větu o derivování součinu $(fg)'$ v bodě x. Zformulujte také všechna tvrzení, která v důkazu využíváte (bez důkazu).

Dále,

- zadefinujte pojmy: F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b).
- zformulujte a dokažte větu o integraci *per partes*.

• $\boxed{f'(x) \text{ existuje a je vlastní}} \overset{df.}{=} \exists A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = A$

• $\boxed{\text{Věta (o derivování součinu)}}$ Nechť existují $f'(x)$ a $g'(x)$ vlastní, pak existuje $(fg)'(x)$ vlastní a platí: $\boxed{(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$

(Dk) • využijeme: existuje-li $g'(x) \in \mathbb{R}$, pak je g v x spojitá

• Protože

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

a

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\, g(x+h) + f(x)\, \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ \xrightarrow[h\to 0]{} & & f'(x) & g(x) & & f(x) & g'(x) \end{array}$$

a dostáváme tvrzení.

• $\boxed{F \text{ je PF k } f \text{ na } (a,b)} \equiv F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a,b)$

• Věta (o integraci per partes) Buď F PF k f na (a,b), G PF k g na (a,b).

Pak platí

$$\int F g = FG - \int f G$$

pokud alespoň jedna z prim. fcí $\int Fg$ nebo $\int fG$ existuje.

(Dk) Nechť např. $\phi(x) = \int f G \, dx$ existuje, tj. $\phi'(x) = f(x)G(x)$

Pak tvrdíme, že

$H(x) := F(x)G(x) - \phi(x)$ je P.F. k Fg.

Zjevně: $H'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x) - f(x)G(x) = F(x)g(x)$. ☐

NOFY151, ZS 2019-2020	Teoretická část zkouškové písemné práce	23. ledna 2020

Jméno a příjmení: ______________________________

Příklad	1	2	3	Celkem bodů
Bodů	8	8	8	24
Získáno				

[1] f spoj. na uzavřeném int
[0.5] Znění Darbouxovy věty
[1] Obrázek
[2.5] Aplikace DV
[2.5] Důkaz.

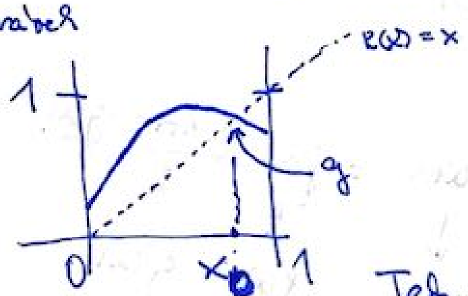
[8] 1.

- Zformulujte přesně Darbouxovu větu o nabývání mezihodnot.
- Uvažujte funkci g spojitou na $\langle 0,1\rangle$ takovou, že $g[\langle 0,1\rangle] \subset [0,1]$ neboli $g := \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$.
  -- Ukažte, že g má na $\langle 0,1\rangle$ pevný bod, tj. existuje $x \in \langle 0,1\rangle$ tak, že $g(x) = x$.
  -- Nakreslete obrázek charakterizující situaci.
  -- *Návod: zkoumejte vlastnosti funkce $f(x) := x - g(x)$ a zkuste použít Darbouxovu větu.*
- Darbouxovu větu dokažte (stačí uvést hlavní kroky důkazu).

Řešení

- $\boxed{\text{Darbouxova věta}}$ Buď $f \in C(\langle a,b\rangle)$. Pak pro každé $c \in \langle f(a); f(b)\rangle$ [c ležící mezi $f(a)$ a $f(b)$] existuje $x_c \in \langle a,b\rangle$ tak, že $f(x_c) = c$.

- Obrázek



- $f(x) = x - g(x) \in C(\langle 0,1\rangle)$
- Navíc $f(0) = -g(0) \leq 0$

  a $f(1) = 1 - g(1) \geq 0$

Tedy dle Darbouxovy věty pro $0 \in \langle f(0); f(1)\rangle$ $\exists\, x_p \in \langle 0,1\rangle$ tak, že $f(x_p) = 0$, ale to znamená, že $f(x_p) = x_p$.

- Dk Pro $c = f(a)$ nebo $c = f(b)$ stačí vzít $x_c = a$ nebo $x_c = b$.

. Nechť (BÚNO) $f(a) < f(b)$ a $c \in (f(a), f(b))$. Definuj
$M := \{x \in \langle a,b\rangle;\ f(x) < c\}$. Pak
- $M \neq \emptyset$ $(a \in M)$
- $\exists\, \delta > 0$ $\langle a, a+\delta) \subset M$
- $\exists\, \delta > 0$ $(b-\delta, b\rangle \cap M = \emptyset$

$\boxed{\text{Def. } x_c := \sup M}$. Z definice sup:

$(\forall n)\left(\exists\, x_n \in \langle a+\frac{\delta}{2}, b-\frac{\delta}{2}\rangle\right)$ tak, že $x_c - \frac{1}{n} \leq x_n < x_c$.

Pak $x_n \to x_c$ a ze spoj. $f(x_n) \to f(x_c) \leq f(c)$

$(\forall n)\ \exists\, \tilde{x}_n \in \langle a+\frac{\delta}{2}, b-\frac{\delta}{2}\rangle$ tak, že $x_c < \tilde{x}_n \leq x_c + \frac{1}{n} \Rightarrow f(\tilde{x}_n) \to f(x_c) \geq f(c)$

Tedy $\boxed{f(x_c) = f(c)}$

Q.E.D.

[8] 3. Nechť je reálná funkce f definována na (a, b) a nechť $c \in (a, b)$. Uveďte přesně definice pojmů:

- f je rostoucí na intervalu (a, c).
- f je konvexní na intervalu (a, c).

Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení (tj. buď výrok dokažte, nebo uveďte protipříklad):

1. f je rostoucí na (a, c), f rostoucí na (c, b) $\Longrightarrow$ f rostoucí na (a, b);
2. f je rostoucí na (a, c), f rostoucí na (c, b) a f je spojitá v bodě c $\Longrightarrow$ f rostoucí na (a, b);
3. f je konvexní na (a, c), f konvexní na (c, b) $\Longrightarrow$ f konvexní na (a, b);
4. f je konvexní na (a, c), f konvexní na (c, b) a f je spojitá v bodě c $\Longrightarrow$ f konvexní na (a, b);

Nechť $f''(x)$ existuje pro všechna $x \in (a, c)$. Doplňte tvrzení v následujících implikacích a první implikaci dokažte:

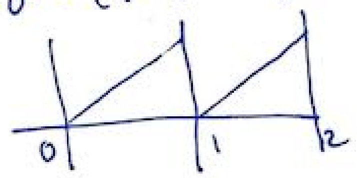
- Je-li f rostoucí na intervalu (a, c), pak pro každé $x \in (a, c)$: $f'(x) \ldots.$
- Je-li f konvexní na intervalu (a, c), pak pro každé $x \in (a, c)$: $f''(x) \ldots.$

Řešení

- $\boxed{f \text{ rostoucí na } (a,c)} \stackrel{df}{\equiv} \forall x,y \in (a,c)\,;\ x<y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- $\boxed{f \text{ konvexní na } (a,c)} \equiv \forall x,y,z \in (a,c)\,;\ x<y<z \Rightarrow f(y) \leq f(x) + \frac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-x)$

(1) NEPLATÍ

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{na } (0,1) \\ x-1 & \text{na } (1,2) \end{cases}$$

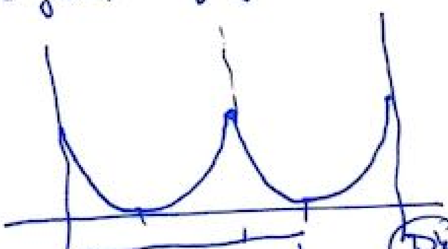


(2) PLATÍ

$x,y \in (a,c)$ libovolné, $x<y \Rightarrow$ tvrzení jasně platí jsou-li $x,y \in (a,c)$ nebo $x,y \in (c,b)$.

Zbývá situace $x \in (a,c)$, $y \in (c,b)$. Pak však $f(x) < f(c) < f(y)$ a tvrzení platí.

(3) i (4) NEPLATÍ



- $f \nearrow$ na $(a,c) \Rightarrow \boxed{f'(x) \geq 0}$
- f konvexní na $(a,c) \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ v (a,c)

Dk: $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0$ $\downarrow x \to y$ $f'(y) \geq 0$.