Pro $x \in \mathbb{R}$ umíme odpovědět otázku, kdy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konverguje, diverguje či osciluje. Skutečně, protože $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n}$ konverguje dle limitního d'Alambertova kritéria pokud $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)} \frac{n}{|x|^n} < 1$, což je ekvivalentní požadavku $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}|x| < 1 \iff |x| < 1$, dostáváme, dle $\boxed{\text{Kritéria AK} \Rightarrow \text{K}}$, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konverguje pro $x \in (-1,1)$ (dokonce absolutně).

Dále víme, že $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n}$ neexistuje nebo není nulová pro $x \in \mathbb{R}$ taková, že $|x| > 1$. (Pro $x > 1$, posloupnost $\{\frac{x^n}{n}\}_1^{\infty}$ diverguje; pro $x < -1$, — " — $\{\frac{x^n}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje)

Tedy, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ pro $x > 1$ diverguje a pro $x < -1$ nekonverguje (osciluje). Zbývají body $x = \pm 1$. Pro $x = 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (viz Příklad 5), kdežto řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje (ale ne absolutně), viz Příklad 12.

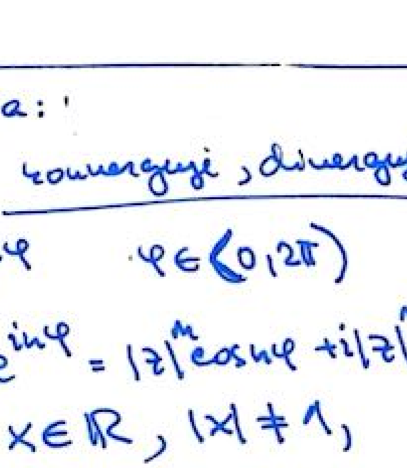
Motivací pro další výklad bude otázka:
Pro jaká $z \in \mathbb{C}$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konverguje, diverguje, osciluje?

Protože pro $z \in \mathbb{C}$: $z = |z| e^{i\varphi}$ $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$

a $z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n \cos n\varphi + i |z|^n \sin n\varphi$

tak stejnými metodami jako pro $x \in \mathbb{R}$, $|x| \neq 1$, zjistíme, že

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konverguje (dokonce absolutně) pro $|z| < 1$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ diverguje nebo osciluje pro $|z| > 1$.



Zbývá vyšetřit $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ tzn. z ležící na jednotkové kružnici neboli z tvaru $z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$. Přitom víme, že na jednotkové kružnici je bod $(z = 1)$, kdy řada diverguje a bod $(z = -1)$, kdy řada konverguje.

Zajímá nás tedy co se děje v ostatních bodech jednotkové kružnice.
Připomeňme si, že zkoumání konvergence řady $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n}}$ je ekvivalentní zkoumání konv. řad $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n}}$ a $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n}}$

Všimněme si, že tyto řady lze psát ve tvaru
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, kde $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = e^{in\varphi}$ či $\sin n\varphi$ nebo $\cos n\varphi$.

Řadami typu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ se nyní budeme zabývat. Začneme jedním technickým tvrzením, které lze interpretovat jako diskrétní verzi integrace per-partes.

Lemma (Diskrétní verze integrace per-partes) Pro $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}, \{b_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ platí:
$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \quad \text{kde } B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i.$$

Dk: Protože $b_1 = B_1$ a $b_k = B_k - B_{k-1}$ pro $k \geq 2$, píšeme
$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k = \sum_{k=2}^{m} a_k (B_k - B_{k-1}) + a_1 B_1$$
$$= a_1 B_1 + a_2 B_2 - a_2 B_1 + a_3 B_3 - a_3 B_2 + \dots + a_m B_m - a_m B_{m-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_m B_m = a_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \quad \blacksquare$$

Skutečnost, že sčítáme v Lemmatu od $k=1$, nehrála v důkazu žádnou roli; máme tedy také: pro $m > n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:
$$\boxed{(6) \quad \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \quad \text{kde } B_k := \sum_{i=n+1}^{k} b_i}$$

$\boxed{\text{Věta 6.11}}$ (Abelovo a Dirichletovo kritérium)

Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ monotónní. Buď $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Dále nechť:

$\boxed{\text{BUĎ}}$

(DIR) $\quad a_n \to 0$ pro $n \to \infty$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ má omezenou posloupnost částečných součtů,

NEBO

(ABEL) $\quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje.

Pak $\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje

Dk Chceme ukázat, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ splňuje B.-C. podmínku: K danému $\varepsilon > 0$ hledáme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall\, m \geq n \geq n_0$: $\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k < \varepsilon$.

Definujeme-li $B_k := \sum_{i=n+1}^{k} b_i$, tak z předchozí lemmy a(6) dostáváme:

$$(\bullet) \quad \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| \leq |a_m||B_m| + \max_{k \in \{n+1,\dots,m\}} |B_k| \sum_{k=n+1}^{m-1} |a_{k+1} - a_k|$$

Protože $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní, tak $|a_{k+1} - a_k| = \begin{cases} a_{k+1} - a_k & \text{je-li } \{a_k\} \text{ rostoucí resp. neklesající,} \\ a_k - a_{k+1} & \text{je-li } \{a_k\} \text{ klesající resp. nerostoucí.} \end{cases}$

Tedy $\{|a_{k+1} - a_k|\}_{k=1}^{\infty}$ je teleskopická a platí:

$$\sum_{k=n+1}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| = \pm [a_m - a_{n+1}]$$

Tedy odsud a z $(\bullet)$:

$$(\bullet\bullet) \quad \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| \leq 3 \max_{k \in \{n+1,\dots,m\}} |a_k| \max_{k \in \{n+1,\dots,m\}} |B_k|.$$

K výše danému $\varepsilon > 0$, dle předpokladu (DIR), $\exists\, M > 0$ tak, že $\forall\, k \geq 1$ $|B_k| \leq M$, a také existuje n_0 tak, že $\forall\, m \geq n \geq n_0$: $\max_{k \in \{n+1,\dots,m\}} |a_k| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Tedy z $(\bullet\bullet)$: $\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| < \varepsilon$

Za předpokladu (ABEL), $\exists\, L > 0$ tak, že $\forall\, k \geq 1$ $|a_k| < L$ a k danému $\varepsilon > 0$ najdeme z B-C. podmínky pro konvergující řadu $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $m \geq n \geq n_0$: $|B_k| < \frac{\varepsilon}{3L}$.

Tedy opět z $(\bullet\bullet)$: $\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| < \varepsilon$. ∎

Příklady (13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n}$ pro $\varphi \in (0, 2\pi)$ jevně konverguje, neboť dle předchozího Dirichletova kritéria posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} := \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je <u>klesající</u> a splňuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Zbývá ověřit, že posloupnost částečných součtů posloupnosti $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ s $b_k := e^{ik\varphi}$ je omezená. Avšak z Gaussova vzorce pro součet geometrické řady máme

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} e^{ik\varphi} = e^{i\varphi} \frac{1 - e^{i(n+1)\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} .$$

Tedy

$$|S_n|_{\mathbb{C}} \leq |e^{i\varphi}|_{\mathbb{C}} \frac{|1 - e^{i(n+1)\varphi}|_{\mathbb{C}}}{|1 - e^{i\varphi}|_{\mathbb{C}}} \leq \frac{2}{|1 - e^{i\varphi}|_{\mathbb{C}}} \leq \frac{2}{1 - \cos\varphi} =: M \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

kde jsme využili $|1 - \cos\varphi - i\sin\varphi|_{\mathbb{C}}^2 = (1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi \geq (1 - \cos\varphi)^2$.

Speciálně jsme také ukázali, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ konverguje pro $x \in (0, 2\pi)$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ konverguje pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$. $\boxtimes$

(14) řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} k$ konverguje neboť:

- $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} := \{\operatorname{arctg} k\}_{k=1}^{\infty}$ je omezená a monotónní

a

- pro $b_k := \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ konverguje dle Leibnizova kritéria. $\boxtimes$

(15) Řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$ nekonverguje, neboť $\sin^2 k = \frac{1 - \cos 2k}{2}$ a tedy

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{\cos 2k}{2k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k}{2k} \right] \quad (❀)$$

protože řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k}{2k}$ konverguje dle Dirichletova kritéria. OVĚŘTE.

Kdyby $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$ konvergovala, tak z (❀) by plynulo, že $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konverguje, což je spor a tedy řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$ nekonverguje.

6.3 Mohutnost (kardinalita) čísel. Přerovnání řad. Součin řad.

Buď $M \neq \emptyset$ množina prvků. **Mohutnost** množiny udává počet prvků množiny M. Ačkoliv jsme zvyklí porovnávat počty prvků v každodenním životě, i tento proces našeho myšlení vyžaduje jistou abstrakci a „ztotožnění". Cílem našeho povídání bude porovnat mohutnost nekonečných množin.

Definice Řekneme, že $\emptyset \neq M$ je <u>konečná</u>, pokud existuje $L \in \mathbb{N}$ a existuje $\varphi : \mathbb{N}_L \xrightarrow{na} M$ prosté, kde $\mathbb{N}_L := \{n \in \mathbb{N};\ n \leq L\}$.

Množina M je

- <u>nekonečná</u>, není-li konečná
- <u>spočetně {nekonečná}</u>, jestliže existuje $\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{na} M$ prosté.
  V tomto případě lze prvky M psát ve tvaru: $M = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$.
- {<u>spočetná</u>} je-li konečná nebo spočetně nekonečná
- <u>nespočetná</u>, není-li spočetná.

$\boxed{\text{Georg Cantor (3.3.1845 – 6.1.1918) německý matematik}}$

D. Hilbert (1900): „Nikdo nás nevyžene z ráje, který pro nás připravil Cantor.

Příklad Uvažujme $\mathbb{N}_{sudé} = \{2k; k \in \mathbb{N}\}$. Pak z množinového pohledu $\mathbb{N}_{sudé} \subsetneq \mathbb{N}$. Z pohledu kardinality, tj. kolik prvků tyto množiny mají, jsou však $\mathbb{N}_{sudé}$ a $\mathbb{N}$ stejně velké neboť $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{sudé}$ definované $\varphi(k) = 2k$ je prosté a na.

Věta 6.12 Platí:

(i) Jsou-li S a T spočetné, pak $S \cup T$ a $S \times T$ jsou spočetné.

(ii) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ jsou spočetné.

(iii) $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m$ jsou nespočetné.

Dk **Ad (i)** Nechť $S = \{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $T = \{t_k\}_{k=1}^{\infty}$. Definujme-li φ předpisem

$$\left.\begin{aligned}\varphi(2n) &= s_n \\ \varphi(2n-1) &= t_n\end{aligned}\right\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

pak $\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{na} S \cup T$ prosté.

Tedy $S \cup T$ je spočetně nekonečná.

V případě $S\times T := \{(s_j,t_k);\ j=1,2,\dots;\ k=1,2,\dots\}$ si pomůžeme
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j\in\mathbb{N};\ k\in\mathbb{N}$

obrázkem. Kartézský součin $S\times T$ lze zobrazit:

$$
\begin{array}{ccccc}
(s_1,t_1)\ 1 \longrightarrow & (s_1,t_2)\ 2 & (s_1,t_3)\ 4 & (s_1,t_4)\ 7 & \dots \\
(s_2,t_1)\ 3 & (s_2,t_2)\ 5 & (s_2,t_3)\ 8 & (s_2,t_4) & \dots \\
(s_3,t_1)\ 6 & (s_3,t_2)\ 9 & (s_3,t_3) & (s_3,t_4) & \dots \\
(s_4,t_1)\ 10 & (s_4,t_2) & (s_4,t_3) & (s_4,t_4) & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Zobrazení φ přiřadí $m\in\mathbb{N}$ prvek (s_j,t_k), který má u sebe (červený) kroužek m. Toto zobrazení je prosté a na.

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ • $\mathbb{Z}$ mají stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$ neboť zobrazení $\varphi: \mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ definované:
$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi(1)=0 \\ \varphi(2k)=k \\ \varphi(2k+1)=-k \end{array}\quad k\in\mathbb{N}}$$
je prosté a na.

• $\mathbb{Q}$ chápeme jako množinu $\left\{\frac{p}{q};\ p\in\mathbb{Z} \text{ a } q\in\mathbb{N}\right\}$
(s tím, že $\frac{2}{2}, \frac{1}{1}, \dots$ chápeme jako odlišné prvky)
pak $\mathbb{Q}$ lze ztotožnit s $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, což je dle předchozího spočetná množina.

$\boxed{\text{Ad (iii)}}$ Chceme ukázat, že $\mathbb{R}$ je nespočetná.
Uvažujme nejdříve uzavřený interval $S := \langle 0,1\rangle$. S je buď spočetná (tzn. spočetně nekonečná) nebo nespočetná. $\boxed{\text{Předpokládejme, že } S \text{ je spočetná.}}$ Každý prvek z S lze reprezentovat ve tvaru desetinného rozvoje $0{,}d_1d_2d_3\dots d_m\dots$, kde $d_k\in\{0,1,\dots,9\}$.
(vyloučíme čísla typu $0{,}d_1\dots d_k\overline{9}$ (abychom se vyhnuli nejednoznačnosti))
s výjimkou $1=0.\overline{9}$)

Z předpokladu, že S je spočetná plyne, že prvky S lze uspořádat do posloupnosti: $\varphi(k) = x_k = 0{,}d_{k1}d_{k2}\dots d_{km}\dots$

Máme tedy:

$$
\begin{array}{l}
x_1 = 0{,}d_{11}\,d_{12}\,d_{13}\dots\dots d_{1k}\dots\dots \\
x_2 = 0{,}d_{21}\,d_{22}\,d_{23}\dots\dots d_{2k}\dots\dots \\
\vdots \\
x_k = 0{,}d_{k1}\,d_{k2}\,d_{k3}\dots\dots d_{kk}\dots\dots \\
\vdots
\end{array}
\qquad (T)
$$

Dle předpokladu (S spočetná) by každé číslo z S mělo být v seznamu (T). Zaměříme se, tak jako Cantor, na prvky na diagonále*), tj. d_{kk}, a vytvoříme číslo y tvaru

(*) $$y = 0{,}c_1 c_2 \dots\dots c_k \dots\dots ,$$

které patří do S, ale nebude prvkem tabulky (T). Tato tabulka však měla obsahovat všechny prvky S, kdyby S byla spočetná. Máme tedy spor a S musí být nespočetná. Nyní tedy ke konstrukci y tvaru (*) nepatřící do (T). Zvolme si 2 čísla z $\{1,2,\dots,8\}$, například 1 a 6. Definujme y tvaru (*) takto:

Je-li $d_{kk} = 1$, pak polož $c_k = 6$

Je-li $d_{kk} \neq 1$, pak polož $c_k = 1$.

Takto vytvořené y patří do S, ale neshoduje se s žádným prvkem z (T).

Tedy $\langle 0,1\rangle$ je nespočetná, a také $(0,1)$ je nespočetná.

Protože $\operatorname{cotg} \pi x : (0,1) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}$ prostě a $(0,1)$ je nespočetná, tak je $\mathbb{R}$ také nespočetná.

Dle (i) je $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ a také $\mathbb{R}^k = \underbrace{\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}}_{k\text{-krát}}$ nespočetná (se stejnou mohutností jako $\mathbb{R}$).

Protože $\mathbb{C}$ je isomorfní s $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ má i $\mathbb{C}$ a také $\mathbb{C}^k = \mathbb{C}\times\dots\times\mathbb{C}$ stejnou mohutnost jako $\mathbb{R}$.

*) Metody tohoto typu se často nazývají <u>Cantorova diagonalizace</u>

- M, U jsou stejně mohutné (mají stejnou kardinalitu) $\overset{\text{df}}{\iff} \exists \varphi : M \overset{\text{na}}{\to} U$ prostá.
- Mohutnost (kardinalita) množiny M se označuje často $|M|$, tedy stejným symbolem jako absolutní hodnota nebo míra množiny (budeme mít později). POZOR!
- Mohutnost $\mathbb{N}$ se označuje $\aleph_0$ (z hebrejské abecedy... alephnula) tedy $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.
- Je-li X množina, pak $\mathcal{P}(X) := \{A;\, A \subset X\}$ je tzv. potenční množina (angl. power set) ... systém všech podmnožin
  - Je-li X konečná, pak je $|\mathcal{P}(X)| > |X|$
  - $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| =: \aleph_1 > \aleph_0$ — Množina všech podmnožin přirozených čísel je stejně mohutná jako množina reálných čísel

    $\aleph_1$ … aleph jedna

    $$|\mathcal{P}(\mathbb{R})| > \aleph_1 = |\mathbb{R}|$$
  - Otevřeným problémem axiomatické teorie množin je tzv. "hypotéza kontinua": neexistuje žádné (kardinální) číslo c, které leží mezi $\aleph_0$ a $\aleph_1$.

Cantor:
- Počet bodů na úsečce je stejný jako počet bodů ve čtverci.

Přerovnání řad

Definice Nechť $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) a $\varphi : \mathbb{N} \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{N}$ prostá. Pak řadu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k := \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ nazveme přerovnáním řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Věta 6.13 Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je absolutně konvergentní a je-li $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ její přerovnání. Pak
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ konverguje absolutně
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Dk $\boxed{\text{Ad konvergence}}$ Pro dané libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$: $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$. Definujme $m_0 := \max\{\varphi^{-1}(1), \dots, \varphi^{-1}(n_0-1)\}$.

Pak pro $m > m_0$ platí $\varphi(m) \geq n_0$ a tedy

$$\sum_{m=m_0+1}^{\infty} |a_{\varphi(m)}| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| < \varepsilon \quad \text{a tedy} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| \text{ konverguje.}$$

$\boxed{\text{Ad součet}}$ Označme $s := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

a $t := \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$

Pro $\varepsilon > 0$ najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$ a $\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| < \varepsilon$.

Nyní najdeme $m_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\boxed{m_0 \geq n_0}$, $\boxed{\{1, \dots, n_0-1\} \subset \{\varphi(1), \dots, \varphi(m_0)\}}$

$\boxed{\{\varphi(1), \dots, \varphi(n_0-1)\} \subset \{1, \dots, m_0\}}$

Pak pro $m \geq m_0$:

$$|s_m - t_m| = \left|\sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_{\varphi(k)}\right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| < 2\varepsilon$$

▨

Jiný dk $\boxed{\text{Krok 1}}$ Dokážeme nejdříve tvrzení pro $a_n \geq 0$. Pak $\{a_{\varphi(1)}, \dots, a_{\varphi(m)}\} \subset \{a_1, \dots, a_M\}$ pro $M \in \mathbb{N}$ dostatečně velké.

Tedy
$$0 \leq \sum_{k=1}^{m} a_{\varphi(k)} \leq \sum_{k=1}^{M} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sup_{M \in \mathbb{N}} s_M =: s < +\infty$$

Tak $\underset{\sim}{t} := \lim \sum_{k=1}^{m} a_{\varphi(k)} \leq \underset{\sim}{s} < \infty$ a řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ konverguje.

Nyní vyjdeme z dokázaného a ze skutečnosti, že $\{a_1, \dots, a_m\} \subset \{a_{\varphi(1)}, \dots, a_{\varphi(L)}\}$ pro L dostatečně velké.

Tedy
$$0 \leq \sum_{k=1}^{m} a_k \leq \sum_{k=1}^{L} a_{\varphi(k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = t \Rightarrow \boxed{s \leq t}$$

$\boxed{s = t}$

$\boxed{\text{Krok 2}}$ Jsou-li $a_n \in \mathbb{R}$, pak $a_n = a_n^+ - a_n^-$ a $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$, kde $x^+ = \max\{x, 0\}$ a $x^- = \max\{-x, 0\}$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, též konvergují $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Dle $\boxed{\text{KROKU 1}}$ však konvergují také $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}^-$ a navíc $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}^{+/-} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{+/-}$.

Tak
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

▨

Příklad, který ukazuje, že pro neabsolutně konvergentní řady Věta 6.13 neplatí

Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left(1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots\right)$ definována předpisem

$a_{2n-1} = \frac{1}{n}$ a $a_{2n} = -\frac{1}{n}$. Pak $S_{2n} = 0$ a $S_{2n-1} = \frac{1}{n}$.

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} a_k = 0$.

Uvažujme přerovnání

$$\{a_{\varphi(k)}\}_{k=1}^{\infty} = \left(1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \dots\right)$$

definované takto:

$$a_{\varphi(3k-2)} = \frac{1}{2k-1}, \quad a_{\varphi(3k-1)} = \frac{1}{2k}, \quad a_{\varphi(3k)} = -\frac{1}{k}.$$

Pak

$$\underline{\sigma_{3k}} = \sum_{k=1}^{3k} a_{\varphi(k)} = \sum_{l=1}^{k} \left\{ a_{\varphi(3l-2)} + a_{\varphi(3l-1)} + a_{\varphi(3l)} \right\}$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \left(\frac{1}{2l-1} + \frac{1}{2l} - \frac{1}{l} \right) = \sum_{l=1}^{k} \frac{2l + (2l-1) - 2(2l-1)}{2l(2l-1)}$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{(2l-1)2l} = \sum_{l=1}^{k} \left(\frac{1}{2l-1} - \frac{1}{2l} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots \Big|_{x=1} = \ln(x+1)\Big|_{x=1}$$

$$= \underline{\ln 2}$$

Protože $\sigma_{3k+1} - \sigma_{3k} \xrightarrow{k \to \infty} 0$ a $\sigma_{3k+2} - \sigma_{3k} \xrightarrow{k \to \infty} 0$,

tak $\lim_{k \to \infty} \sigma_k$ existuje a rovná se $\ln 2$.

Vidíme, že přerovnáním konvergentních*) řad mohu dostat různé výsledky. Následující Riemannova věta, že lze vhodným přerovnáním dostat jakýkoliv výsledek, i $+/-\infty$. JAKÝ TO rozdíl oproti absolutně konvergentním řadám!

*) neabsolutně

$\boxed{\text{Věta 6.14}}$ (Riemannova věta o přerovnání neabsolutně konvergentních řad) Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje neabsolutně. Pak pro každé $s^* \in \mathbb{R}^*$ existuje přerovnání φ s $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = s^*$.

Dk: Připomeňme si nejdříve značení: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^+ = \max\{x, 0\} \geq 0$, $x^- = \max\{-x, 0\} \geq 0$

a tedy $x = x^+ - x^-$ a $|x| = x^+ + x^-$.

▶ Tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$

Tvrdíme, že nutně z neabsolutní konvergence $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ plyne:

$$(+) \quad \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \infty \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \infty}$$

Kdyby totiž $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ i $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergovaly, tak $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje, ale to neplatí.

Kdyby jedna z řad divergovala a druhá konvergovala, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje. Platí tedy (+).

▶ Pro dané $s^* \in \mathbb{R}$, bereme kladné členy tak dlouho až jejich součet je větší než s^*, pak přidáváme záporné prvky až se dostaneme pod s^*, pak kladné, pak záporné, ...

Otázka: Jak budeme postupovat je-li $s^* = +\infty$ či $s^* = -\infty$? ▨

POZOR! S neabsolutně konvergujícími řadami je třeba pracovat obzvláště opatrně, jak ukazují příklady připravené na stránkách kursu Vítem Průšou. Nevhodné manipulace (které zdánlivě působí věrohodně) mohou vést k identitám typu

$\ln 2 = 2 \ln 2$ či $\ln 2 = 0$.

Součin řad

Definice Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ jsou dvě řady komplexních čísel. Pak symbolem $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$ rozumíme <u>Cauchyův</u> <u>součin</u> <u>řad</u>, definovaný předpisem

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m := \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j}\, b_j \right)}_{\substack{\shortparallel \\ c_k}} = a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) + (a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3) + \dots$$

<u>pro pozdější použití</u>

Otázky: (1) Kdy $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$ (ve smyslu Cauchy) konverguje?

(2) kdy a zda platí: $\boxed{\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right)}$?

Věta 6.15 (Mertensova věta) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverguje. Pak <u>Cauchyův součin řad</u> $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$ konverguje a vztah (2) platí.

Dk: Označme $c_k := \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j} b_j$, $B_K := \sum_{k=1}^{K} b_k$, $A_K := \sum_{k=1}^{K} a_k$,

$B := \lim_{K\to\infty} B_K$, $A := \lim_{K\to\infty} A_K$

Cílem je ukázat, že
$$\lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} c_k \text{ existuje a rovná } AB = \lim_{K\to\infty} A_K B$$

Avšak:

$$\sum_{k=1}^{K} c_k = \sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{j=1}^{k} a_{k+j-1} b_j\right) = a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) + \dots + (a_K b_1 + \dots + a_1 b_K)$$

$$= a_1(b_1 + b_2 + \dots + b_K) + a_2(b_1 + b_2 + \dots + b_{K-1}) + \dots + a_K b_1$$

$$= a_1 B_K + a_2 B_{K-1} + \dots + a_K B_1$$

$$= A_K B + a_1(B_K - B) + a_2(B_{K-1} - B) + \dots + a_K(B_1 - B)$$

$$= A_K B + \underbrace{\sum_{j=1}^{K} a_{K+1-j}(B_j - B)}_{=:\gamma_K}.$$

ZBÝVÁ UKÁZAT, ŽE
$$\lim_{K\to\infty} \gamma_K = 0$$

Volme $\varepsilon>0$ pevně, ale libovolně. Pak z (B-C) podmínky pro řadu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, plyne existence $K_0\in\mathbb{N}$: $\forall \tilde{K}\ge K_0$: $|B_{\tilde{K}}-B|<\varepsilon$.

Pak

$$|\gamma_K| \le \left|\sum_{j=1}^{K_0} a_{K+1-j}(B_j-B)\right| + \left|\sum_{j=K_0+1}^{K} (a_{K+1-j})(B_j-B)\right|$$

$$\le \sum_{j=1}^{K_0} |a_{K+1-j}||(B_j-B)| + \varepsilon \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|\right)}_{=:\tilde{A}}$$

Protože $\lim_{K\to\infty} a_{K+1-j}=0$, tak existuje $K_1\in\mathbb{N}$: $\forall l\ge K_1+1-K_0$

$$|a_l| \le \frac{\varepsilon}{K_0 \max_{j\in\mathbb{N}} |B_j-B|}.$$

Pak pro $K\ge K_1$: $|\gamma_K| \le K_0\cdot\frac{\varepsilon}{K_0}+\varepsilon\tilde{A} = \varepsilon(\tilde{A}+A)$. ▨

Věta 6.16 Cauchyův součin dvou <u>absolutně</u> konvergentních řad je <u>absolutně</u> konvergentní.

Dk Aplikací Věty 6.15 na $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$, $\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|$ dostáváme, že

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}|a_{k+1-j}||b_j|\right)$$ konverguje.

Protože $\forall K\in\mathbb{N}$: $$\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j}b_j\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}|a_{k+1-j}||b_j|\right),$$

tak řada $$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\underbrace{\sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j}b_j}_{c_k}\Big|$$ konverguje. ▨

(Proti)příklad Buď $a_n=b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Pak víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují neabsolutně. Ukážeme, že $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_m b_n$ nekonverguje.

<u>Řešení</u> Řada $a_1b_1+(a_2b_1+a_1b_2)+(a_3b_1+a_2b_2+a_1b_3)+\dots$ má tvar

$$\underbrace{1}_{c_1} + \underbrace{-\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{c_2} + \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{3}}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{\sqrt{3}}}_{c_3} + \dots$$

a platí $\boxed{c_{2k-1}\ge 1}$ pro všechna k, což dává nekonvergenci $\sum c_k$ dle Věty 6.1.

Vskutku: $$c_{2k-1}=\frac{1}{k}+2\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{\sqrt{j}}\frac{1}{\sqrt{2k-j}} \ge \frac{1}{k}+2\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{k-1}}_{\le\sqrt{k}}\sqrt{2k}} \ge \frac{1}{k}+\sqrt{2}\,\frac{k-1}{k}.$$ ▨

6.4. Mocninné řady

Definice (Mocninná řada) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ je mocninná řada se středem v z_0

Příklad Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ je mocninná řada s $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$.
Již dříve jsme ukázali, že tato řada konverguje absolutně pro $|z|<1$; A také, že pro $|z|>1$ nekonverguje a $C = \{z \in \mathbb{C}; |z|=1\}$, jednotková kružnice vytváří rozhraní. Tuto situaci zobecňuje Věta 6.17 níže.

Poznámka
- Mocninná řada je speciální případ řady funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$; zde $f_n(z) = a_n (z-z_0)^n$. Zkoumat vlastnosti posloupností funkcí a řad funkcí budeme systematicky v dalším semestru.
- Mocninné řady patří mezi důležité kapitoly Komplexní analýza, tj. analýzy funkcí komplexní proměnné.
- Teorie mocninných řad je tedy důležitá.

Věta 6.17 Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Položme

$$(*) \qquad R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty] \quad \left(\text{tedy včetně } +\infty, \text{ které dostaneme, je-li } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0\right)$$

Pak:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ konverguje absolutně na $B_R(z_0)$ a nekonverguje na $\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(z_0)} = \{z \in \mathbb{C}; |z-z_0| > R\}$

(ii) existuje-li $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$, pak se rovná $1/R$

(iii) existuje-li $\lim \sqrt[k]{|a_k|}$, pak se rovná $1/R$.

Definice R definované $(*)$ se nazývá poloměr konvergence $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.

Úmluva Označíme-li $\underbrace{w := z - z_0}_{\text{posunutí}}$, pak zkoumání mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ se převede na $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ se středem v počátku.

$\downarrow$

Nadále: $z_0 = 0$

$\boxed{\text{Důkaz Věty 6.17}}$ $\boxed{\text{Ad (i)}}$ Tvrzení plyne z odmocninového kritéria (Věta 6.4) pro $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n$. Tato řada konverguje jestliže $\exists q \in (0,1)$

$\sqrt[n]{|a_n||z|^n} \leq q$ pro $n \geq n_0$ a diverguje pokud $\sqrt[n]{|a_n||z|^n} \geq 1$ pro $n \geq n_0$.

Avšak:

pro $\forall \varepsilon > 0$ a pro n dostatečně velká

- $$\sqrt[n]{|a_n||z|^n} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|z| \leq \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} + \varepsilon\right)|z| = \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)|z|$$

volím ε: $0 < \varepsilon < \frac{1}{|z|} - \frac{1}{R}$ $\hookrightarrow$ $<$ $$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{|z|} - \frac{1}{R}\right)|z| = 1.$$

- Naopak pro $R \in (0, +\infty)$ a $|z| > R$:

$$\sqrt[n]{|a_n||z|^n} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|z| \geq \left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)|z| \geq 1.$$

pro nekonečně mnoho indexů   pro $\frac{1}{R} - \frac{1}{|z|} > \varepsilon$

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Nechť $\varrho := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Pak pro $z \in \mathbb{C}$ pevné platí

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| \xrightarrow{n\to\infty} \varrho|z|.$$

Podle d'Alembertova podílového kritéria, pro pevné z: $|z| < \frac{1}{\varrho}$ je $\varrho|z| < 1$ a tedy dle Věty 6.5 řada konverguje. Naopak pro $|z|$: $|z| > \frac{1}{\varrho}$ musí platit podmínka (ii) Věty 6.5 a řada nekonverguje. Tedy $R = \frac{1}{\varrho}$.

$\boxed{\text{Ad (iii)}}$ plyne z Věty 6.4 (odmocninové kritérium) nebo přímo z definice R. ▨

Příklad: Uvažme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{5^n}$, $z \in \mathbb{C}$. Zde $a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ liché} \\ \frac{1}{5^n} & \text{pro } n \text{ sudé} \end{cases}$.

Pak $$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5^n}\right)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} 5^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Tedy řada $\sum \frac{z^{2n}}{5^n}$ má poloměr konvergence $\frac{1}{\sqrt{5}}$. ▨

Nyní si uvedeme čtyři tvrzení, která nám učiní z mocninných řad silný matematický prostředek. V bodech $z \in \mathbb{C}$ splňujících $|z|<R$ budeme moci tyto nekonečné řady derivovat/integrovat člen po členu.

$\boxed{\text{Věta } 6.18}$ (Derivace mocninné řady) Nechť R je poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ má také poloměr konvergence R a pro $|z|<R$ a $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ platí:

$$\boxed{(*) \qquad f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}}$$

Dk $\boxed{\text{KROK 1}}$ Chceme ukázat, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ mají stejný poloměr konvergence. Avšak:

- protože $\sqrt[n]{n} \geq 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ tak $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} \geq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$
- také $\sqrt[n]{n|a_n|} \leq \sup_{k\geq n} \underbrace{\sqrt[k]{k}}_{\searrow 1} \sqrt[n]{a_n} \leq (1+\varepsilon)\sqrt[n]{|a_n|}$ $\quad \varepsilon>0$ lib. $n \geq n_0(\varepsilon)$

a tak

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} \leq (1+\varepsilon) \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

a tvrzení plyne.

$\boxed{\text{KROK 2}}$ $\boxed{\text{Důkaz } (*)}$ Buď $z: |z|<R$ a zvolme δ tak, aby $|z|+\delta<R$.

Dále nechť h splňuje $|h|<\delta$ $\quad (\Rightarrow |z+h| < |z|+|h| < |z|+\delta < R)$

Chceme ukázat, že

$$R_h := \left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \longrightarrow 0 \quad \text{pro } |h| \to 0$$

Avšak

$$R_h = \left| \frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right|$$

$$= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{(z+h)^n}{h} - \frac{z^n}{h} - n z^{n-1} \right) \right| \qquad (z+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k$$

$$\stackrel{\downarrow}{=} \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-1} \right|$$

$$\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |z|^{n-k} |h|^{k-1}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |z|^{n-k} \delta^{k-2} |h|$$

$$\leq |h| \delta^2 \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| (|z|+\delta)^n$$

$$\leq C|h|$$ neboť studované mocninné řady konvergují absolutně v bodě $|z|+\delta < R$

Tedy $R_h \to 0$ pro $h \to 0$ a Věta 6.18 je dokázána. ▨

$\boxed{\text{Věta 6.19}}$ (O jednoznačnosti rozvoje do mocninné řady)

Nechť $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ pro $|z| < \rho$ a $\rho > 0$.

Pak $a_m = b_m$ pro $\forall\, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Důkaz: Dle předchozí věty i derivované řady pro $|z| < \rho$ konvergují a platí vztah $(*)$. Tak

$$f^{(k)}(z)\Big|_{z=0} = k!\, a_k = k!\, b_k \text{ , což implikuje } a_k = b_k .$$ ▨

$\boxed{\text{Věta 6.20}}$ (Integrace mocninné řady) Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, a nechť mocninná řada $\sum_{n=0} a_n z^n$ má poloměr konvergence $R > 0$.

Pro $z: |z| < R$ položme $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Pak

$$F(z) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{m+1} z^{m+1} + C \quad \text{je primitivní funkce k } f.$$

Dk: Dle Věty 6.19 platí: $(F(z))' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_m}{m+1} z^{m+1}\right)' = \sum_{m=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$. ▨

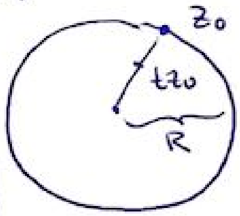
Příklad: Víme, že $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ a $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$ pro $|x| < 1$.

Dle předchozí věty tak dostáváme pro $|x| < 1$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Užitečné je i následující tvrzení, které si uvedeme bez důkazu.

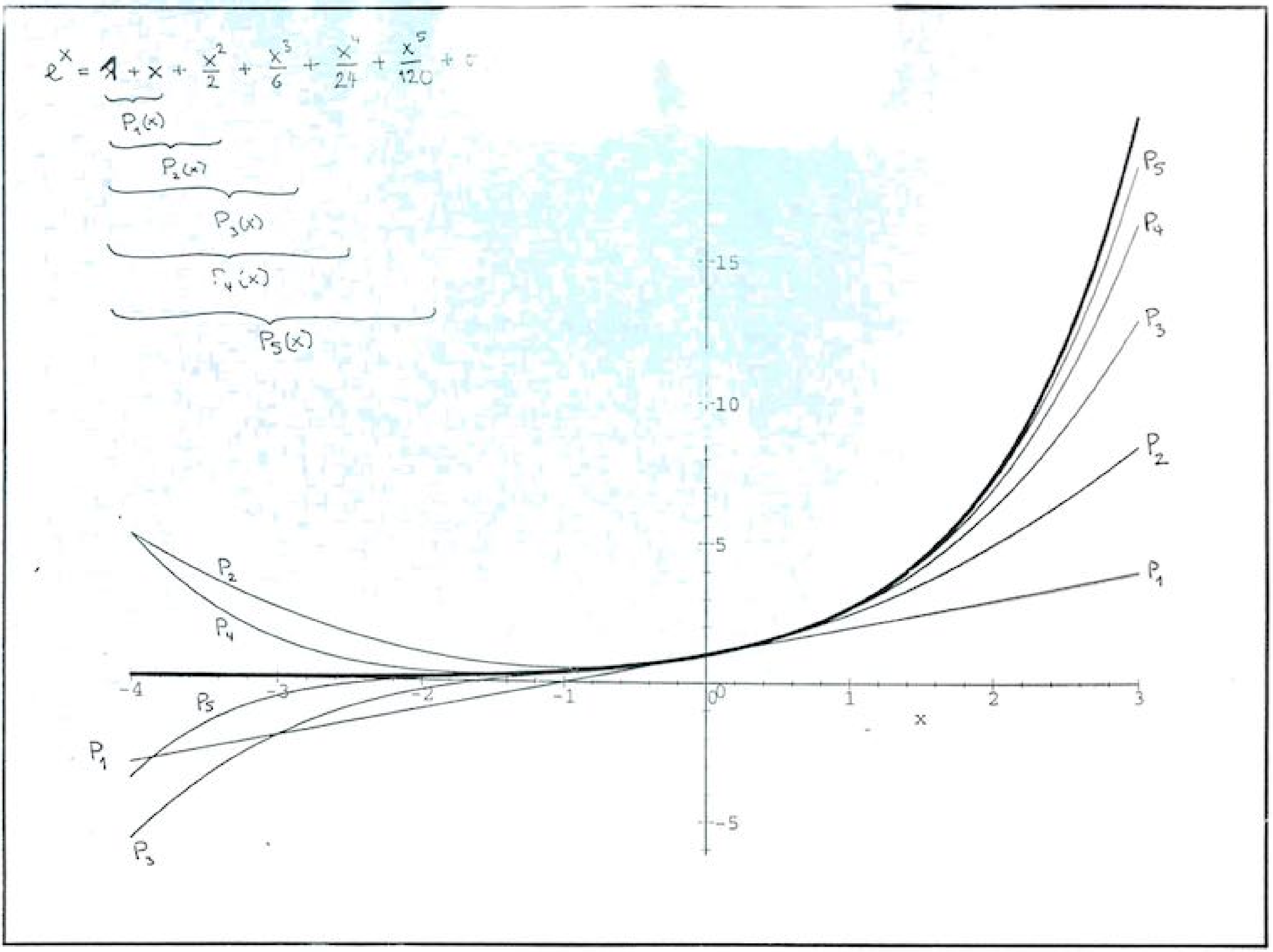
$\boxed{\text{Abelova věta}}$ Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ má poloměr konvergence $R \in (0, \infty)$. Pokud pro $z_0 \in \mathbb{C} : |z_0| = R$ řada $\sum_{k=0} a_k z_0^k$ konverguje, pak je funkce $t \longmapsto f(t z_0)$ spojitá na $\langle 0, 1 \rangle$.



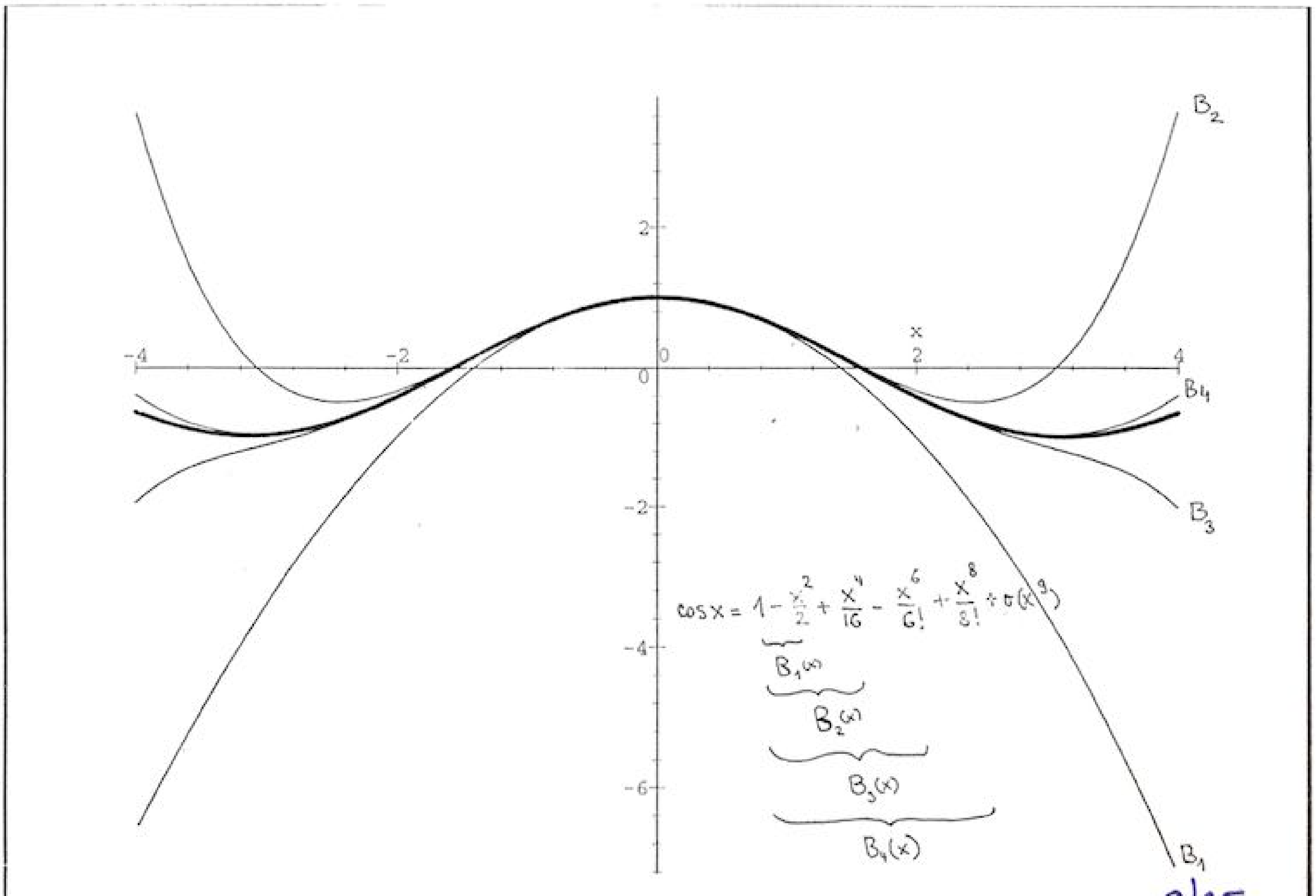
pokračování: pro $x = 1$ řada $\sum_{n=0} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ konverguje

tedy $t \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ je spojité na $\langle 0, 1 \rangle$. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \lim_{t \to 1-} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{t \to 1-} \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$



$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots$
$P_1(x)$
$P_2(x)$
$P_3(x)$
$P_4(x)$
$P_5(x)$
P_5 P_4 P_3 P_2 P_1
15
10
5
−5
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3
x



$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + o(x^9)$
$B_1(x)$
$B_2(x)$
$B_3(x)$
$B_4(x)$
B_2 B_4 B_3 B_1
2
0
−2
−4
−6
−4 −2 0 2 4
x

$\boxed{\text{Věta 6.21}}$ (o sinu, cosinu a exponenciále).

Existuje právě jedna funkce $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tak, že

(1) $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \exp z_2 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(2) $\exp(x + iy) = \exp x (\cos y + i \sin y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(3) $\exp 0 = 1$

(4) $(\exp z)' = \exp z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

(5) $\exp|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \xrightarrow{na} (0, +\infty)$ rostoucí $\left(\Rightarrow \exists \ln : (0, +\infty) \xrightarrow{na} \mathbb{R} \text{ rostoucí}, \ \ln := (\exp)^{-1} \right)$

(6) pro $x \in \mathbb{R}^+$, $p, q \in \mathbb{N}$: $\exp\left(\frac{p}{q} \ln x\right) = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

(7) $e := \exp 1$ je iracionální (tzn. $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Existují právě dvě reálné funkce $\cos$ a $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a číslo $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ iracionální tak, že

(8) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(9) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(10) $\sin(-x) = -\sin x$ a $\cos(-x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(11) $\sin|_{\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle}$ je rostoucí

(12) $\sin 0 = 0$ a $\sin' x|_{x=0} = 1$.

Dk[1] Definujme pro $z \in \mathbb{C}$:

(δ)
$$\boxed{\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} \qquad \boxed{\sin z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{\overset{\text{sin liché}}{2k+1}}}{(2k+1)!}} \qquad \boxed{\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{\overset{\text{cos je sudé}}{2k}}}{(2k)!}}$$

Komplexní funkce $\exp, \sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jsou definovány pomocí mocninných řad s poloměrem konvergence $R^{-1} = \left(\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = +\infty$.

Dle věty 6.18 o derivování mocninných řad

$$(\exp z)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp z$$

Opět známý trik: označ $l = n-1$ a přeznač l na n.

a také

$$\underbrace{(\sin z)'}_{} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \underbrace{\cos z}_{} \quad \text{a podobně} \quad \underbrace{(\cos z)'}_{} = \underbrace{-\sin z}_{}$$

↑ PROVEĎTE!

Navíc, $\exp 0 = 1$, $\sin 0 = 0$ a $(\sin' x)|_{x=0} = 1$. **Tedy (3), (4), (10) a (12) platí.**

[2] $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{\exp(z_1+z_2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} \overset{\text{binomická věta}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!\,k!} z_1^k z_2^{n-k}}_{c_n \text{ v definici součinu řad}}$$

Cauchyův součin řad

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!}\right) = \boxed{\exp z_1 \exp z_2}$$

a tak $\boxed{(1) \text{ platí}}$. Odsud také plyne

$$\boxed{(13) \quad \exp(x+iy) = \exp x \exp(iy)}$$

Z (8) dostáváme: $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} \underset{\text{sudé vs liché}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos z + i \sin z$$

a stejně

$$\exp(-iz) = \cos z - i \sin z,$$

což implikuje jednak

$$(14) \quad \boxed{\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}} \quad \text{a} \quad \boxed{\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}}$$

a také, ve spojení s (13), $\boxed{\text{rovnost } (2)}$.

Vztahy (14) také implikují $\boxed{\cos^2 z + \sin^2 z = 1}$, kde využijeme vztah $\exp(-z) = \frac{1}{\exp z}$ neboť $1 = \exp 0 = \exp(z-z) = \exp z \exp(-z)$.

Dále $\boxed{\exp(i(x+y)) = \exp(ix)\exp(iy)}$ implikuje ve spojení (2) vztahy (8) a (9). Vskutku:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(x+y) + i \sin(x+y) &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \end{aligned}}$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí dostáváme $\boxed{(8) \text{ a } (9)}$.

[3] $\boxed{\text{Pro } x \in \mathbb{R}:}$

$$(\exp x)' = \exp x = \exp\left(\frac{x}{2}\right)\exp\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\exp \frac{x}{2}\right)^2 > 0 \Rightarrow \exp|_{\mathbb{R}} \text{ je rostoucí a kladná}$$

Kdyby totiž $\exists x_0 \in \mathbb{C}: \exp x_0 = 0$, pak pro $z \in \mathbb{C}$ libovolné

$$\exp(z) = \exp(z - x_0 + x_0) = \exp(z - x_0) \exp x_0 = 0, \ \lightning$$

• Také $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp x = +\infty$ a odsud $\lim\limits_{x\to-\infty}\exp x = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\exp(-x)} =$

$$= \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\exp y} = 0+ .$$

$\boxed{\text{Tedy (5) je dokázáno.}}$

$\boxed{\text{Ad (6)}}$ Máme ukázat, že pro $x\in\mathbb{R}$ $\left[\exp|_{\mathbb{R}}\left(\frac{p}{q}\ln x\right)\right]^q = x^p$.

Avšak levá strana dle (1) splňuje

$$\left(\exp\left(\frac{p}{q}\ln x\right)\right)^q \underset{\substack{\uparrow\\ (1)\ q\text{-krát}}}{=} \exp|_{\mathbb{R}}\left(q\,\frac{p}{q}\ln x\right) = \exp|_{\mathbb{R}}\left(p\ln x\right) = x^p .$$

inverzní fce k $\exp|_{\mathbb{R}}$.

• Protože ze závěru kapitoly 5. víme, že π je iracionální zbývá dokázat jednoznačnost exponenciály, (11) a ověřit, že $e := \exp 1$ je iracionální.

$\boxed{\text{Ad jednoznačnost}}$ Mějme dvě funkce f, g takové, že (splňují (1)–(4), speciálně) $f' = f$ a $g' = g$, $g \neq 0$, a $f(0) = g(0) = 1$. Pak pro $z\in\mathbb{C}$: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{fg - fg}{g^2} = 0$

tedy $\frac{f(z)}{g(z)} = \text{konst.}$ a protože $\frac{f(0)}{g(0)} = 1$ tak $f(z) = g(z)$ pro $\forall z\in\mathbb{C}$.

$\boxed{\text{Ad (11)}}$ Víme $\cos 0 = 1$. Dále $\cos 2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{4}{2} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \dots$

$$< 1 - 2 + \frac{2^4}{4!}\left(1 + \frac{2^2}{6\cdot 5} + \frac{2^4}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5} + \frac{2^6}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5} + \dots\right)$$

$$< -1 + \frac{16}{24}\left(1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^4 + \left(\frac{2}{5}\right)^6 + \dots\right)$$

$$= -1 + \frac{2}{3}\,\frac{1}{1 - \frac{4}{25}} = -1 + \frac{50}{63} < 0 .$$

1

0 2

Víme, že $\cos : \langle 0, 2\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která je kladná v 0 a záporná v 2. Z Darbouxovy věty tak plyne $\exists\, c > 0$ tak, že $\cos c = 0$. Buď

$$\gamma := \inf\{c\in(0,2);\ \cos c = 0\}$$ a položme $\pi := 2\gamma$.

Protože $(\sin x)' = \cos x > 0$ na $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tak $\sin x|_{\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle}$ roste.

Ze spojitosti $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ a ze vztahu

$\cos^2 + \sin^2 = 1$ plyne $\boxed{\sin\frac{\pi}{2} = 1}$ ■

---

zde jsme využili vzorec $\boxed{\ln xy = \ln x + \ln y}$, který plyne z

$\exp|_{\mathbb{R}}(\ln y + \ln x) \overset{(1)}{=} \exp|_{\mathbb{R}}\ln x\,\exp\ln y = xy$, neb $p\ln x = \underbrace{\ln x + \dots + \ln x}_{p\text{-krát}} = \ln \underbrace{x\cdots x}_{p\text{-krát}} = \ln x^p$

$\boxed{\text{Ad}}$ $e := \exp 1$ je iracionální

Když $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, nesoudělná, $q > 2$, vezmeme $k > q$, $k \in \mathbb{N}$.

Protože $\boxed{e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} + \frac{e^{\xi}}{(k+1)!}, \text{ kde } \xi \in (0,1).}$ $1 < e^{\xi} < e < 3$.

tak

$$k!\frac{p}{q} = k!\,e = \underbrace{2k! + \frac{k!}{2!} + \dots \frac{k!}{k!}}_{L} + \frac{e^{\xi}}{k+1}$$

$$= L + \frac{e^{\xi}}{k+1} \quad \text{kde } L \in \mathbb{N}.$$

neboli

$\frac{e^{\xi}}{k+1} = k!\frac{p}{q} + L \in \mathbb{N}$, ale volbou $k \gg 1$ dostaneme

$\frac{e^{\xi}}{k+1} \in (0,1)$, což dává $\lightning$ s tím, že $\frac{e^{\xi}}{k+1}$ má být přirozené číslo. $\blacksquare$

EXPONENCIÁLA MATICE Pro $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ nebo $\mathbb{C}^{d\times d}$ definujeme

$$\boxed{\exp \mathbb{A} = e^{\mathbb{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^k}{k!} = \mathbb{I} + \mathbb{A} + \frac{\mathbb{A}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbb{A}^k}{k!} + \dots}$$

Definujme $\|\mathbb{A}\| := \sup_{\substack{\vec{x} \in \mathbb{R}^d \\ |\vec{x}|_{\mathbb{R}^d} \le 1}} |\mathbb{A}\vec{x}|_{\mathbb{R}^d}$ **NORMA MATICE**

$\|\cdot\|$: matice $\longmapsto$ číslo ≥ 0

nejmenší $C > 0$ splňující $|\mathbb{A}\vec{x}|_{\mathbb{R}^d} \le C|\vec{x}|_{\mathbb{R}^d}$

$\vec{z} \in \mathbb{R}^d$: $|\vec{z}|_{\mathbb{R}^d} := \left(\sum_{i=1}^{d} z_i^2\right)^{1/2}$

Platí: $|\mathbb{A}\underline{\mathbb{B}x}|_{\mathbb{R}^d} \le \|\mathbb{A}\|\,|\mathbb{B}\vec{x}|_{\mathbb{R}^d} \le \|\mathbb{A}\|\,\|\mathbb{B}\|\,|\vec{x}|_{\mathbb{R}^d}$

$\Rightarrow \boxed{\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \le \|\mathbb{A}\|\,\|\mathbb{B}\|}$

Speciálně: $\|\mathbb{A}^2\| \le \|\mathbb{A}\|^2$ a $\|\mathbb{A}^k\| \le \|\mathbb{A}\|^k$

Definice Řada, která definuje $\exp \mathbb{A}$, konverguje, pokud $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\mathbb{A}\|^k}{k!}$ konverguje

- $\|\exp \mathbb{A}\| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^k}{k!}\right\| = \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathbb{A}^k}{k!}\right\| \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\|\mathbb{A}\|^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\mathbb{A}\|^k}{k!} = \exp\|\mathbb{A}\|$
- Platí: $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} \Rightarrow \exp(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = \exp\mathbb{A}\exp\mathbb{B}$

- Pro $\mathbb{A}$ diagonální, tzn. $\mathbb{A} := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_d \end{pmatrix}$,

je $\mathbb{A}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_d^k \end{pmatrix}$. Pak dle definice

$$\underline{\underline{\exp \mathbb{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d^2 \end{pmatrix} + \dots + \frac{1}{k!}\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d^k \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\lambda_1+\frac{\lambda_1^2}{2}+\frac{\lambda_1^3}{3!}+\dots & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 1+\lambda_2+\frac{\lambda_2^2}{2}+\frac{\lambda_2^3}{3!}+\dots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1+\lambda_d+\frac{\lambda_d^2}{2}+\frac{\lambda_d^3}{3!}+\dots \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_d} \end{pmatrix}}}$$

- Pro $\mathbb{A}$ diagonalizovatelnou, tzn. pro $\mathbb{A}$ splňující $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}$, kde $\mathbb{D}$ je diagonální,

platí: $\mathbb{A}^2 = \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}}_{\mathbb{A}}\,\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}}_{\mathbb{A}} = \mathbb{B}\mathbb{D}^2\mathbb{B}^{-1}$ (kde $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{B} = \mathbb{I}$) a podobně $\mathbb{A}^k = \mathbb{B}\mathbb{D}^k\mathbb{B}^{-1}$.

Tedy $\boxed{\exp \mathbb{A} = \exp(\mathbb{B}\mathbb{D}\mathbb{B}^{-1}) = \mathbb{B}(\exp \mathbb{D})\mathbb{B}^{-1}.}$

- Tuto konstrukci lze rozšířit i pro obecnější struktury jako jsou (lineární) operátory, tj. zobrazení A prostoru fcí do prostoru funkcí.