

Pro $x \in \mathbb{R}$ umíme odpovědět otázku, kdy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konverguje, diverguje či osciluje.

Srovnání, protože $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{n+1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n}$ konverguje dle kritéria d'Alemberta
 jestli existuje pořadove $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} |x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$, dohodně,

dle **Kritéria AK \Rightarrow K**, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konverguje pro $x \in (-1, 1)$ (dozorce absolutně)

Dále víme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n}$ neklesne nebo není nulové pro $x \in \mathbb{R}$ taková, že $|x| > 1$.
 (Pro $x > 1$, postupně $\left\{ \frac{x^n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje
 Pro $x < -1$, $-\infty$ $\left\{ \frac{x^n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje)

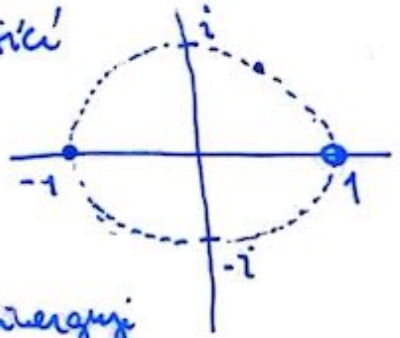
Tedy, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ pro $x > 1$ diverguje a pro $x < -1$ nekonverguje (osciluje). Zbývají body $x = \pm 1$.
 Pro $x = 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (viz Příklad 11), takže řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje (ale ne absolutně), viz Příklad 12.

Motivací pro další výsledek bude otázka:
 Pro jaká $z \in \mathbb{C}$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konverguje, diverguje, osciluje?

Protože pro $z \in \mathbb{C}$: $z = |z|e^{i\varphi}$ $\varphi \in (0, 2\pi)$
 a $z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n \cos n\varphi + i|z|^n \sin n\varphi$

tak stejnými metodami jako pro $x \in \mathbb{R}$, $|x| \neq 1$, zjistíme, že
 • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konverguje (dozorce absolutně) pro $|z| < 1$
 • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ diverguje, nebo osciluje pro $|z| > 1$.

Zbývá vyšetřit $\{z \in \mathbb{C}; |z|=1\}$ tzn. z ležící na jednotkové kružnici neboli z tvaru $z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.



Přitom víme, že na jednotkové kružnici je bod ($z=1$), kdy řada diverguje a bod ($z=-1$), kdy řada konverguje.

Zajímá nás tedy co se děje v okolních bodech ^{jednoduché} rovnice.
 Připomeňme si, u řoumání konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n}$ je ekvivalentní řoumání konv. řad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n}$

Všimněme si, že tyto řady lze psát ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, kde $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = e^{in\varphi}$ či $\sin n\varphi$ nebo $\cos n\varphi$.

Řadami typu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ se nyní budeme zabývat. Začneme jedním technickým tvrzením, které lze interpretovat jako diskrétní verzi integrace per-parkes.

Lemma (Diskrétní verze integrace per-parkes) Pro $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}, \{b_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$

platí: $\sum_{k=1}^m a_k b_k = a_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) B_k$ kde $B_k = \sum_{i=1}^k b_i$.

(Dě) Protože $b_1 = B_1$ a $b_k = B_k - B_{k-1}$ pro $k \geq 2$, píšeme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m a_k b_k &= \sum_{k=2}^m a_k (B_k - B_{k-1}) + a_1 B_1 \\ &= a_1 B_1 + a_2 B_2 - a_2 B_1 + a_3 B_3 - a_3 B_2 + \dots + a_m B_m - a_m B_{m-1} \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_m B_m = a_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \quad \square \end{aligned}$$

Stejně, u sčítání v Lemmatu od $k=1$, uvažala v daném řádku roli; máme tedy také: } pro $m > n \in \mathbb{N}$ oť:

$$(6) \quad \sum_{k=n+1}^m a_k b_k = a_m B_m - \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \quad \text{kde } B_k = \sum_{i=n+1}^k b_i$$

Věta 6.11 (Abelovo a Dirichletovo kritérium)

Bud' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ monotónní. Bud' $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Dále uvažt:

[DİR] $a_n \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ má omezenou posloupnost částečných součtů,

NEBO

(ABEL) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezené a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje.

Pat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje

Dě Chceme ukázat, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ splňuje B.-C. podmínku:
K danému $\varepsilon > 0$ hledáme $m_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall m \geq n \geq m_0: \sum_{k=n+1}^m a_k b_k < \varepsilon$.

Definujme-li $B_k := \sum_{i=m+1}^k b_i$, tak z předchozí lemmy a (6) dostáváme:

$$\bullet \quad \left| \sum_{k=n+1}^m a_k b_k \right| \leq |a_m| |B_m| + \max_{k \in \{n+1, \dots, m\}} |B_k| \sum_{k=n+1}^{m-1} |a_{k+1} - a_k|$$

Protože $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní, tak $|a_{k+1} - a_k| = \begin{cases} a_{k+1} - a_k & \text{je-li } \{a_k\} \\ & \text{rostoucí} \\ & \text{resp. klesající} \\ a_k - a_{k+1} & \text{je-li } \{a_k\} \\ & \text{klesající} \\ & \text{resp. rostoucí.} \end{cases}$

Tedy $\{|a_{k+1} - a_k|\}_{k=1}^{\infty}$ je klesající a platí:

$$\sum_{k=n+1}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| = |a_m - a_{n+1}|$$

Tedy odhad a z (•):

$$\bullet \bullet \quad \left| \sum_{k=n+1}^m a_k b_k \right| \leq 3 \max_{k \in \{n+1, \dots, m\}} |a_k| \max_{k \in \{n+1, \dots, m\}} |B_k|.$$

K vyjádření danému $\varepsilon > 0$, za předpokladu (DİR), $\exists M > 0$ tak, že $\forall k \geq 1 |B_k| \leq M$, a také existuje m_0 tak, že $\forall m \geq n \geq m_0$:

$$\max_{k \in \{n+1, \dots, m\}} |a_k| < \frac{\varepsilon}{3M}. \text{ Tedy z } (\bullet \bullet): \left| \sum_{k=n+1}^m a_k b_k \right| < \varepsilon$$

Za předpokladu (ABEL), $\exists L > 0$ tak, že $\forall k \geq 1 |a_k| < L$

a k danému $\varepsilon > 0$ najdeme A B.-C. podmínky pro konvergující řadu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ tak, že pro $m \geq n \geq m_0: |B_k| < \frac{\varepsilon}{3L}$.

Tedy opět A (••): $\left| \sum_{k=n+1}^m a_k b_k \right| < \varepsilon$. ▣

Příklady 13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n}$ pro $\varphi \in (0, 2\pi)$ první konverguje, neboť dle Dirichletova kritéria posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a splňuje podmínku Cauchyových součtů posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $b_n = e^{in\varphi}$ je omezená. Avšak A. Gaussova věta pro součet geometrické řady máme

$$S_n := \sum_{k=1}^n e^{ik\varphi} = e^{i\varphi} \frac{1 - e^{i(n+1)\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}$$

Tedy $|S_n| \leq |e^{i\varphi}| \frac{|1 - e^{i(n+1)\varphi}|}{|1 - e^{i\varphi}|} \leq \frac{2}{|1 - e^{i\varphi}|} =: M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

zde jsme využili: $|1 - \cos\varphi - i\sin\varphi| = (1 - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi \geq (1 - \cos\varphi)^2$

Speciálně jsme tak učinili, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ konverguje pro $x \in (0, 2\pi)$

a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ konverguje pro $x \in (0, 2\pi)$.

14) Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \arctg k$ konverguje neboť:

• $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} := \{\arctg k\}_{k=1}^{\infty}$ je omezená a monotónní

• pro $b_k := \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ konverguje dle Leibnizova kritéria.

15) Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$ nekonverguje, neboť $\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$

a tedy $\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{\cos 2k}{2k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k}{2k} \right] (*)$

protože řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k}{2k}$ konverguje dle Dirichletova kritéria. Ověřte.

Kdyby $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$ konvergovala, tak z (*) by plynilo, že $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konverguje;

což je spor a tedy řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$ nekonverguje.

6.3 Mohutnosť (kardinalita) čísel. Prerovnaní rad. Součin řad.

Bud' $M \neq \emptyset$ množina prvků. Mohutnosť množiny udává počet prvků množiny M . Ačkoliv jsme zvyklí porovnávat počty prvků v každodenním životě, i tento proces našeho myšlení vyžaduje jistou abstrakci a „stotožnění“. Cílem našich pohledů bude porovnat mohutnost nekonečných množin.

Definice Řekneme, že $\emptyset \neq M$ je konečná, pokud existuje $L \in \mathbb{N}$ a existuje $\varphi: N_L \xrightarrow{na} M$ podle, kde $N_L := \{m \in \mathbb{N}; m \leq L\}$.

Množina M je

- nekonečná, není-li konečná
- spčetně (nekonečná), jkdyž existuje $\varphi: \mathbb{N} \xrightarrow{na} M$ podle.
V tomto případě ke prvky M patří ve tvaru: $M = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
- spčetná je-li konečná nebo spčetně nekonečná
- nepčetná, není-li spčetná.

Georg Cantor (3.3.1845 - 6.1.1918)
německý matematik

D. Hilbert (1900): „Nikdo nás nevyžene z ráje, který pro nás připravil Cantor.“

Příklad Uvažujme $N_{\text{sudí}} = \{2k; k \in \mathbb{N}\}$. Pak z množinového pohledu $N_{\text{sudí}} \cong \mathbb{N}$. Z pohledu cardinality, tj. kolik prvků tyto množiny mají, jsou však $N_{\text{sudí}}$ a \mathbb{N} stejně velké neboť $\varphi: \mathbb{N} \mapsto N_{\text{sudí}}$ definované $\varphi(k) = 2k$ je podle a na.

Věta 6.12 Platí:

- Jsou-li S a T spčetné, pak $S \cup T$ a $S \times T$ jsou spčetné.
- \mathbb{Z} , \mathbb{Q} jsou spčetné.
- \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n jsou nepčetné.

(Dě) Ad(i) Necht' $S = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $T = \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$. Definujme-li

φ předpisem

$$\varphi(2n) = s_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

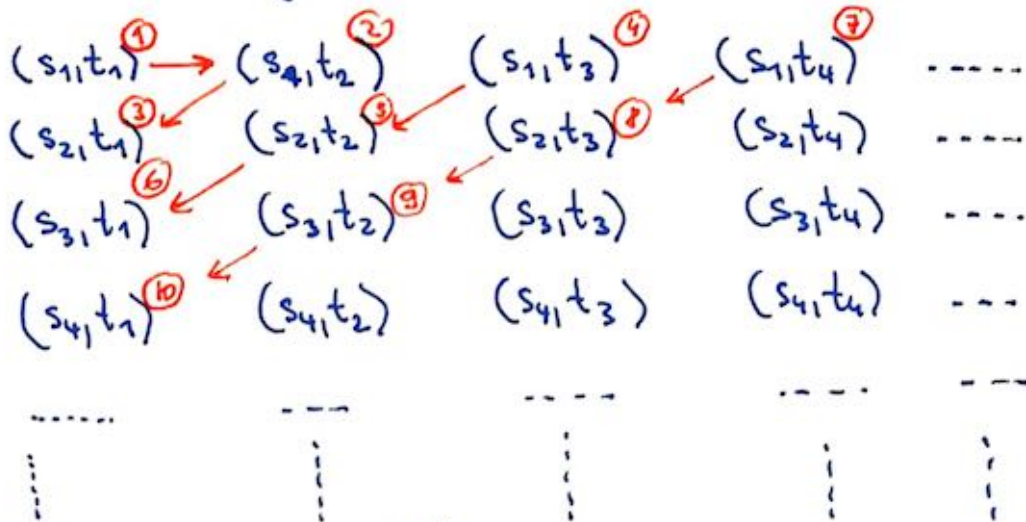
$$\varphi(2n-1) = t_n$$

pak $\varphi: \mathbb{N} \xrightarrow{na} S \cup T$ podle

Tedy $S \cup T$ je spčetně nekonečná.

V případě $S \times T := \{ (s_j, t_k), j=1,2,\dots; k=1,2,\dots \}$ si pomůžeme

obrázkem. Každý prvek (s_j, t_k) lze zobrazit:



Zobrazení φ řádku $m \in \mathbb{N}$ prvek (s_j, t_k) , který má u sebe (červený) kroužek (m) . Toto zobrazení je podle a na.

Ad (ii) • \mathbb{Z} mají stejnou mohutnost jako \mathbb{N} neboť zobrazení

$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definované:

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= 0 \\ \varphi(2k) &= k \\ \varphi(2k+1) &= -k \end{aligned} \quad k \in \mathbb{N}$$

je podle a na.

• \mathbb{Q} chápeme jako množinu $\left\{ \frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z} \text{ a } q \in \mathbb{N} \right\}$
 (s tím, že $\frac{2}{2}, \frac{1}{1}, \dots$ chápeme jako odlišné prvky)

pak \mathbb{Q} lze zobrazit do $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, což je dle předchozího spočetná množina.

chceme ukázat, že \mathbb{R} je nespočetná.

Ad (iii) Uvažujme nejdříve uzavřený interval $S := \langle 0, 1 \rangle$. S je buď spočetná (tzn. spočetně nekonečná) nebo nespočetná. Předpokládejme, že S je spočetná. Každý prvek $x \in S$ lze reprezentovat ve tvaru desítkového rozvoje $0, d_1 d_2 d_3 \dots d_n \dots$, kde $d_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

(vyloučíme čísla typu $0, d_1 \dots d_k \bar{9}$ (abychom se vyhnuli nejednoznačnosti))
 s výjimkou $1 = 0, \bar{9}$)

Z předchozího, že S je spočetná plyne, že prvky S lze uspořádat do posloupnosti: $\varphi(k) = x_k = 0, d_{k1} d_{k2} \dots d_{kn} \dots$

Máme tedy:

$$\begin{array}{l}
 x_1 = 0, d_{11} d_{12} d_{13} \dots d_{1k} \dots \\
 x_2 = 0, d_{21} d_{22} d_{23} \dots d_{2k} \dots \\
 \vdots \\
 x_k = 0, d_{k1} d_{k2} d_{k3} \dots d_{kk} \dots
 \end{array}$$

(T) Dle předpokladu (S spočetná) by každé číslo A S mělo být v seznamu (T). Zaujmeme se, tak jako Cantor, na prvky na diagonále, tj. d_{kk} , a vytvoříme číslo y tvaru

$$(*) \quad y = 0, c_1 c_2 \dots c_k \dots$$

kteří patří do S, ale nebude prvkem tabulky (T). Tato tabulka však měla obsahovat všechny prvky S, kdyby S byla spočetná. Máme tedy spor a S musí být nespočetná. Nyní tedy ke konstrukci y tvaru (*) nepatřící do (T). Zvolme si 2 čísla $z \in \{1, 2, \dots, 8\}$, například 1 a 6. Definujme y tvaru (*) takto:

$$\text{Je-li } d_{kk} = 1, \text{ pak položíme } c_k = 6$$

$$\text{Je-li } d_{kk} \neq 1, \text{ pak položíme } c_k = 1.$$

Takto vytvořené y patří do S, ale neshoduje se s žádným prvkem z (T).

Tedy $(0,1)$ je nespočetná, a také $(0,1)$ je nespočetná.

[Protože existuje $\pi: (0,1) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}$ bijekce a $(0,1)$ je nespočetná, tak je \mathbb{R} také nespočetná.

[Dle (i) je $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a také $\mathbb{R}^k = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{k\text{-krát}}$ nespočetná (se stejnou mohutností jako \mathbb{R}).

[Protože \mathbb{C} je izomorfní s $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ má i \mathbb{C} a také $\mathbb{C}^k = \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}$ stejnou mohutností jako \mathbb{R} .



* Metody tohoto typu se často nazývají Cantorova diagonalizace

• M, \emptyset jsou stejné mohutné (mají stejnou kardinalitu) $\Leftrightarrow \exists \varphi: M \xrightarrow{\text{bij}} \emptyset$ podle.

• Mohutnost (kardinalita) množiny M se označuje často $|M|$, tedy stejným symbolem jako absolutní hodnota nebo míra množiny (budeme mít pořadí). **POZOR!**

• Mohutnost \mathbb{N} se označuje \aleph_0 (= hebrejské abecedy... aleph nula)
tedy $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

• Je-li X množina, pak $\mathcal{P}(X) := \{A; A \subset X\}$ je tzv. potenciální množina
(angl. power set) ... systém všech podmnožin

► Je-li X konečná, pak je $|\mathcal{P}(X)| > |X|$

► $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| =: \aleph_1 > \aleph_0$

↑
aleph jedna

Množina všech podmnožin přirozených čísel je stejně mohutná jako množina reálných čísel

$$|\mathcal{P}(\mathbb{R})| > \aleph_1 = |\mathbb{R}|$$

► Otevřeným problémem axiomatiké teorie množin je tzv. "hypotéza kontinua": neexistuje řádové (kardinalní) číslo c , které leží mezi \aleph_0 a \aleph_1 .

Cantor:
• Počet bodů na úsečce je stejně jako počet bodů ve čtverci.

Prerovnáni řád

Definice Necht $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ (nebo \mathbb{C}) a $\varphi: \mathbb{N} \xrightarrow{\text{bij}} \mathbb{N}$ podle.
Pak řadu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k := \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ nazýváme prerovnaním řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Věta 6.13 Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je absolutně konvergentní a
je-li $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ její prerovnáni. Pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ konverguje absolutně
• $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Dě **Ad konvergence** Pro dané libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $m_0 \in \mathbb{N}$:
 $\sum_{n=m_0}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$. Definujeme $m_0 := \max \{ \varphi^{-1}(1), \dots, \varphi^{-1}(m_0-1) \}$.

Paž pro $m \geq m_0$ platí $\varphi(m) \geq m_0$ a tedy
 $\sum_{n=m_0+1}^{\infty} |a_{\varphi(m)}| \leq \sum_{n=m_0}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$ a tedy $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{\varphi(k)}|$ konverguje.

Ad součet Označme $s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
 a $t := \lim_{m \rightarrow \infty} t_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$

Pro $\varepsilon > 0$ najdeme $m_0 \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=m_0}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$ a $\sum_{k=m_0}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| < \varepsilon$.

Nyní najdeme $m_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $\boxed{m_0 \geq m_0}$, $\boxed{\{1, \dots, m_0-1\} \subset \{\varphi(1), \dots, \varphi(m_0)\}}$
 $\boxed{\{\varphi(1), \dots, \varphi(m_0-1)\} \subset \{1, \dots, m_0\}}$

Paž pro $m \geq m_0$: $|s_m - t_m| = \left| \sum_{k=1}^m a_k - \sum_{k=1}^m a_{\varphi(k)} \right| \leq \sum_{k=m_0}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=m_0}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| < 2\varepsilon$ \square

Jiný dě **Krok 1** Doplňme nejdrive tvrzení pro $a_n \geq 0$. Paž
 $\{a_{\varphi(1)}, \dots, a_{\varphi(m)}\} \subset \{a_1, \dots, a_m\}$ pro $M \in \mathbb{N}$ dobře zvolené veliči.

Tedy $0 \leq \sum_{k=1}^m a_{\varphi(k)} \leq \sum_{k=1}^M a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sup_{N \in \mathbb{N}} s_N =: s < +\infty$

Tak $t := \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m a_{\varphi(k)} \leq s < +\infty$ a řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ konverguje.

Nyní vyjdeme a doplníme a že skutečně, i
 $\{a_1, \dots, a_m\} \subset \{a_{\varphi(1)}, \dots, a_{\varphi(L)}\}$ pro L dobře zvolené veliči.

Tedy $0 \leq \sum_{k=1}^m a_k \leq \sum_{k=1}^L a_{\varphi(k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = t \Rightarrow \boxed{s \leq t}$

$\boxed{s=t}$ **Krok 2** Jsou-li $a_n \in \mathbb{R}$, paž $a_n = a_n^+ - a_n^-$ a $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$,

kde $x^+ = \max\{x, 0\}$ a $x^- = \max\{-x, 0\}$. Protož $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje,
 taž konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Dle **kroku 1** i taž

konverguje taž $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}^-$ a navíc $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}^{\pm} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm}$.
 Tak $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. \square

Príklad, ktorý ukazuje, že pre neabsolútne konvergentné rady Věta 6.13 neplatí

Rada $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = (1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots)$ definovaná predpisem

$$a_{2k-1} = \frac{1}{k} \quad \text{a} \quad a_{2k} = -\frac{1}{k}. \quad \text{Pak } S_{2k} = 0 \quad \text{a} \quad S_{2k-1} = \frac{1}{k}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

Uvažujme preovodní

$$\{a_{\varphi(k)}\}_{k=1}^{\infty} = (1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \dots)$$

definované takto:

$$a_{\varphi(3k-2)} = \frac{1}{2k-1}, \quad a_{\varphi(3k-1)} = \frac{1}{2k}, \quad a_{\varphi(3k)} = -\frac{1}{k}.$$

Pak

$$\begin{aligned} \underline{S_{3k}} &= \sum_{\ell=1}^{3k} a_{\varphi(\ell)} = \sum_{\ell=1}^k \{a_{\varphi(3\ell-2)} + a_{\varphi(3\ell-1)} + a_{\varphi(3\ell)}\} \\ &= \sum_{\ell=1}^k \left(\frac{1}{2\ell-1} + \frac{1}{2\ell} - \frac{1}{\ell} \right) = \sum_{\ell=1}^k \frac{2\ell + (2\ell-1) - 2(2\ell-1)}{2\ell(2\ell-1)} \\ &= \sum_{\ell=1}^k \frac{1}{(2\ell-1)2\ell} = \sum_{\ell=1}^k \left(\frac{1}{2\ell-1} - \frac{1}{2\ell} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots \Big|_{x=1} = \ln(x+1) \Big|_{x=1} \\ &= \underline{\ln 2} \end{aligned}$$

Pretože $S_{3k+1} - S_{3k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ a $S_{3k+2} - S_{3k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$,

tak $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ existuje a rovná sa $\ln 2$.

Vidíme, že preovodením konvergentných rad môžu dostať nové výsledky. Nasledujúci Riemannova veta, že ke vchodným preovodením dostaneme jač'koľvek výsledok, i $\pm \infty$.
JAKÝTOVZDIL opoti absolútne konvergentní řádkm!

* neabsolútne

Věta 6.14 (Riemannova věta o přerovnění neabsolutně konvergentních řad) Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje neabsolutně. Pak pro každé $s^* \in \mathbb{R}^*$ existuje přerovnění $\triangleright \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = s^*$.

(Dě) Připomeňme si ujednotěné značení: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^+ = \max\{x, 0\} \geq 0$
 $x^- = \max\{-x, 0\} \geq 0$

a tedy $x = x^+ - x^-$ a $|x| = x^+ + x^-$.

► Tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$

Tvrdíme, že nutně z neabsolutní konvergence $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ plyne:

(+) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \infty$ a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \infty$

Kdyby totiž $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergovaly, tak $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje, ale to neplatí.

Kdyby jedna z řad divergovala a druhá konvergovala, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje. Platí tedy (+).

► Pro dané $s^* \in \mathbb{R}$, bereme vhodné členy tak dlouho až jejich součet je větší než s^* , pak přidáváme záporné prvky až se dostaneme pod s^* , pak vhodné, pak záporné, ...

Otázka: Jak budeme postupovat je-li $s^* = +\infty$ či $s^* = -\infty$? ▣

POZOR! S neabsolutně konvergujícími řadami je třeba pracovat obzvláště opatrně, jak ukazuje příklady připravené na stránkách kurzu Vitem Průšon. Nevhodné manipulace (které zdánlivě působí věrohodně) mohou vést k identitám typu $\ln 2 = 2 \ln 2$ či $\ln 2 = 0$.

Součin řád

Definice Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ jsou dvě řady komplexních čísel. Pak symbolům $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$ rozumíme Cauchyův součin řád,

definovaný předpisem

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m := \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^k a_{k+1-j} b_j \right) = a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) + (a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3) + \dots$$

pro podější použití

Otázka: (1) Kdy $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$ (ve smyslu Cauchy) konverguje?

(2) kdy a zda platí: $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right)$?

Věta 6.15 (Mertensova věta) Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverguje. Pak Cauchyův součin řád $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$ konverguje a vztah (2) platí.

Důkaz: Označme $c_k := \sum_{j=1}^k a_{k+1-j} b_j$, $B_K := \sum_{k=1}^K b_k$, $A_K := \sum_{k=1}^K a_k$,
 $B := \lim_{K \rightarrow \infty} B_K$, $A := \lim_{K \rightarrow \infty} A_K$

Cílem je ukázat, že $\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K c_k$ existuje a rovná $AB = \lim_{K \rightarrow \infty} A_K B$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K c_k &= \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j=1}^k a_{k+1-j} b_j \right) = a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) + \dots + (a_k b_1 + \dots + a_1 b_k) \\ &= a_1 (b_1 + b_2 + \dots + b_k) + a_2 (b_1 + b_2 + \dots + b_{k-1}) + \dots + a_k b_1 \\ &= a_1 B_K + a_2 B_{K-1} + \dots + a_k B_1 \\ &= A_K B + a_1 (B_K - B) + a_2 (B_{K-1} - B) + \dots + a_k (B_1 - B) \\ &= A_K B + \sum_{j=1}^K a_{k+1-j} (B_j - B) =: \gamma_K \end{aligned}$$

ZBÝVÁ UKÁZAT, ŽE $\lim_{K \rightarrow \infty} \gamma_K = 0$

Volme $\varepsilon > 0$ pevně, ale libovolně. Pak z $(B-C)$ podmínky pro řadu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, plyne existence $K_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq K_0 : |B_k - B| < \varepsilon$.

Pak

$$|s_k| \leq \left| \sum_{j=1}^{K_0} a_{k+1-j} (B_j - B) \right| + \left| \sum_{j=K_0+1}^k (a_{k+1-j}) (B_j - B) \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{K_0} |a_{k+1-j}| |B_j - B| + \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \right) =: \tilde{A}$$

Protože $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1-j} = 0$, tak existuje $K_1 \in \mathbb{N} : \forall k \geq K_1 + 1 - K_0$

$$|a_k| \leq \frac{\varepsilon}{K_0 \max_{j \in \mathbb{N}} |B_j - B|}$$

Pak pro $k \geq K_1$: $|s_k| \leq K_0 \cdot \frac{\varepsilon}{K_0} + \varepsilon \tilde{A} = \varepsilon (\tilde{A} + 1)$. ▣

Věta 6.16 Cauchyův součin dvou absolutně konvergentních

řad je absolutně konvergentní.

(Dt) Aplikací Věty 6.15 na $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ dostáváme, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^k |a_{k+1-j}| |b_j| \right) \text{ konverguje.}$$

(Protože $\forall k \in \mathbb{N}$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^k a_{k+1-j} b_j \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^k |a_{k+1-j}| |b_j| \right),$$

tak řada $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left| \sum_{j=1}^k a_{k+1-j} b_j \right|}_{c_k}$ konverguje. ▣

(Proti) příklad

Bud' $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Pak máme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

konvergují neabsolutně. Ukážeme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ nekonverguje.

Rěšen! Řada $a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) + (a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3) + \dots$

$$1 - \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}_{c_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)}_{c_2} + \dots$$

a platí $c_{2k-1} \geq 1$ pro všechna k , což dává nekonvergenzi $\sum c_k$ dle Věty 6.1.

Všutěm: $c_{2k-1} = \frac{1}{k} + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{j} \sqrt{2k-j}} \geq \frac{1}{k} + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{k-1} \sqrt{2k}} \geq \frac{1}{k} + \sqrt{2} \frac{k-1}{k}$ ▣

6.4. Mocninne řady

Definice (Mocninna řada) Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ je mocninna řada se středem v z_0

Příklad Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ je mocninna řada s $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

Již dříve jsme uvažovali, že tato řada konverguje absolutně pro $|z| < 1$; a také, že pro $|z| > 1$ nekonzverguje a $C = \{z \in \mathbb{C}; |z|=1\}$, jednotková kružnice vytváří rozhraní. Tuto situaci zobecňuje Věta 6.17 níže.

Poznámka • Mocninna řada je speciální případ řady funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$; zde $f_n(z) = a_n (z-z_0)^n$. Zkoumat vlastnosti posloupnosti funkcí a řad funkcí budeme systematicky v dalším semestru.

- Mocninne řady patří mezi důležité kapitoly Komplexní analýza, tj. analyty funkcí komplexní proměnné.
- Teorie mocninnych řad je tedy důležitá.

Věta 6.17 Necht $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Položme

$$(*) \quad R := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty] \quad \left(\begin{array}{l} \text{tedy včetně } +\infty, \text{ které} \\ \text{dostaneme, je-li } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \end{array} \right)$$

Pak:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ konverguje absolutně na $B_R(z_0)$ a nekonzverguje na $\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(z_0)} = \{z \in \mathbb{C}; |z-z_0| > R\}$

(ii) existuje-li $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$, pak se rovná $1/R$

(iii) existuje-li $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$, pak se rovná $1/R$.

Definice R definované (*) se nazývá poloměr konvergence $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.

Umluva Označíme-li $w := z-z_0$, pak řadování mocninnych řad posunem

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ se převede na $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ se středem v počátku.

Nadále: $z_0 = 0$

Důkaz věty 6.14 **Ad (i)** Turzeta příje + odvození nového kritéria.
 (Věta 6.4) pro $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n$. Tato řada konverguje sekvěně $\exists \rho \in (0,1)$

$\sqrt[n]{|a_n| |z|^n} \leq \rho$ pro $n \geq n_0$ a diverguje pokud $\sqrt[n]{|a_n| |z|^n} \geq 1$ pro $n \geq n_0$.

Avsáž:

pro $\forall \varepsilon > 0$ a pro n dostatečně velká

• $\sqrt[n]{|a_n| |z|^n} = \sqrt[n]{|a_n|} |z| \leq \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} + \varepsilon \right) |z| = \left(\frac{1}{R} + \varepsilon \right) |z|$

volim $\varepsilon: 0 < \varepsilon < \frac{1}{|z|} - \frac{1}{R}$

$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{|z|} - \frac{1}{R} \right) |z| = 1.$

• Naopak pro $R \in (0, +\infty)$ a $|z| > R$:

$\sqrt[n]{|a_n| |z|^n} = \sqrt[n]{|a_n|} |z| \geq \left(\frac{1}{R} - \varepsilon \right) |z| \geq 1$

pro nekonečně mnoho indexů

pro $\frac{1}{R} - \frac{1}{|z|} > \varepsilon$

Ad (ii) Necht $\rho := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Pak pro $z \in \mathbb{C}$ první řad

$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho |z|.$

Podle d'Alembertova podílového kritéria, pro první $z: |z| < \frac{1}{\rho}$ je $\rho |z| < 1$ a tedy dle věty 6.5 řada konverguje. Naopak pro $|z|: |z| > \frac{1}{\rho}$ musí platit podmínka (ii) věty 6.5 a řada nekoneguje. Tedy $R = \frac{1}{\rho}$.

Ad (iii) příje v věty 6.4 (odvození kritéria) nebo přímo z definice R .

Příklad Uvažme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{5^n}$, $z \in \mathbb{C}$. Zde $a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \cdot \text{liché} \\ \frac{1}{5^{n/2}} & \text{pro } n \cdot \text{sudé} \end{cases}$

Pak $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5^n} \right)^{1/2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 5^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Tedy řada $\sum \frac{z^{2n}}{5^n}$ má poloměr konvergence $\sqrt{5}$.

Nyní si uvedeme čtyři tvrzení, která nám učiní z mocninových řad silný matematický prostředek. V bodech $z \in \mathbb{C}$ splňujících $|z| < R$ budeme moci tyto nekonečné řady derivovat/integrovat člen po členu.

Věta 6.18 (Derivace mocninové řady) Nechť R je poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ má také poloměr konvergence R a pro $|z| < R$ a $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ platí:

$$(*) \quad f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Důkaz **KROK 1** Chceme ukázat, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ mají stejný poloměr konvergence. Avšak:

• protože $\sqrt[n]{n} \geq 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) tak $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

• také $\sqrt[n]{n|a_n|} \leq \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{k} \sqrt[n]{|a_n|} \leq (1+\varepsilon) \sqrt[n]{|a_n|}$
 $\varepsilon > 0$ lib.
 $n \geq n_0(\varepsilon)$

a tak

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|} \leq (1+\varepsilon) \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

a tvrzení plyne.

KROK 2 **Důkaz (*)** Bud' $z: |z| < R$ a zvolme δ tak, aby $|z| + \delta < R$.

Dále nechť h splňuje $|h| < \delta$ ($\Rightarrow |z+h| < |z| + |h| < |z| + \delta < R$)

Chceme ukázat, že

$$R_h := \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \rightarrow 0 \text{ pro } |h| \rightarrow 0$$

Avšak

$$R_h = \left| \frac{1}{h} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right|$$

$$= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{(z+h)^n}{h} - \frac{z^n}{h} - n z^{n-1} \right) \right|$$

$$(z+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-1} \right|$$

$$\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |z|^{n-k} |h|^{k-1}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |z|^{n-k} \delta^{k-2} |h|$$

$$\leq |h| \delta^{-2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| (|z| + \delta)^n$$

$$\leq C|h| \quad \text{nebt' studované mocninné řady konverguje absolutně v bodě } |z| + \delta < R$$

Tedy $R_h \rightarrow 0$ pro $h \rightarrow 0$ a věta 6.18 je dokázána. \square

Věta 6.19 (O jedinečnosti rozvoje do mocninné řady)
Nechť $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ pro $|z| < \rho$ a $\rho > 0$.

Pak $a_n = b_n$ pro $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Důkaz Dle předchozí věty i derivované řady pro $|z| < \rho$ konvergují a platí vztah (*). Tak

$$f^{(k)}(z) \Big|_{z=0} = k! a_k = k! b_k, \text{ což implikuje } a_k = b_k. \quad \square$$

Věta 6.20 (Integrace mocninné řady) Nechť $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, a nechť mocninné řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ má poloměr konvergence $R > 0$.

Pro $z: |z| < R$ položíme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Pak

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + C \quad \text{je primitivní funkce k } f.$$

⊙ Dle věty 6.19 platí: $(F(z))' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z).$

Příklad Víme, že $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$ a $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$ pro $|x| < 1$.

Dle předchozí věty tak dostaneme pro $|x| < 1$

$$\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

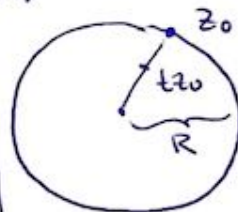
Užitečné je i následující tvrzení, které si uvedeme bez důkazu.

Abelova věta Bnd $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ má poloměr konvergence $R \in (0, \infty)$. Pokud pro $z_0 \in \mathbb{C}: |z_0| = R$ řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_0^k$ konverguje, pak je funkce $t \mapsto f(tz_0)$ spojitá na $(0, 1)$.

přičtením: pro $x=1$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ konverguje

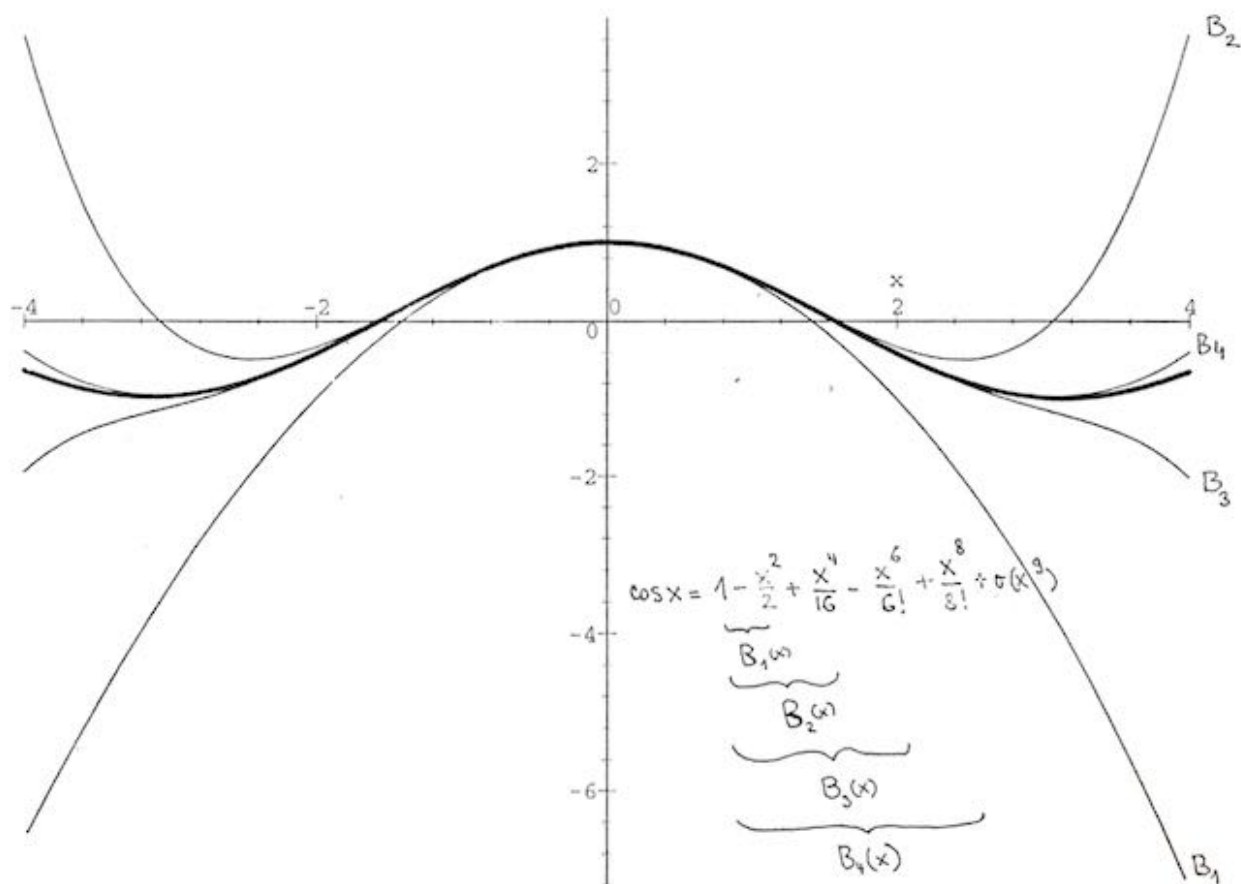
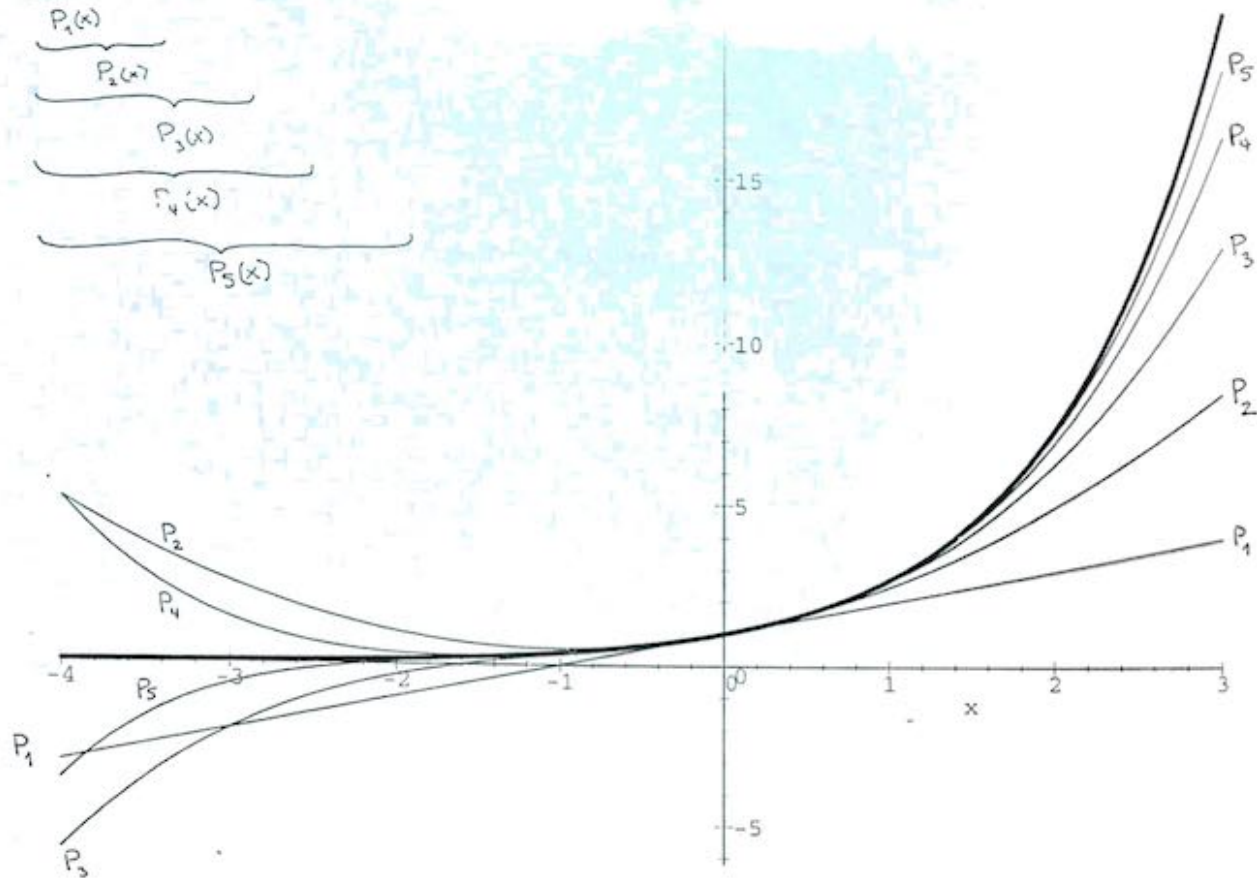
tedy $t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ je spojitá na $(0, 1)$. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \arctg t = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}.$$



$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

$\underbrace{1}_{P_1(x)}$
 $\underbrace{1 + x}_{P_2(x)}$
 $\underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2}}_{P_3(x)}$
 $\underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}}_{P_4(x)}$
 $\underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}}_{P_5(x)}$



$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} + \dots$$

$\underbrace{1}_{B_1(x)}$
 $\underbrace{1 - \frac{x^2}{2}}_{B_2(x)}$
 $\underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}_{B_3(x)}$
 $\underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}}_{B_4(x)}$

Věta 6.21 (o sinu, cosinu a exponenciále).

Existují právě jedna funkce $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tak, ů

(1) $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \exp z_2 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(2) $\exp(x + iy) = \exp x (\cos y + i \sin y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(3) $\exp 0 = 1$

(4) $(\exp z)' = \exp z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

(5) $\exp|_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} (0, +\infty)$ *monotónní* $(\Rightarrow \exists \ln: (0, +\infty) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}$ *inverze*)
 $\ln := (\exp)^{-1}$

(6) $\forall x \in \mathbb{R}^+, p, q \in \mathbb{N}: \exp\left(\frac{p}{q} \ln x\right) = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

(7) $e := \exp 1$ je *iracionální* (tzn. $e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$).

Existují právě dvě reálné funkce \cos a $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a číslo $\pi \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *iracionální* tak, ů

(8) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(9) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(10) $\sin(-x) = -\sin x$ a $\cos(-x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(11) $\sin|_{(0, \frac{\pi}{2})}$ je *monotónní*

(12) $\sin 0 = 0$ a $\sin' x|_{x=0} = 1$.

Důk. [1] Definujeme pro $z \in \mathbb{C}$:

(5) $\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

$\sin z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ *sin lide'*

$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ *zije tude'*

Komplexní funkce $\exp, \sin, \cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ jsou definovány pomocí mocniných řad s *poloměrem konvergence* $R = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = +\infty$.

Dle věty 6.18 o derivování mocniných řad

$(\exp z)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp z$

Opet znány trik: Otáč l = n-1 a přemě l na n.

a také

$(\sin z)' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cos z$

a podobně $(\cos z)' = -\sin z$
PROVEDTE!

Naně, $\exp 0 = 1, \sin 0 = 0$ a $(\sin' x)|_{x=0} = 1$. **Tedy (3), (4), (10) a (12) platí.**

[2] $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\exp(z_1 + z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}$$

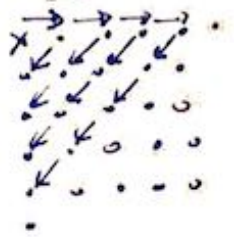
binomická věta $\rightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Cauchyův
součin
řad

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(m-k)! k!} z_1^k z_2^{m-k}$$

c_m - r. definice součinu řad

$$= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_1^m}{m!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!} \right) = \exp z_1 \exp z_2$$



a také (1) platí. Odsud také plyne

$$(13) \exp(x+iy) = \exp x \exp(iy)$$

Z (8) dostáváme: $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos z + i \sin z$$

sudí vs lichí

a stejně

$$\exp(-iz) = \cos z - i \sin z$$

existující implikace

$$(14) \cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$

a

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$$

a také, ve spojení s (13), rovnost (2).

Věta (14) také implikuje $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, kde využijeme

věta $\exp(-z) = \frac{1}{\exp z}$ neboť $1 = \exp 0 = \exp(z-z) = \exp z \exp(-z)$.

Dále $\exp(i(x+iy)) = \exp(ix) \exp(iy)$ implikuje ve spojení (2)

věta (8) a (9). Všechno:

$$\begin{aligned} \cos(x+iy) + i \sin(x+iy) &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \end{aligned}$$

Porovnáme reálnou a imaginární částí dostáváme (8) a (9).

[3] Pro $x \in \mathbb{R}$:

$$(\exp x)' = \exp x = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\exp \frac{x}{2}\right)^2 > 0 \Rightarrow \exp|_{\mathbb{R}} \text{ je rostoucí}$$

Když totiž $\exists x_0 \in \mathbb{C} : \exp x_0 = 0$, pak pro $z \in \mathbb{C}$ libovolně

$$\exp(z) = \exp(z - x_0 + x_0) = \exp(z - x_0) \exp x_0 = 0,$$

a tedy

- Také $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty$ a odhad $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\exp(-x)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\exp y} = 0^+$.

Tedy (5) je dokázáno.

Ad (6) Máme ukázat, že pro $x \in \mathbb{R}$ $\left[\exp \left(\frac{p}{q} \ln x \right) \right]_R^q = x^p$.

Avšak levé straně dle (1) splývá

$$\left(\exp \left(\frac{p}{q} \ln x \right) \right)_R^q \stackrel{(1) \text{ q-krát}}{=} \exp \left(q \cdot \frac{p}{q} \ln x \right) = \exp \left(p \ln x \right) = x^p$$

inverzní fee
& $\exp | \mathbb{R}$.

- Protože se jedná o kapitolu 5. výše, že π je iracionální zbylá dokázat jednoduše exponenciály, (11) a ověřit, že $e := \exp 1$ je iracionální.

splývá (1)-(4), speciálně

Ad jednoduše. Mějme dvě funkce f, g takové, že $f' = f$ a $g' = g, g \neq 0$, a $f(0) = g(0) = 1$. Pak pro $z \in \mathbb{C}$: $\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{fg - fg}{g^2} = 0$

tedy $\frac{f(z)}{g(z)} = \text{const.}$ a protože $\frac{f(0)}{g(0)} = 1$ tak $f(z) = g(z)$ pro $\forall z \in \mathbb{C}$.

Ad (11) Víme $\cos 0 = 1$. Dale $\cos 2 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \dots$
 $< 1 - 2 + \frac{2^4}{4!} \left(1 + \frac{2^2}{6 \cdot 5} + \frac{2^4}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} + \frac{2^6}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} + \dots \right)$
 $< -1 + \frac{16}{24} \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \dots \right)$
 $= -1 + \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = -1 + \frac{50}{63} < 0.$



Víme, že $\cos : (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která je kladná v 0 a záporná v 2. Z Darbouxovy věty tak plyne $\exists c > 0$ tak, že $\cos c = 0$. Ponej $x := \inf \{ c \in (0, 2) ; \cos c = 0 \}$ a položíme $\pi := 2x$.

Protože $(\sin x)' = \cos x > 0$ na $(0, \frac{\pi}{2})$, tak $\sin x | (0, \frac{\pi}{2})$ roste.

Ze spojitosti: $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ a se vrátíme

$$\cos^2 + \sin^2 = 1 \text{ plyne } \left[\sin \frac{\pi}{2} = 1 \right]$$

zde jsme využili vzorec $\ln xy = \ln x + \ln y$, který plyne z

$$\exp | \mathbb{R} (\ln y + \ln x) \stackrel{(1)}{=} \exp | \mathbb{R} \ln x \exp | \mathbb{R} \ln y = xy, \text{ neb } p \ln x = \underbrace{\ln x + \dots + \ln x}_{p\text{-krát}} = \ln \underbrace{x \dots x}_{p\text{-krát}} = \ln x^p$$

Ad $e := \exp 1$ iracionální

Když $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, nesoudělná, $q > 2$, vezme $k > q$.

Původe $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} + \frac{e^\xi}{(k+1)!}$, kde $\xi \in (0, 1)$. $1 < e^\xi < e < 3$.

tak $k! \cdot \frac{p}{q} = k! \cdot e = 2k! + \frac{q!}{2!} + \dots + \frac{q!}{k!} + \frac{e^\xi}{k+1}$
 $= L + \frac{e^\xi}{k+1}$ kde $L \in \mathbb{N}$.

neboli

$\frac{e^\xi}{k+1} = q! \cdot \frac{p}{q} + L \in \mathbb{N}$, ale volbou $k \gg 1$ dostaneme

$\frac{e^\xi}{k+1} \in (0, 1)$, což dává \downarrow s tím, že $\frac{e^\xi}{k+1}$ má být přirozené číslo. \square

EXPONENCIÁLA MATICE pro $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ nebo $\mathbb{C}^{d \times d}$ definujeme

$\exp A = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots$

Definujeme $\|A\| := \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^d, \|\vec{x}\|_{\mathbb{R}^d} \leq 1} \|A\vec{x}\|_{\mathbb{R}^d}$

NORMA MATICE

$\|\cdot\|$: matice \mapsto číslo ≥ 0

nejmenší $C > 0$ splňující $\|A\vec{x}\|_{\mathbb{R}^d} \leq C \|\vec{x}\|_{\mathbb{R}^d}$
 $\vec{z} \in \mathbb{R}^d$: $\|\vec{z}\|_{\mathbb{R}^d} = \left(\sum_{i=1}^d z_i^2 \right)^{1/2}$

Platí: $\|A B \vec{x}\|_{\mathbb{R}^d} \leq \|A\| \|B \vec{x}\|_{\mathbb{R}^d} \leq \|A\| \|B\| \|\vec{x}\|_{\mathbb{R}^d}$

$\Rightarrow \|A B\| \leq \|A\| \|B\|$

Speciálně: $\|A^2\| \leq \|A\|^2$ a $\|A^k\| \leq \|A\|^k$

Definice Řada, která definuje $\exp A$, konverguje, pokud $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$ konverguje

$\|\exp A\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\|A\|^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = \exp \|A\|$

Platí: $A B = B A \Rightarrow \exp(A+B) = \exp A \exp B$

• Pro A diagonální, tzn.

$$A := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_d \end{pmatrix},$$

je $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_d^k \end{pmatrix}$. Podle definice

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\exp A}} &= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_d \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \lambda_2^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_d^2 \end{pmatrix} + \dots + \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_d^k \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 + \frac{\lambda_1^2}{2!} + \frac{\lambda_1^3}{3!} + \dots & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 + \lambda_2 + \frac{\lambda_2^2}{2!} + \frac{\lambda_2^3}{3!} + \dots & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 + \lambda_d + \frac{\lambda_d^2}{2!} + \frac{\lambda_d^3}{3!} + \dots \end{pmatrix} \\ &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_d} \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$

• Pro A diagonalizovatelnou, tzn. pro A splývající $A = B D B^{-1}$,
kde D je diagonální,

platí: $A^2 = \underbrace{B D B^{-1}}_A \underbrace{B D B^{-1}}_I \underbrace{B D B^{-1}}_A = B D^2 B^{-1}$ a podobně $A^k = B D^k B^{-1}$.

Tedy $\underline{\underline{\exp A = \exp(B D B^{-1}) = B(\exp D) B^{-1}}}$.

• Tuto konstrukci lze použít i pro obecnější struktury jako jsou (lineární) operátory, tj. zobrazí A pomocí f do podobu $f(A)$.