17.3 Temperované distribuce a Fourierova transformace

Nejmenší prostor, na kterém jsme doposud zavedli Fourierovu transformaci, byl Schwartzův prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ není pro Fourierovu transformaci vhodný neboť

1) Je-li $0 \neq \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $\mathcal{F}[\varphi] \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

2) Je-li $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $\varphi \equiv 0$.

zatímco

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad \text{a platí} \quad f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$$

Připomeňme, že

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \{ \varphi \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hladkost}}}{C^\infty}(\mathbb{R}^d) ;\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^d : \underbrace{\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty}_{\substack{\text{rychlý pokles v } \infty \\ \text{(rychlejší než polynomiální)}}} \}$$

Víme také, že $\boxed{e^{-\pi|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}$ a $\boxed{\mathcal{F}[e^{-\pi|x|^2}](s) = e^{-\pi|s|^2}}$

Def. (temperované distribuce) Temperované distribuce jsou spojité lineární funkcionály na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, tzn.

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) := \{ T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R} \text{ (nebo } \mathbb{C}) ;\ T \text{ je lineární, spojitý} \},$$

přičemž spojitost zavedeme takto:

pokud $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ splňuje $p D^\alpha \varphi_n \rightrightarrows 0$ v $\mathbb{R}^d$ pro libovolný polynom,

pak $T(\varphi_n) = \langle T, \varphi_n \rangle \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Platí

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

přičemž všechny inkluze jsou vlastní. Třetí inkluze není (jak si někteří všimli) úplně v pořádku neboť porovnávám funkce s funkcionály, které si sice odpovídají, ale jsou to jiné objekty. Je to však analogické situaci

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$ kde poslední inkluze platí za předpokladu, že ztotožním $x \in \mathbb{R}$ s $(x, 0) = x + i0$.

Bude probírána v 3. semestru v kurzu Funkcionální analýza pro fyziky

Přesněji: pro separabilní Hilbertův prostor $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ platí Rieszova věta o reprezentaci, která říká
$$(\forall f \in H')(\exists! a \in H)(\langle f, \varphi\rangle = (a, \varphi)_H)$$
H' … množina všech spoj. lin. funkcionálů na H; $(\cdot,\cdot)_H$ … skalární součin

Navíc $\|f\|_{H'} = \|a\|_H$

Speciálně: $L^2(\Omega)$ a $(L^2(\Omega))'$ lze ztotožnit

Tedy: $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^d) \approx [L^2(\mathbb{R}^d)]' \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

Poznámka Víme, že platí Hölderova nerovnost: $(\forall f \in L^p)(\forall \varphi \in L^{p'})$
$$\int_\Omega f(x)\varphi(x) \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$
což lze zapsat
$$\langle T_f, \varphi\rangle \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}$$
Platí:
$$[L^p(\Omega)]' = L^{p'}(\Omega)$$

$p \in [1,\infty]$	p' duální exponent
$L^p(\Omega)$	$L^{p'}(\Omega)$ duální prostor

Zpět k temperovaným distribucím:

- Zatímco $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$
  tak $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \not\subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

Př. $f(x) = e^{x^2}$, pak $\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} e^{x^2}\varphi(x)\,dx \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^d))'$,
a $T_f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Proč? Neboť pro speciální $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a to $e^{-\frac{x^2}{2}}$ platí
$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} e^{x^2} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{x^2}{2}}\,dx = +\infty.$$

Pro distribuce $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ jsme ukázali platnost čtyř duálních (adjungovaných) identit (1) – (4) (viz strana 13/11), které jsou typu

$$\langle OT, \varphi\rangle = \langle T, S\varphi\rangle \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

Tyto čtyři identity platí i pro $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ s jediným dodatkem: pro násobení skalárem m potřebujeme nejen hladkost, $m \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, ale také nejvýše polynomiální růst v ∞:

$$\boxed{(\exists\, N \in \mathbb{N})(\exists\, C > 0):\ m(x) \le C|x|^N \text{ pro } |x| \to \infty},$$

neboť teprve pak $m\varphi \in \mathcal{S}$ pro libovolné $\varphi \in \mathcal{S}$.

Pomocí duální identity zavedeme Fourierovu transformaci pro temperované distribuce. Je-li $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pak

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}[f](s)\varphi(s) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x\cdot s}\,dx\, \varphi(s)\,ds$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(s) e^{-2\pi i x\cdot s}\,ds\, f(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathcal{F}[\varphi](x)\,dx$$

neboli

$$\langle \hat{f}, \varphi\rangle = \langle f, \hat{\varphi}\rangle \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

Definice

Je-li $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, pak definujeme $\mathcal{F}[T]$ dualitou

$$\langle \mathcal{F}[T], \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}[\varphi]\rangle \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pak $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d)$ a $\boxed{\varphi \mapsto \int \hat{f}(x)\varphi(x)} \in \mathcal{S}'$ a platí:

$$\langle \hat{f}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\hat{\varphi}(x)\,dx$$

Tedy $\hat{f}$ chápaná jako Four. transf. pro $f \in L^1$ se shoduje s distributivní Four. transf. f (také distr. Four. transf. je reg. distribuce).

TVRZENÍ . Na $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ platí inverzní Fourierův vzorec:

$$\boxed{T = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[T]] \qquad \forall\ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)}$$

Dk) Využijeme platnost inverzního Fourierova vzorce pro $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Pro lib. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]] \rangle = \langle \mathcal{F}[T], \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle$$
$$= \langle \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[T]], \varphi \rangle$$

neboli $\underline{T = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[T]]}$

Příklady ① Buď $T = \delta$. Spočtěme $\hat{T}$.

Řešení: Dle definice

$$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int \varphi(s) e^{-2\pi i x \cdot s} ds \Big|_{x=0}$$
$$= \int \varphi(s)\, ds = \langle 1, \varphi \rangle$$

Tedy $\underline{\hat{\delta} = 1}$

Připomeňme si, že $\mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}](s) = c\,\frac{\sin s}{s}$. Nyní $\mathcal{F}[\delta] = $ konst.

$\mathcal{F}[e^{-\pi|x|^2}](s) = e^{-\pi|s|^2}$

f kompaktní nosič $\to$ $\hat{f}$ ztrácí pořadí, ale $\hat{f}$ hladké

f bodový nosič $\to$ $\hat{f}$ neklesá v ∞, $\hat{f}$ hladké.

② Buď $T = \delta'$. Spočtěme $\hat{T}$, kde $'$ značí $\frac{\partial}{\partial x_k}$

Platí

$$\langle \hat{\delta}', \varphi \rangle = \langle \delta', \hat{\varphi} \rangle = -\langle \delta, (\hat{\varphi})' \rangle$$
$$= +\langle \delta, \widehat{2\pi i x_k \varphi} \rangle = 2\pi \langle i x_k, \varphi \rangle \Rightarrow$$

$$\left[\ \hat{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(s) e^{-2\pi i x \cdot s} ds \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_k}\hat{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} -2\pi i s_k \varphi(s) e^{-2\pi i x \cdot s} ds\ \right]$$

$$\boxed{\widehat{\frac{\partial}{\partial x_k}\delta} = 2\pi i x_k}$$

Př. 3) Spočtěte Fourierovu transformaci funkce $e^{i\alpha|x|^2}$, $\alpha\neq 0, \alpha\in\mathbb{R}$

Řešení: Funkce $e^{i\alpha|x|^2} = \cos\alpha|x|^2 + i\sin\alpha|x|^2 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)\cap C(\mathbb{R}^d)$, ale $\notin L^1(\mathbb{R}^d)$ ani $\notin L^2(\mathbb{R}^d)$. Tedy $\widehat{e^{i\alpha|x|^2}}$ nemá smysl v $\mathcal{S}, L^1, L^2$, ale působí

$$\varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\alpha|x|^2}\varphi(x) \in \mathcal{S}' \qquad \text{(je to temperovaná distribuce)}$$

jediná možnost jak dát smysl $\mathcal{F}[e^{i\alpha|x|^2}]$ je v $\mathcal{S}'$.

> Obecně pro výpočet Fourierových transformací temperovaných distribucí platí, že je nelze spočítat z definice. Postup je tedy takový, že zkusíme nejdříve heuristicky (nejčastěji úvahou) nalézt vhodného kandidáta na F.T. ké dané temperované distribuce, a pak zkusíme ověřit, že tento kandidát splňuje identitu $\langle \text{kandidát}, \phi\rangle = \langle \text{funkce, která byla zadána}, \hat{\phi}\rangle \ \forall \phi\in\mathcal{S}$.

V našem případě vyjdeme z identity

$$(*) \qquad \mathcal{F}\left[e^{-\mu|x|^2}\right](s) = \left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{d/2} e^{-\frac{\pi^2}{\mu}|s|^2}$$

kde zkusíme vložit za $\mu = -i\alpha$. Pak

$$(\bullet) \qquad \mathcal{F}\left[e^{i\alpha|x|^2}\right](s) \overset{(*)}{=} \left(\frac{\pi}{-i\alpha}\right)^{d/2} e^{\frac{\pi^2}{i\alpha}|s|^2} = \left(\frac{\pi i}{\alpha}\right)^{d/2} e^{-\frac{\pi^2 i}{\alpha}|s|^2}$$

Na pravé straně je třeba správně definovat $\left(\frac{\pi i}{\alpha}\right)^{1/2}$ pro d liché. Provede se pomocí $z^{1/2}$:

$$\left(\frac{\pi i}{\alpha}\right)^{1/2} = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4}} \ (\text{pro } \alpha>0) = \left(\frac{\pi}{|\alpha|}\right)^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \left(\frac{\pi}{-\alpha}\right)^{1/2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \ (\text{pro } \alpha<0) = \left(\frac{\pi}{|\alpha|}\right)^{1/2} e^{-i\frac{\pi}{4}}. \end{cases}$$

S takto upřesněným významem pravé strany v $(\bullet)$, stačí ukázat

$$\boxed{(\bullet\bullet) \qquad \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\alpha|x|^2}\hat{\phi}(x)\,dx = \left(\frac{\pi i}{\alpha}\right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\pi^2 i}{\alpha}|s|^2}\phi(x)\,dx \quad \forall \phi\in\mathcal{S}}$$

$$\left\langle \text{funkce, která byla zadána}, \hat{\phi}\right\rangle \overset{?}{=} \left\langle \text{kandidát}, \phi\right\rangle$$

K důkazu $(\bullet\bullet)$ opět vyjdeme z $(*)$ a využijeme hlubokých vlastností komplexní analýzy.

Vztah (*) implikuje

(**) $$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\mu|x|^2}\hat{\phi}(x)\,dx = \left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{d/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\pi^2}{\mu}|x|^2}\phi(x)\,dx \quad \text{s } \mu>0$$

Uvažujme nyní dvě funkce $F, G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definované

$$F(\mu) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\mu|x|^2}\hat{\phi}(x)\,dx \qquad G(\mu) := \left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{d/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\pi^2}{\mu}|x|^2}\phi(x)\,dx$$

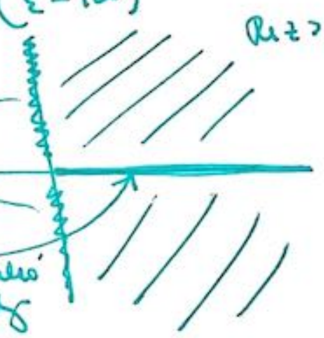
Připomeňme, že $\frac{1}{\mu} = \frac{\overline{\mu}}{|\mu|^2}$ a tedy pro $\operatorname{Re}\mu>0$ jsou

- $F(\mu)$ a $G(\mu)$ konečné (neboli $D_F \supset \{z\in\mathbb{C};\ \operatorname{Re} z>0\} \subset D_G$)
- Navíc, $e^{-\mu|x|^2} = e^{-\mu_1|x|^2}(\cos\mu_2|x|^2 + i\sin\mu_2|x|^2)$ splňuje C-R podmínky
  $\mu=\mu_1+i\mu_2$

a tak F a podobně G jsou holomorfní v $\{z\in\mathbb{C};\ \operatorname{Re} z>0\}$

- Pro $\mu\neq 0$ (počátek) $$F(-i\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0} F(\varepsilon - i\alpha)$$ $$G(-i\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0} G(\varepsilon - i\alpha)$$

Ale $G(\mu) = F(\mu)$ pro μ typu $(\mu, 0)$



množina, kde také platí rovnost A věta o jednoznačnosti holomorfních fcí

rovnost na množině, která má hromadný bod

Tedy z věty o jednoznačnosti holomorfních funkcí plyne
$$F(-i\alpha) = G(-i\alpha) \quad \forall \alpha\neq 0, \alpha\in\mathbb{R}$$
což je žádaný vzorec (••).

Citát (Paul Painlavé): „Between two truths of the real domain, the easiest a shortest path quite often passes through complex domain."

Př. 4 Spočtěte Fourierovu transformaci $f(x) = e^{-t|x|}$, $t>0$.

Řešení V tomto případě $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, klesá v ∞ rychleji než libovolný polynom, ale není v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, neboť $e^{-t|x|} \notin C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (problém je počátek).

▶ Nejdříve spočteme F.T. $e^{-t|x|}$ přímo pro $\boxed{d=1}$

Výpočet
$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t|x|} e^{-2\pi i x s}\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(t-2\pi i s)x}\,dx + \int_0^\infty e^{-(t+2\pi i s)x}\,dx$$
$$= \left[\frac{e^{(t-2\pi i s)x}}{t-2\pi i s}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{e^{-(t+2\pi i s)x}}{(t+2\pi i s)}\right]_0^\infty$$
$$= \frac{1}{t-2\pi s i} + \frac{1}{t+2\pi s i} = \frac{2t}{t^2+4\pi^2 s^2}$$

Vidíme, že pro $\forall t>0$ je $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dle Tvrzení na konci kapitoly F.T. platí:
$$f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f$$
což implikuje
$$\boxed{e^{-t|x|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t}{t^2+4\pi^2 s^2} e^{2\pi i x s}\,ds} \qquad (\text{✿})$$

▶ Ve vyšších dimenzích $\boxed{d>1}$ použijeme jiný obecný postup:

a) Napíšeme $e^{-t|x|}$ (nebo obecně danou funkci f) jako "průměr" Gaussiánů s jistou váhou g, tj.
$$(\mathrm{I}) \qquad \boxed{e^{-t|x|} = \int_0^\infty g(t,s)\, e^{-s|x|^2}\,ds}$$

b) Na (I) užijeme F.T., což dává
$$\mathcal{F}\left[e^{-t|x|}\right](z) = \int_0^\infty g(t,s)\, \mathcal{F}\left[e^{-s|x|^2}\right](z)\,ds$$
$$= \int_0^\infty g(t,s) \left(\frac{\pi}{s}\right)^{d/2} e^{-\frac{\pi^2}{s}|z|^2}\,ds$$

c) Zkusíme spočítat (upravit) poslední integrál.

Zkusme aplikovat schéma ⓐ-ⓒ na $f(x) = e^{-t|x|}$.

Ad a) Hledejme tedy g tak, že (I) platí. Označme $\lambda = |x|$. Tedy ($\lambda > 0$) hledáme $g = g(t,s)$ tak, že

$$(I') \qquad e^{-t\lambda} = \int_0^\infty g(t,s)\, e^{-s\lambda^2}\, ds$$

Vyjdeme ze vztahu (❀) (viz předchozí strana) a pozorování:

$$\int_0^\infty e^{-\beta t^2} e^{-\beta(2\pi s)^2}\, d\beta = \int_0^\infty e^{-\beta(t^2+(2\pi s)^2)}\, d\beta = \frac{1}{t^2+4\pi^2 s^2}$$

Tedy dle (❀):

$$e^{-t|x|} = 2t\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty e^{-\beta t^2} e^{-\beta(2\pi s)^2}\, d\beta\; e^{2\pi i x s}\, ds$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty 2t e^{-\beta t^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(2\pi)^2 s^2} e^{2\pi i x s}\, ds\right) d\beta$$

strana 17/21 $\longrightarrow$ (*), $\mu = +\beta 4\pi^2$, $d = 1$

$$= \int_0^\infty 2t\, e^{-\beta t^2}\left(\frac{\pi}{\beta 4\pi^2}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{4\beta}x^2}\, d\beta$$

$$= \frac{t}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-\beta t^2}}{\sqrt{\beta}}\, e^{-\frac{1}{4\beta}\cdot x^2}\, d\beta$$

neboli

$$\boxed{e^{-t\lambda} = \int_0^\infty \frac{t\, e^{-\beta t^2}}{\sqrt{\pi\beta}}\, e^{-\frac{\lambda^2}{4\beta}}\, d\beta}$$

a (I') je vyřešena.

Ad b) Aplikujeme-li na (I') Four. transformaci (opět s $\lambda = |x|$), máme

$$\mathcal{F}[e^{-t|x|}](s) = \int_0^\infty \frac{t}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\beta t^2}}{\sqrt{\beta}}\, \mathcal{F}\left[e^{-\frac{|x|^2}{4\beta}}\right](s)\, d\beta \overset{(*)}{=} \int_0^\infty \frac{t}{\sqrt{\beta\pi}}(4\beta\pi)^{d/2} e^{-4\beta\pi^2|s|^2} e^{-\beta t^2}\, d\beta$$

$$\overset{\text{substituce}}{=} \frac{2^d t \pi^d}{(t^2+4\pi^2|s|^2)^{\frac{d+1}{2}}}\underbrace{\int_0^\infty y^{\frac{d-1}{2}} e^{-y}\, dy}_{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} = \frac{(2\pi)^d\, \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) t}{(t^2+4\pi^2|s|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$$

substituce $y = \beta(t^2+4\pi^2|s|^2)$, $d\beta = \frac{dy}{t^2+4\pi^2|s|^2}$

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx$$

Pozorování

(i) $\mathcal{F}^{-1}[e^{-t|x|}](s) = \mathcal{F}[e^{-t|x|}](-s) = (2\pi)^d \dfrac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) t}{(t^2+4\pi^2|s|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$

(ii) f klesá rychle v ∞ $\longrightarrow$ $\hat{f}$ hladká

f není hladká v 0 $\longrightarrow$ $\hat{f}$ klesá jen polynomiálně.

Příklad 5 Spočtěte Fourierovu transformaci $f(x)=|x|^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{C}$, kde $\mathrm{Re}\,\alpha\in(-d,0)$, tzn. $|x|^{\alpha}\in L^1_{loc}$.

<u>Řešení</u> Ačkoliv $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, tak $f\notin L^1(\mathbb{R}^d)$, ale f "neroste" (pro $\alpha>-d$) příliš rychle v ∞, tedy $T_f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

$$\langle T_f,\phi\rangle=\int_{\mathbb{R}}|x|^{\alpha}\phi(x)\,dx$$

▷ K určení Fourierovy transformace $\hat{T}_f$ použijeme <u>obecný</u> postup z předchozího příkladu, kdy hledáme g tak, že

$$(\mathrm{I}'')\qquad |x|^{\alpha}=\int_0^{\infty}g(\alpha,s)\,e^{-s|x|^2}\,dx$$

Platí:

$$\int_0^{\infty}s^{-\frac{\alpha}{2}-1}e^{-s|x|^2}\,ds \underset{\substack{y=s|x|^2\\ s=\frac{y}{|x|^2}\\ ds=\frac{1}{|x|^2}}}{=} \int_0^{\infty}|x|^{\alpha}\,y^{-\frac{\alpha}{2}-1}e^{-y}\,dy=\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)|x|^{\alpha}$$

přičemž integrál nalevo je konečný pokud $\boxed{\alpha<0}$

Tedy pro $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\in(-d,0)$; (I'') má tvar

$$(✿)\qquad \boxed{|x|^{\alpha}=\frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\int_0^{\infty}s^{-\frac{\alpha}{2}-1}e^{-s|x|^2}\,ds}$$

▷ Nyní k (✿) aplikujeme F.T.

$$\mathcal{F}\left[|x|^{\alpha}\right](z)=\frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\int_0^{\infty}s^{-\frac{\alpha}{2}-1}\,\mathcal{F}\left[e^{-s|x|^2}\right](z)\,ds$$

$$(*)\qquad \overset{(*),\,p\ 17/21}{=}\frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\int_0^{\infty}s^{-\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{\pi}{s}\right)^{d/2}e^{-\frac{\pi^2}{s}|z|^2}\,ds$$

$$=\frac{(\pi)^{d/2}}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\int_0^{\infty}s^{-\frac{\alpha+d}{2}-1}e^{-\frac{\pi^2|z|^2}{s}}\,ds$$

$$=\frac{(\pi)^{d/2}}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\left[\pi|z|\right]^{-(\alpha+d)}\cdot\underbrace{\int_0^{\infty}y^{\frac{\alpha+d}{2}-1}e^{-y}\,dy}_{\Gamma(\frac{\alpha+d}{2})}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y&=\frac{\pi^2|z|^2}{s}\\ s&=\pi^2|z|^2\frac{1}{y}\\ ds&=-\frac{\pi^2|z|^2}{y^2}dy\\ &(y\text{ od }+\infty\text{ do }0)\end{aligned}}$$

$$=\frac{1}{\pi^{\frac{\alpha}{2}+d}}\,\frac{\Gamma(\frac{\alpha+d}{2})}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\,\frac{1}{|z|^{\alpha+d}}$$

<u>Pozorujme</u>
- pro $\boxed{\alpha\in(-d,0)}$ je $\boxed{-\alpha-d\in(-d,0)}$
- Výpočet provedeme pro $\alpha\in\mathbb{R}$, rozšíření pro $\alpha\in\mathbb{C}$ možné pomocí věty jednoznačnosti
- Speciálně $\mathcal{F}\left[\frac{1}{|x|}\right](z)\underset{\substack{\alpha=-1\\ d=3}}{=}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(1)}{\underset{=\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2})}}\,\frac{1}{|z|^2}=\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{|z|^2}\Rightarrow\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{|z|^2}\right]=\frac{\pi}{|x|}$

$\boxed{d=3}$

Úloha: Najděte fundamentální řešení Laplaceova operátoru v $\mathbb{R}^d$

tzn. hledáme $-\Delta u = \delta$ v $\mathcal{D}'$

Řešení: řešme $-\Delta u = \delta$ v $\mathcal{S}'$ pomocí F.T.

Pak
$$4\pi^2 |z|^2 \hat{u}(z) = 1 \Rightarrow \hat{u}(z) = \frac{1}{4\pi^2 |z|^2}$$

Cíl: INVERTOVAT

Z (*) plyne, že pro $\boxed{\alpha \in (-d,0)} \Leftrightarrow \boxed{-\alpha-d \in (-d,0)}$

$$\mathcal{F}\left[|x|^{\alpha}\right](z) = \frac{1}{\pi^{\frac{\alpha}{2}+d}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+d}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{1}{|z|^{\alpha+d}}$$

$|x|$

$$\Updownarrow \quad \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{|z|^{\alpha+d}}\right](x) = \pi^{\frac{\alpha}{2}+d} \frac{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+d}{2}\right)} |x|^{\alpha}$$

chceme použít pro $\boxed{\alpha+d=2} \Rightarrow \alpha = 2-d$ a $2-d \in (-d,0) \Leftrightarrow \boxed{d>2}$

Pak
$$u(x) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}+2-d}}{4\pi^2} \frac{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{\Gamma(1)} \frac{1}{|x|^{d-2}} = \frac{1}{4\pi^{d/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{|x|^{d-2}}$$

Připomeň: $\Gamma(m) = (m-1)!$ $\quad \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot \dots \left(\frac{1}{2}+m-1\right)\sqrt{\pi}$

Speciálně pro $\boxed{d=3}$
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
$$\boxed{u(x) = \frac{1}{4\pi|x|}}$$

Obecněji ei jinak:
je-li ω_d označení pro objem jednotkové koule v $\mathbb{R}^d$,
pak
$$\boxed{u(x) = \frac{1}{d(2-d)\omega_d} \frac{1}{|x|^{d-2}}}$$
$(x \neq 0)$

Pro $d=2$ je F. řešení $-\Delta u = \delta$
dáno vztahem
$$\boxed{u(x) = \frac{1}{2\omega_2} \ln|x| = \frac{1}{2\pi} \ln|x|}$$

což si ukážeme přímo A definice následujících výpočtem.