$\boxed{\text{Pro } x \in \mathbb{R} \text{ umíme odpovědět otázku, kdy } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \text{ konverguje, diverguje či osciluje.}}$ Skutečně, protože $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n}$ konverguje dle limitního d'Alambertova kritéria pokud $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)} \frac{n}{|x|^n} < 1$, což je ekvivalentní požadavku $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}|x| < 1 \iff |x| < 1$, dostáváme, dle $\boxed{\text{Kritéria AK} \Rightarrow \text{K}}$, že řada $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \text{ konverguje pro } x \in (-1,1)}$ (dokonce absolutně).

Dále víme, že $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n}$ neexistuje nebo není nulová pro $x \in \mathbb{R}$ takové, že $|x| > 1$. (Pro $x > 1$, posloupnost $\left\{\frac{x^n}{n}\right\}_1^{\infty}$ diverguje; pro $x < -1$, — " — $\left\{\frac{x^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje)

Tedy, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ pro $x > 1$ diverguje a pro $x < -1$ nekonverguje (osciluje). Zbývají body $x = \pm 1$. Pro $x = 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (viz Příklad 3), zatímco řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje (ale ne absolutně), viz Příklad 12.

$\boxed{\text{Motivací pro další výklad bude otázka: Pro jaká } z \in \mathbb{C}\text{, řada } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \text{ konverguje, diverguje, osciluje?}}$

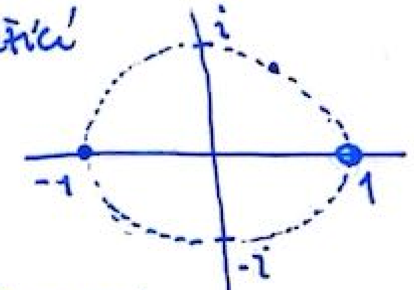
Protože pro $z \in \mathbb{C}$: $z = |z| e^{i\varphi}$ $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$

a $z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n \cos n\varphi + i |z|^n \sin n\varphi$

tak stejnými metodami jako pro $x \in \mathbb{R}$, $|x| \neq 1$, zjistíme, že

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konverguje (dokonce absolutně) pro $|z| < 1$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ diverguje nebo osciluje pro $|z| > 1$.

Zbývá vyšetřit $\{z \in \mathbb{C};\, |z| = 1\}$ tzn. z ležící na jednotkové kružnici neboli z tvaru $z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$.



Přitom víme, že na jednotkové kružnici je bod $(z = 1)$, kdy řada diverguje a bod $(z = -1)$, kdy řada konverguje.

Zajímá nás tedy co se děje v ostatních bodech jednotkové kružnice.

Připomeňme si, že zkoumání konvergence řady $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n}}$ je ekvivalentní zkoumání konv. řad $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n}}$ a $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n}}$

Všimněme si, že tyto řady lze psát ve tvaru

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, kde $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = e^{in\varphi}$ či $\sin n\varphi$ nebo $\cos n\varphi$.

Řadami typu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ se nyní budeme zabývat. Začneme jedním technickým tvrzením, které lze interpretovat jako diskrétní verzi integrace per-partes.

Lemma (Diskrétní verze integrace per-partes) Pro $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}, \{b_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ platí:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \quad \text{kde } B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i .$$

Dk: Protože $b_1 = B_1$ a $b_k = B_k - B_{k-1}$ pro $k \geq 2$, píšeme

$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k = \sum_{k=2}^{m} a_k (B_k - B_{k-1}) + a_1 B_1$$

$$= a_1 B_1 + a_2 B_2 - a_2 B_1 + a_3 B_3 - a_3 B_2 + \dots + a_m B_m - a_m B_{m-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_m B_m = a_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) B_k$$

Skutečnost, že sčítáme v Lemmatu od $k=1$, nehrála v důkazu žádnou roli; máme tedy také: pro $m > n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$(6) \quad \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \quad \text{kde } B_k := \sum_{i=n+1}^{k} b_i$$

$\boxed{\text{Věta 6.11}}$ (Abelovo a Dirichletovo kritérium)

Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ monotónní. Buď $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Dále nechť:

$\boxed{\text{BUĎ}}$

(DIR) $a_n \to 0$ pro $n \to \infty$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ má omezenou posloupnost částečných součtů,

NEBO

(ABEL) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje.

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje

Dk. Chceme ukázat, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ splňuje B.-C. podmínku: K danému $\varepsilon > 0$ hledáme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall\, m \geq n \geq n_0$: $\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k < \varepsilon$.

Definujeme-li $B_k := \sum_{i=n+1}^{k} b_i$, tak z předchozí lemmy a (6) dostáváme:

$$(\bullet) \quad \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| \leq |a_m|\,|B_m| + \max_{k \in \{n+1,\dots,m\}} |B_k| \sum_{k=n+1}^{m-1} |a_{k+1} - a_k|$$

Protože $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní, tak $|a_{k+1} - a_k| = \begin{cases} a_{k+1} - a_k & \text{je-li } \{a_k\} \text{ rostoucí resp. neklesající,} \\ a_k - a_{k+1} & \text{je-li } \{a_k\} \text{ klesající resp. nerostoucí.} \end{cases}$

Tedy $\{|a_{k+1} - a_k|\}_{k=1}^{\infty}$ je teleskopická a platí:

$$\sum_{k=n+1}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| = \pm [a_m - a_{n+1}]$$

Tedy odsud a z $(\bullet)$:

$$(\bullet\bullet) \quad \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| \leq 3 \max_{k \in \{n+1,\dots,m\}} |a_k| \max_{k \in \{n+1,\dots,m\}} |B_k|.$$

K výše danému $\varepsilon > 0$, za předpokladu (DIR), $\exists\, M > 0$ tak, že $\forall\, k \geq 1$ $|B_k| \leq M$, a také existuje n_0 tak, že $\forall\, m \geq n \geq n_0$: $\max_{k \in \{n+1,\dots,m\}} |a_k| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Tedy z $(\bullet\bullet)$: $\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| < \varepsilon$

Za předpokladu (ABEL), $\exists\, L > 0$ tak, že $\forall\, k \geq 1$ $|a_k| < L$ a k danému $\varepsilon > 0$ najdeme z B-C. podmínky pro konvergující řadu $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $m \geq n \geq n_0$: $|B_k| < \frac{\varepsilon}{3L}$.

Tedy opět z $(\bullet\bullet)$: $\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k \right| < \varepsilon$. ▨

Příklady (13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n}$ pro $\varphi \in (0, 2\pi)$ jevně konverguje, neboť dle předchozího Dirichletova kritéria posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a splňuje $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Zbývá ověřit, že posloupnost částečných součtů posloupnosti $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ s $b_k := e^{ik\varphi}$ je omezená. Avšak z Gaussova vzorce pro součet geometrické řady máme

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} e^{ik\varphi} = e^{i\varphi} \frac{1-e^{i(n+1)\varphi}}{1-e^{i\varphi}}.$$

Tedy
$$|S_n|_{\mathbb{C}} \leq |e^{i\varphi}|_{\mathbb{C}} \frac{|1-e^{i(n+1)\varphi}|_{\mathbb{C}}}{|1-e^{i\varphi}|_{\mathbb{C}}} \leq \frac{2}{|1-e^{i\varphi}|_{\mathbb{C}}} \leq \frac{2}{1-\cos\varphi} =: M \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

kde jsme využili $|1-\cos\varphi - i\sin\varphi|_{\mathbb{C}}^2 = (1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi \geq (1-\cos\varphi)^2$.

Speciálně jsme také ukázali, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ konverguje pro $x \in (0, 2\pi)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ konverguje pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$. ☒

(14) Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} k$ konverguje neboť:

- $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} := \{\operatorname{arctg} k\}_{k=1}^{\infty}$ je omezená a monotónní

a

- pro $b_k := \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ konverguje dle Leibnizova kritéria. ☒

(15) Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$ nekonverguje, neboť $\sin^2 k = \frac{1-\cos 2k}{2}$ a tedy

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{\cos 2k}{2k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k}{2k}\right] \quad (✿)$$

protože řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k}{2k}$ konverguje dle Dirichletova kritéria. OVĚŘTE.

Kdyby $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$ konvergovala, tak z (✿) by plynulo, že $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konverguje, což je spor a tedy řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$ nekonverguje.

6.3 Mohutnost (kardinalita) čísel. Přerovnání řad.

Buď $M \neq \emptyset$ množina prvků. Mohutnost množiny udává počet prvků množiny M. Ačkoliv jsme zvyklí porovnávat počty prvků v každodenním životě, i tento proces našeho myšlení vyžaduje jistou abstrakci a „ztotožnění". Cílem našeho povídání bude porovnat mohutnost nekonečných množin.

Definice Řekneme, že $\emptyset \neq M$ je konečná, pokud existuje $L \in \mathbb{N}$ a existuje $\varphi : N_L \xrightarrow{na} M$ prosté, kde $N_L := \{n \in \mathbb{N};\ n \leq L\}$.

Množina M je

- nekonečná, není-li konečná
- spočetně (nekonečná), jestliže existuje $\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{na} M$ prosté. V tomto případě lze prvky M psát ve tvaru: $M = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$
- (spočetná) je-li konečná nebo spočetně nekonečná
- nespočetná, není-li spočetná.

Georg Cantor

D. Hilbert (1900): „Nikdo nás nevyžene z ráje, který pro nás připravil Cantor.

Příklad Uvažujme $\mathbb{N}_{sudé} = \{2k; k \in \mathbb{N}\}$. Pak z množinového pohledu $\mathbb{N}_{sudé} \subsetneqq \mathbb{N}$. Z pohledu kardinality, tj. kolik prvků tyto množiny mají, jsou však $\mathbb{N}_{sudé}$ a $\mathbb{N}$ stejně velké neboť $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_{sudé}$ definované $\varphi(k) = 2k$ je prosté a na.

Věta 6.12 Platí:

(i) Jsou-li S a T spočetné, pak $S \cup T$ a $S \times T$ jsou spočetné.

(ii) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ jsou spočetné.

(iii) $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m$ jsou nespočetné.

Dk **Ad (i)** Nechť $S = \{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $T = \{t_k\}_{k=1}^{\infty}$. Definujme-li φ předpisem

$$\begin{aligned} \varphi(2n) &= s_n \\ \varphi(2n-1) &= t_n \end{aligned} \quad (n \in \mathbb{N})$$

pak $\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{na} S \cup T$ prosté

Tedy $S \cup T$ je spočetně nekonečná.

V případě $S\times T := \{(s_j,t_k);\ j=1,2,\dots;\ k=1,2,\dots\}$ si pomůžeme
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j\in\mathbb{N}\quad;\ k\in\mathbb{N}$
obrázkem. Kartézský součin $S\times T$ lze zobrazit:

$$
\begin{array}{ccccc}
(s_1,t_1)^{1} \rightarrow & (s_1,t_2)^{2} & (s_1,t_3)^{4} & (s_1,t_4)^{7} & \cdots \\
(s_2,t_1)^{3} & (s_2,t_2)^{5} & (s_2,t_3)^{8} & (s_2,t_4) & \cdots \\
(s_3,t_1)^{6} & (s_3,t_2)^{9} & (s_3,t_3) & (s_3,t_4) & \cdots \\
(s_4,t_1)^{10} & (s_4,t_2) & (s_4,t_3) & (s_4,t_4) & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Zobrazení φ přiřadí $m\in\mathbb{N}$ prvek (s_j,t_k), který má u sebe (červený) kroužek m. Toto zobrazení je prosté a na.

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ • $\mathbb{Z}$ mají stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$ neboť zobrazení $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ definované:
$$\boxed{\begin{array}{l}\varphi(1)=0\\ \varphi(2k)=k \qquad k\in\mathbb{N}\\ \varphi(2k+1)=-k\end{array}}$$
je prosté a na.

• $\mathbb{Q}$ chápeme jako množinu $\left\{\frac{p}{q};\ p\in\mathbb{Z} \text{ a } q\in\mathbb{N}\right\}$
(s tím, že $\frac{2}{2}, \frac{1}{1}, \dots$ chápeme jako odlišné prvky)
pak $\mathbb{Q}$ lze ztotožnit s $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, což je dle předchozího spočetná množina.

$\boxed{\text{Ad (iii)}}$ Chceme ukázat, že $\mathbb{R}$ je nespočetná.
Uvažujme nejdříve uzavřený interval $S:=\langle 0,1\rangle$. S je buď spočetná (tzn. spočetně nekonečná) nebo nespočetná. $\boxed{\text{Předpokládejme, že } S \text{ je spočetná.}}$ Každý prvek z S lze reprezentovat ve tvaru desetinného rozvoje $0,d_1d_2d_3\dots d_m\dots$, kde $d_k\in\{0,1,\dots,9\}$.
(vyloučíme čísla typu $0,d_1\dots d_k\overline{9}$ (abychom se vyhnuli nejednoznačnosti)) s výjimkou $1=0.\overline{9}$)
Z předpokladu, že S je spočetná plyne, že prvky S lze uspořádat do posloupnosti: $\underline{\varphi(k)=x_k=0,d_{k1}d_{k2}\dots d_{km}\dots}$

Máme tedy:

(T)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}\, d_{11}\, d_{12}\, d_{13} \ldots\ldots d_{1k} \ldots \\
x_2 &= 0{,}\, d_{21}\, d_{22}\, d_{23} \ldots\ldots d_{2k} \ldots \\
&\vdots \\
x_k &= 0{,}\, d_{k1}\, d_{k2}\, d_{k3} \ldots\ldots d_{kk} \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Dle předpokladu (S spočetná) by každé číslo z S mělo být v seznamu (T). Zaměříme se, tak jako Cantor, na prvky na diagonále*), tj. d_{kk}, a vytvoříme číslo y tvaru

(*) $$y = 0{,}\, c_1 c_2 \ldots\ldots c_k \ldots ,$$

které patří do S, ale nebude prvkem tabulky (T). Tato tabulka však měla obsahovat všechny prvky S, kdyby S byla spočetná. Máme tedy spor a S musí být nespočetná. Nyní tedy ke konstrukci y tvaru (*) nepatřící do (T). Zvolme si 2 čísla z $\{1,2,\ldots,8\}$, například 1 a 6. Definujme y tvaru (*) takto:

Je-li $d_{kk} = 1$, pak polož $c_k = 6$,
Je-li $d_{kk} \neq 1$, pak polož $c_k = 1$.

Takto vytvořené y patří do S, ale neshoduje se s žádným prvkem z (T).

Tedy $\langle 0,1 \rangle$ je nespočetná, a také $(0,1)$ je nespočetná.

[Protože $\operatorname{cotg} \pi x : (0,1) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}$ prostě a $(0,1)$ je nespočetná, tak je $\mathbb{R}$ také nespočetná.

[Dle (i) je $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a také $\mathbb{R}^k = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{k\text{-krát}}$ nespočetná (se stejnou mohutností jako $\mathbb{R}$).

[Protože $\mathbb{C}$ je isomorfní s $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ má i $\mathbb{C}$ a také $\mathbb{C}^k = \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}$ stejnou mohutnost jako $\mathbb{R}$.

---

*) Metody tohoto typu se často nazývají Cantorova diagonalizace

- M, U jsou stejně mohutné (mají stejnou kardinalitu) $\overset{df}{\iff} \exists \varphi: M \xrightarrow{na} U$ prostě.
- Mohutnost (kardinalita) množiny M se označuje často $|M|$, tedy stejným symbolem jako absolutní hodnota nebo míra množiny (budeme mít později). POZOR!
- Mohutnost $\mathbb{N}$ se označuje $\aleph_0$ (z hebrejské abecedy... alephnula) tedy $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.
- Je-li X množina, pak $\mathcal{P}(X) := \{A;\ A \subset X\}$ je tzv. potenční množina (angl. power set) ... systém všech podmnožin
  - Je-li X konečná, pak je $|\mathcal{P}(X)| > |X|$
  - $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| =: \aleph_1 > \aleph_0$ Množina všech podmnožin přirozených čísel je stejně mohutná jako množina reálných čísel

    alephjedna

    $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| > \aleph_1 = |\mathbb{R}|$
  - Otevřeným problémem axiomatické teorie množin je tzv. "hypotéza kontinua": neexistuje žádné (kardinální) číslo c, které leží mezi $\aleph_0$ a $\aleph_1$.

Cantor:
- Počet bodů na úsečce je stejný jako počet bodů ve čtverci.

Přerovnání řad

Definice Nechť $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) a $\varphi: \mathbb{N} \xrightarrow{na} \mathbb{N}$ prostě. Pak řadu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k := \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ nazveme přerovnáním řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Věta 6.13 Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je absolutně konvergentní a je-li $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ její přerovnání. Pak
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ konverguje absolutně
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Dk $\boxed{\text{Ad konvergence}}$ Pro dané libovolné $\varepsilon>0$ existuje $n_0\in\mathbb{N}$: $\sum_{n=n_0}^{\infty}|a_n|<\varepsilon$. Definujme $m_0:=\max\{\varphi^{-1}(1),\dots,\varphi^{-1}(n_0-1)\}$.

Pak pro $m>m_0$ platí $\varphi(m)\geq n_0$ a tedy

$$\sum_{m=m_0+1}^{\infty}|a_{\varphi(m)}|\leq\sum_{n=n_0}^{\infty}|a_n|<\varepsilon \text{ a tedy } \sum_{k=1}^{\infty}|a_{\varphi(k)}| \text{ konverguje.}$$

$\boxed{\text{Ad součet}}$ Označme $s:=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_k$

a $t:=\lim_{n\to\infty}t_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{\varphi(k)}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{\varphi(k)}$

Pro $\varepsilon>0$ najdeme $n_0\in\mathbb{N}$: $\sum_{k=n_0}^{\infty}|a_k|<\varepsilon$ a $\sum_{k=n_0}^{\infty}|a_{\varphi(k)}|<\varepsilon$.

Nyní najdeme $m_0\in\mathbb{N}$ takové, že $\boxed{m_0\geq n_0}$, $\boxed{\{1,\dots,n_0-1\}\subset\{\varphi(1),\dots,\varphi(m_0)\}}$

$\boxed{\{\varphi(1),\dots,\varphi(n_0-1)\}\subset\{1,\dots,m_0\}}$

Pak pro $m\geq m_0$:

$$|s_m-t_m|=\left|\sum_{k=1}^{m}a_k-\sum_{k=1}^{m}a_{\varphi(k)}\right|\leq\sum_{k=n_0}^{\infty}|a_k|+\sum_{k=n_0}^{\infty}|a_{\varphi(k)}|<2\varepsilon$$ ▨

Jiný dk $\boxed{\text{Krok 1}}$ Dokážeme nejdříve tvrzení pro $a_n\geq0$. Pak $\{a_{\varphi(1)},\dots,a_{\varphi(m)}\}\subset\{a_1,\dots,a_M\}$ pro $M\in\mathbb{N}$ dostatečně velké.

Tedy $$0\leq\sum_{k=1}^{m}a_{\varphi(k)}\leq\sum_{k=1}^{M}a_k\leq\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sup_{M\in\mathbb{N}}s_M=:s<+\infty$$

Tak $\underset{\sim}{t}:=\lim\sum_{k=1}^{m}a_{\varphi(k)}\leq\underset{\sim}{s}<\infty$ a řada $\sum_{k=1}^{\infty}a_{\varphi(k)}$ konverguje.

Nyní vyjdeme z dokázaného a ze skutečnosti, že $\{a_1,\dots,a_m\}\subset\{a_{\varphi(1)},\dots,a_{\varphi(L)}\}$ pro L dostatečně velké.

Tedy $$0\leq\sum_{k=1}^{m}a_k\leq\sum_{k=1}^{L}a_{\varphi(k)}\leq\sum_{k=1}^{\infty}a_{\varphi(k)}=t\Rightarrow\boxed{s\leq t}$$

$\boxed{s=t}$

$\boxed{\text{Krok 2}}$ Jsou-li $a_n\in\mathbb{R}$, pak $a_n=a_n^+-a_n^-$ a $|a_n|=a_n^++a_n^-$, kde $x^+=\max\{x,0\}$ a $x^-=\max\{-x,0\}$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konverguje, též konvergují $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$. Dle $\boxed{\text{KROKU 1}}$ však konvergují také $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}^-$ a navíc $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}^{+/-}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{+/-}$.

Tak $$\sum_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}^+-\sum_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}^-=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+-\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$ ▨

Příklad, který ukazuje, že pro neabsolutně konvergentní řady Věta 6.13 neplatí

Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = (1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots)$ definována předpisem

$a_{2n-1} = \frac{1}{n}$ a $a_{2n} = -\frac{1}{n}$. Pak $S_{2n} = 0$ a $S_{2n-1} = \frac{1}{n}$.

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} a_k = 0$.

Uvažujme přerovnání

$$\{a_{\varphi(k)}\}_{k=1}^{\infty} = \left(1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \dots\right.$$

definované takto:

$$a_{\varphi(3k-2)} = \frac{1}{2k-1}, \quad a_{\varphi(3k-1)} = \frac{1}{2k}, \quad a_{\varphi(3k)} = -\frac{1}{k}.$$

Pak

$$\underline{\sigma_{3k}} = \sum_{k=1}^{3k} a_{\varphi(k)} = \sum_{l=1}^{k} \{a_{\varphi(3l-2)} + a_{\varphi(3l-1)} + a_{\varphi(3l)}\}$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \left(\frac{1}{2l-1} + \frac{1}{2l} - \frac{1}{l}\right) = \sum_{l=1}^{k} \frac{2l + (2l-1) - 2(2l-1)}{2l(2l-1)}$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{(2l-1)2l} = \sum_{l=1}^{k} \left(\frac{1}{2l-1} - \frac{1}{2l}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots \Big|_{x=1} = \ln(x+1)\Big|_{x=1}$$

$$= \underline{\ln 2}$$

Protože $\sigma_{3k+1} - \sigma_{3k} \xrightarrow{k \to \infty} 0$ a $\sigma_{3k+2} - \sigma_{3k} \xrightarrow{k \to \infty} 0$,

tak $\lim_{k \to \infty} \sigma_k$ existuje a rovná se $\ln 2$.

Vidíme, že přerovnáním konvergentních*) řad mohu dostat různé výsledky. Následující Riemannova věta, že lze vhodným přerovnáním dostat jakýkoliv výsledek, i $+/-\infty$. JAKÝ TO ROZDÍL oproti absolutně konvergentním řadám!

*) neabsolutně

Věta 6.14 (Riemannova věta o přerovnání neabsolutně konvergentních řad) Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje neabsolutně. Pak pro každé $s^* \in \mathbb{R}^*$ existuje přerovnání φ s $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = s^*$.

Dk Připomeňme si nejdříve značení: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^+ = \max\{x, 0\} \geq 0$, $x^- = \max\{-x, 0\} \geq 0$

a tedy $x = x^+ - x^-$ a $|x| = x^+ + x^-$.

▶ Tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$

Tvrdíme, že nutně z neabsolutní konvergence $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ plyne:

$$(+) \quad \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \infty \quad a \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \infty}$$

Kdyby totiž $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ i $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergovaly, tak $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje, ale to neplatí.

Kdyby jedna z řad divergovala a druhá konvergovala, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje. Platí tedy (+).

▶ Pro dané $s^* \in \mathbb{R}$, bereme kladné členy tak dlouho až jejich součet je větší než s^*, pak přidáváme záporné prvky až se dostaneme pod s^*, pak kladné, pak záporné, ...

Otázka: Jak budeme postupovat je-li $s^* = +\infty$ či $s^* = -\infty$?

▨

POZOR! S neabsolutně konvergujícími řadami je třeba pracovat obzvláště opatrně, jak ukazují příklady připravené na stránkách kursu Vítem Průšou. Nevhodné manipulace (které zdánlivě působí věrohodně) mohou vést k identitám typu

$$\ln 2 = 2 \ln 2 \quad \text{či} \quad \ln 2 = 0.$$

Součin řad

Definice Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ jsou dvě řady komplexních čísel. Pak symbolem $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$ rozumíme Cauchyův součin řad, definovaný předpisem

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m := \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j}\, b_j \right)}_{=\, c_k} = a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) + (a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3) + \dots$$

pro pozdější použití

Otázky: (1) Kdy $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$ (ve smyslu Cauchy) konverguje?

(2) kdy a zda platí: $\boxed{\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right)}$?

Věta 6.15 (Mertensova věta) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverguje. Pak Cauchyův součin řad $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$ konverguje a vztah (2) platí.

Dk Označme $c_k := \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j} b_j$, $B_K := \sum_{k=1}^{K} b_k$, $A_K := \sum_{k=1}^{K} a_k$,

$B := \lim_{K\to\infty} B_K$, $A := \lim_{K\to\infty} A_K$

> Cílem je ukázat, že
> $$\lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} c_k \text{ existuje a rovná } AB = \lim_{K\to\infty} A_K B$$

Avšak:

$$\sum_{k=1}^{K} c_k = \sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{j=1}^{k} a_{k+j-1} b_j\right) = a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) + \dots + (a_K b_1 + \dots + a_1 b_K)$$

$$= a_1(b_1 + b_2 + \dots + b_K) + a_2(b_1 + b_2 + \dots + b_{K-1}) + \dots + a_K b_1$$

$$= a_1 B_K + a_2 B_{K-1} + \dots + a_K B_1$$

$$= A_K B + a_1(B_K - B) + a_2(B_{K-1} - B) + \dots + a_K(B_1 - B)$$

$$= A_K B + \underbrace{\sum_{j=1}^{K} a_{K+1-j}(B_j - B)}_{=:\, \gamma_K}.$$

> ZBÝVÁ UKÁZAT, ŽE
> $$\lim_{K\to\infty} \gamma_K = 0$$

Volme $\varepsilon>0$ pevně, ale libovolně. Pak z (B-C) podmínky pro řadu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, plyne existence $K_0 \in \mathbb{N}: \forall \tilde{K} \geq K_0: |B_{\tilde{K}} - B| < \varepsilon$.

Pak

$$|\gamma_K| \leq \left|\sum_{j=1}^{K_0} a_{K+1-j}(B_j - B)\right| + \left|\sum_{j=K_0+1}^{K} (a_{K+1-j})(B_j - B)\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{K_0} |a_{K+1-j}||(B_j - B)| + \varepsilon \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|\right)}_{=:\tilde{A}}$$

Protože $\lim_{K\to\infty} a_{K+1-j} = 0$, tak existuje $K_1 \in \mathbb{N}: \forall l \geq K_1+1-K_0$

$$|a_l| \leq \frac{\varepsilon}{K_0 \max_{j\in\mathbb{N}} |B_j - B|}.$$

Pak pro $K \geq K_1$: $|\gamma_K| \leq K_0 \cdot \frac{\varepsilon}{K_0} + \varepsilon \tilde{A} = \varepsilon(\tilde{A} + A)$. ▨

$\boxed{\text{Věta 6.16}}$ Cauchyův součin dvou <u>absolutně</u> konvergentních řad je <u>absolutně</u> konvergentní.

Dk Aplikací Věty 6.15 na $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$, $\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|$ dostáváme, že

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}|a_{k+1-j}||b_j|\right)$ konverguje.

Protože $\forall K \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j} b_j\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}|a_{k+1-j}||b_j|\right)$,

tak řada $\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\underbrace{\sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j} b_j}_{c_k}\Big|$ konverguje. ▨

$\boxed{\text{(Proti)příklad}}$ Buď $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Pak víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují neabsolutně. Ukážeme, že

$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_m b_n$ nekonverguje.

<u>Řešení</u> Řada $a_1b_1 + (a_2b_1 + a_1b_2) + (a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3) + \dots$

má tvar $\underbrace{1}_{c_1} + \underbrace{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{c_2} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}}_{c_3} + $

a platí $\boxed{c_{2k-1} \geq 1}$ pro všechna k, což dává nekonvergenci $\sum c_k$ dle Věty 6.1.

Vskutku: $c_{2k-1} = \frac{1}{k} + 2\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{\sqrt{j}}\frac{1}{\sqrt{2k-j}} \geq \frac{1}{k} + 2\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{k-1}}_{\leq\sqrt{k}}\sqrt{2k}} \geq \frac{1}{k} + \sqrt{2}\,\frac{k-1}{k}$. ▨

6.4. Mocninné řady

Definice (Mocninná řada) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ je mocninná řada se středem v z_0

Příklad Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ je mocninná řada s $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$.
Již dříve jsme ukázali, že tato řada konverguje absolutně pro $|z|<1$; A také, že pro $|z|>1$ nekonverguje a $C = \{z \in \mathbb{C} ; |z|=1\}$, jednotková kružnice vytváří rozhraní. Tuto situaci zobecňuje Věta 6.17 níže.

Poznámka
- Mocninná řada je speciální případ řady funkcí $\sum_{n=1} f_n(z)$; zde $f_n(z) = a_n (z-z_0)^n$. Zkoumat vlastnosti posloupností funkcí a řad funkcí budeme systematicky v dalším semestru.
- Mocninné řady patří mezi důležité kapitoly Komplexní analýza, tj. analýzy funkcí komplexní proměnné.
- Teorie mocninných řad je tedy důležitá.

Věta 6.17 Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Položme

$$(*) \qquad R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty]$$

(tedy včetně $+\infty$, které dostaneme, je-li $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$)

Pak:
(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ konverguje absolutně na $B_R(z_0)$ a nekonverguje na $\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} ; |z-z_0| > R\}$

(ii) existuje-li $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$, pak se rovná $1/R$

(iii) existuje-li $\lim \sqrt[k]{|a_k|}$, pak se rovná $1/R$.

Definice R definované $(*)$ se nazývá poloměr konvergence $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.

Úmluva Označíme-li $\underbrace{w := z - z_0}_{\text{posunutí}}$, pak zkoumání mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ se převede na $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ se středem v počátku.

Nadále: $z_0 = 0$

$\boxed{\text{Důkaz Věty 6.17}}$ $\boxed{\text{Ad (i)}}$ Tvrzení plyne z odmocninového kritéria (Věta 6.4) pro $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n$. Tato řada konverguje jestliže $\exists q \in (0,1)$ $\sqrt[n]{|a_n||z|^n} \leq q$ pro $n \geq n_0$ a diverguje pokud $\sqrt[n]{|a_n||z|^n} \geq 1$ pro $n \geq n_0$.

Avšak:

pro $\forall \varepsilon > 0$ a pro n dostatečně velká

- $$\sqrt[n]{|a_n||z|^n} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|z| \leq \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} + \varepsilon\right)|z| = \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)|z|$$

volím ε: $0 < \varepsilon < \frac{1}{|z|} - \frac{1}{R}$

$$< \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{|z|} - \frac{1}{R}\right)|z| = 1.$$

- Naopak pro $R \in (0, +\infty)$ a $|z| > R$:

$$\sqrt[n]{|a_n||z|^n} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|z| \geq \left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)|z| \geq 1 .$$

pro nekonečně mnoho indexů

pro $\frac{1}{R} - \frac{1}{|z|} > \varepsilon$

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Nechť $\varrho := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Pak pro $z \in \mathbb{C}$ pevné platí

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| \xrightarrow{n\to\infty} \varrho |z| .$$

Podle d'Alembertova podílového kritéria, pro pevné z : $|z| < \frac{1}{\varrho}$ je $\varrho|z| < 1$ a tedy dle Věty 6.5 řada konverguje. Naopak pro $|z|$: $|z| > \frac{1}{\varrho}$ musí platit podmínka (ii) Věty 6.5 a řada nekonverguje. Tedy $R = \frac{1}{\varrho}$.

$\boxed{\text{Ad (iii)}}$ plyne z Věty 6.4 (odmocninové kritérium) nebo přímo z definice R. ∎

Příklad: Uvažme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{5^n}$, $z \in \mathbb{C}$. Zde $a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ liché} \\ \frac{1}{5^n} & \text{pro } n \text{ sudé} \end{cases}$.

Pak $$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5^n}\right)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} 5^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{5}} .$$

Tedy řada $\sum \frac{z^{2n}}{5^n}$ má poloměr konvergence $\frac{1}{\sqrt{5}}$. ∎

Nyní si uvedeme čtyři tvrzení, která nám učiní z mocninných řad silný matematický prostředek. V bodech $z \in \mathbb{C}$ splňujících $|z| < R$ budeme moci tyto nekonečné řady derivovat/integrovat člen po členu.

Věta 6.18 (Derivace mocninné řady) Nechť R je poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ má také poloměr konvergence R a pro $|z| < R$ a $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ platí:

$$(*) \qquad f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Dk **KROK 1** Chceme ukázat, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ mají stejný poloměr konvergence. Avšak:

- protože $\sqrt[n]{n} \geq 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ tak $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} \geq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$
- také $\sqrt[n]{n|a_n|} \leq \underbrace{\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{k}}_{\searrow 1} \sqrt[n]{a_n} \leq (1+\varepsilon)\sqrt[n]{|a_n|}$ $\varepsilon > 0$ lib., $n \geq n_0(\varepsilon)$

a tak

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} \leq (1+\varepsilon) \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

a tvrzení plyne.

KROK 2 **Důkaz (*)** Buď $z : |z| < R$ a zvolme δ tak, aby $|z| + \delta < R$.
Dále nechť h splňuje $|h| < \delta$ $(\Rightarrow |z+h| < |z| + |h| < |z| + \delta < R)$

Chceme ukázat, že

$$R_h := \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \longrightarrow 0 \quad \text{pro } |h| \to 0$$

Avšak

$$R_h = \left| \frac{1}{h} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right|$$

$$= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{(z+h)^n}{h} - \frac{z^n}{h} - n z^{n-1} \right) \right|$$

$$(z+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k$$

$$\overset{\leftarrow}{=} \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-1} \right|$$

$$\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |z|^{n-k} |h|^{k-1}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |z|^{n-k} \delta^{k-2} |h|$$

$$\leq |h| \delta^2 \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| (|z|+\delta)^n$$

$$\leq C|h| \qquad \text{neboť studované mocninné řady konvergují absolutně v bodě } |z|+\delta < R$$

Tedy $R_h \to 0$ pro $h \to 0$ a Věta 6.18 je dokázána. ▨

$\boxed{\text{Věta 6.19}}$ (O jednoznačnosti rozvoje do mocninné řady)

Nechť $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ pro $|z| < \varrho$ a $\varrho > 0$.

Pak $a_m = b_m$ pro $\forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Důkaz Dle předchozí věty i derivované řady pro $|z| < \varrho$ konvergují a platí vztah (*). Tak

$$f^{(k)}(z)\Big|_{z=0} = k!\, a_k = k!\, b_k$$, což implikuje $a_k = b_k$. ▨

$\boxed{\text{Věta 6.20}}$ (Integrace mocninné řady) Nechť $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, a nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ má poloměr konvergence $R > 0$.

Pro $z : |z| < R$ položme $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Pak

$$\underline{F(z)} := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{m+1} z^{m+1} + C \quad \text{je } \underline{\text{primitivní funkce k } f}.$$

Dk Dle Věty 6.19 platí: $(F(z))' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_m}{m+1} z^{m+1} \right)' = \sum_{m=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$. ▨

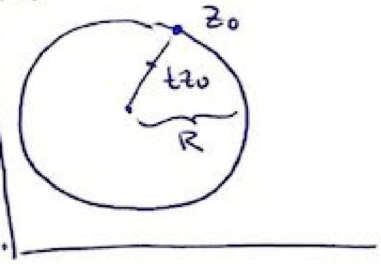
Příklad Víme, že $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ a $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$ pro $|x| < 1$.

Dle předchozí věty tak dostáváme pro $|x| < 1$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Užitečné je i následující tvrzení, které si uvedeme bez důkazu.

$\boxed{\text{Abelova věta}}$ Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ má poloměr konvergence $R \in (0, \infty)$. Pokud pro $z_0 \in \mathbb{C} : |z_0| = R$ řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_0^k$ konverguje, pak je funkce $t \longmapsto f(t z_0)$ spojitá na $\langle 0, 1 \rangle$.



pokračování: pro $x = 1$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ konverguje

tedy $t \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ je spojité na $\langle 0, 1 \rangle$. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \lim_{t \to 1-} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{t \to 1-} \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$