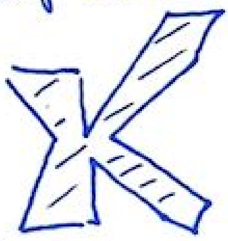
8.6 Věty o spojitém zobrazení na kompaktu, extrémy funkcí více proměnných

Připomeňme si vlastnosti spojitých fcí jedné reálné proměnné uvažovaných na UZAVŘENÉM intervalu $\langle a,b\rangle$:

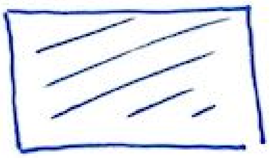
$f \in C(\langle a,b\rangle) \Rightarrow$

- f je na $\langle a,b\rangle$ omezená
- f nabývá všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$
- f nabývá v $\langle a,b\rangle$ maxima / minima
- f je stejnoměrně spojitá (Cantorova věta)

Nyní si uvedeme podobné věty pro funkce více proměnných. Uzavřený interval bude nahrazen obecnější množinou – množinou kompaktní



vs.



v $\mathbb{R}^d$: K je kompaktní $\Leftrightarrow$ K uzavřená a omezená

Věta 8.21 Buď $f \in C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní.

Pak $\underline{L := f[K]}$ (obraz množiny K při spojitém zobrazení) je kompakt (v $\mathbb{R}$) (resp. v $\mathbb{R}^m$)

Speciálně: $f|_K$ je omezená (f je omezená na K)

Dk Využijeme následující charakterizaci kompaktnosti (viz Věta 8.9 (1)$\Leftrightarrow$(2))

$$f[K] \text{ je kompaktní} \Leftrightarrow \left(\forall \{y^n\}_{n=1}^\infty \subset f[K]\right)\left(\exists \{y^{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{y^n\}_{n=1}^\infty\right)$$
$$\text{a } \left(\exists y \in f[K]\right) \quad y^{n_k} \to y \text{ v } \mathbb{R} \ (k\to\infty)$$

Vezměme tedy $\{y^n\}_{n=1}^\infty \subset f[K]$ libovolně. Pak dle definice obrazu množiny existují $x^n \in K$ tak, že $f(x^n) = y^n$

Ale $\underline{K}$ je kompaktní, existují tedy $x \in K$ a $\{x^{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{x^n\}_{n=1}^\infty$ tak, že

$$x^{n_k} \to x \text{ v } \mathbb{R}^d \text{ pro } k \to \infty$$

Dle Heineho věty $\quad f(x^{n_k}) \to f(x)$ v $\mathbb{R}$ $k\to\infty$

Ale $f(x^{n_k}) = y^{n_k}$ a $f(x)$ je hledané $y \in f[K]$.

POZOROVÁNÍ Předchozí i následující tvrzení (Věta 8.22) platí i v situacích

(i) $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní

(ii) $f: (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ kde (X, ρ_X) a (Y, ρ_Y) jsou úplné metrické prostory.

Věta 8.22 Buď $f \in C(K)^m$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní, $m \in \mathbb{N}$. Pak f je stejnoměrně spojitá v K.

Dk Vyjdeme z definice stejnoměrné spojitosti f v K:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x, y \in K)\ \boxed{|x - y|_{\mathbb{R}^d} < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon}$$

a tvrzení dokážeme sporem. Předpokládáme tedy

$$\boxed{f \in C(K) \wedge f \text{ není stejnoměrně spojitá na } K,\ K \subset \mathbb{R}^d \text{ kompaktní}}$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \{x^n\}, \{y^n\} \subset K$$

$$(*) \qquad |x^n - y^n|_{\mathbb{R}^d} < \frac{1}{n} \wedge |f(x^n) - f(y^n)|_{\mathbb{R}^m} \geq \varepsilon_0$$

Protože K je kompaktní,

existují: $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y^{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{y^n\}_{n=1}^{\infty}$

a $x, y \in K$:

$$x^{n_k} \to x \quad \text{a} \quad y^{n_k} \to y \quad \text{v } \mathbb{R}^d \ (k \to \infty)$$

Avšak dle první části $(*)$: $\boxed{x = y}$

a dle spojitosti

$$f(x^{n_k}) \to f(x) \underset{x=y}{=} f(y) \leftarrow f(y^{n_k})$$

neboli $f(x^{n_k}) - f(y^{n_k}) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$ což dává spor s druhou částí $(*)$.

∎

Následující věta je první větou zaručující existenci minimizéru (maximizéru), tj. bodu, ve kterém funkce nabývá svého minima (resp. maxima). Důkaz věty je "blízký" důkazu základní věty moderní teorie variačního počtu.

$\boxed{\text{Věta 8.23}}$ Buď $f \in C(K)$, $\boxed{f : \mathbb{R}^d \to \boxed{\mathbb{R}\,!}}$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní.

Pak f nabývá v K minima a maxima.

Dk • Buď $m := \inf_{x \in K} f(x)$. Z Věty 8.21 plyne, že

f je omezená a tedy $m > -\infty$.

Z definice m plyne existence $\{x^n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ tak, že

(1) $$f(x^n) \searrow m$$

• Protože K je kompaktní: existuje $x \in K$ a $\{x^{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $$x^{n_k} \to x \text{ v } \mathbb{R}^d \ (k \to \infty)$$

• Protože $f \in C(K)$ $$f(x^{n_k}) \to f(x)$$

a porovnáním s (1): $\underline{f(x) = m}$ Tedy infimum se v K nabývá.

Podobně postupujeme v případě $M := \sup_{x \in K} f(x)$. ∎

Nadále uvažujeme $f : \mathbb{R}^d \to \underline{\underline{\mathbb{R}}}$. Pojem globální (lokální) minimum/maximum (extrém) je definován stejně jako pro f jedné reálné proměnné. Uvedeme si nyní nutnou a postačující podmínku existence (lokálního) minima (maxima).

$\boxed{\text{Věta 8.24}}$ (Nutná podmínka existence extrému) Nechť

• $M \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená
• $f : M \to \mathbb{R}$ má v $x_0 \in M$ lokální extrém
• f má v $U_\delta(x_0) \subset M$ první parciální derivace spojité.

Pak $$\underline{\nabla f(x_0) = 0} \qquad \text{(d podmínek)}$$

Dk) Pro $i = 1, 2, \dots, d$ uvažuj fce

$$g^i(t) : (-\delta, \delta) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ definované } \quad g^i(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{e}^i) = f(x_0 + te^i)$$

Pak g^i mají v 0 lokální extrém

a dle Věty 4.1 (ZS): $(g^i)'(0) = 0$

Avšak

$$(g^i)'(t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + te^i)\Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \quad \text{a tvrzení plyne.}$$

$\boxed{\text{Věta 8.25}}$ (Postačující podmínka k existenci minima/maxima)

Nechť

(i) • $f \in C^2(U_\delta(x_0))$

(ii) • $\nabla f(x_0) = 0$

(iii) • $d^{(2)} f(x_0)(h, h)$ $\begin{cases} \text{positivně definitivní, tzn. } \exists \alpha > 0 \ d^{(2)} f(x_0)(h,h) \geq \alpha \|h\|^2_{\mathbb{R}^d} \\ \text{negativně definitivní,} \end{cases}$

Pak f má v bodě x_0 lokální $\begin{cases} \text{minimum} \\ \text{maximum} \end{cases}$

Dk) Dle Taylorova rozvoje (s využitím (ii)):

$$x = x_0 + h$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} d^{(2)} f(x_0 + \theta h)(h, h)$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2} d^{(2)} f(x_0)(h, h) + \underbrace{\frac{1}{2}\left[d^{(2)} f(x_0 + \theta h) - d^{(2)} f(x_0)\right](h, h)}_{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + \theta h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right] h_i h_j}$$

Ze spojitosti druhých derivací: $\left| \quad \vdots \quad \right| \leq \frac{\alpha}{2} |h|^2$ pro $|h|$ dostatečně malé

Tedy

$$f(x) \geq f(x_0) + \underbrace{\alpha |h|^2 - \frac{\alpha}{2} |h|^2}_{\geq 0} \geq f(x_0) \qquad \forall x \in U_\delta(x_0)$$

což jsme chtěli ověřit. !!