2 PRIMITIVNÍ FUNKCE

Buď $I := (a,b)$ otevřený interval, tj. $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $(a,b) := \{x;\, a<x<b\}$.

Definice (Primitivní fce) Buď $F, f : I \to \mathbb{C}$. Řekneme, že *F je primitivní funkce k f na I* $\overset{df.}{\equiv}$ $(\forall x \in I)$ $F'(x) = f(x)$

- Hledání primitivních funkcí je inverzní operace k derivování. Proto se stále častěji primitivní funkci říká antiderivace.
- Hledání primitivních funkcí znamená řešit úlohu:
  [Pro dané $f : I \to \mathbb{C}$ nalézt $y : I \to \mathbb{C}$ řešící diferenciální rovnici $y' = f$]

Příklad Z věty o exponenciále víme, že $\exp' z = \exp z$.

Tedy funkce e^x řeší rovnici $y' = y$. To je důležité pozorování z alespoň dvou důvodů:

(i) Rce $y' = ky$ má jasný a důležitý (fyzikální) význam: změna veličiny y je rovna k-násobku dané veličiny

Protože $(e^{kx})' = k e^{kx}$ tak $y(x) = e^{kx}$ řeší $y' = ky$

(ii) Invariance exponenciály vzhledem k derivování lze využít k řešení celé třídy diferenciálních rovnic

- Většinou budeme primitivní funkci k f označovat $\int f(x)\,dx$. Důvodem je elegantní manipulace se symbolem $\int f(x)\,dx$, kterému se říká neurčitý integrál f, což je další synonymum pro pojem primitivní fce.

Věta 18 (O (ne)jednoznačnosti primitivní funkce).

(1) Buď F, G primitivní fce k f na I. Pak $(\exists c \in \mathbb{C})(\forall x \in I)$ $\boxed{F(x) = G(x) + c}$

(2) Je-li F primitivní fce k f na I, pak $G = F + c$, kde $c \in \mathbb{C}$ je také primitivní fce k f na I.

Dk Ad (2) Máme dokázat, že $G'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in I$. Avšak $G' = (F+c)' = F' + c' = f + 0 = f$, což jsme chtěli ukázat.

Ad (1) Jsou-li F, G primitivní fce k f na I, pak pro $H := F - G$ platí: $H' = (F-G)' = f - f = 0$. Ukážeme později z Rolleovy věty 4.8 že platí: pokud $H'(x) = 0$ $\forall x \in I$, pak $H(x) = c$, kde $c \in \mathbb{C}$. (H musí být nutně konstantní).

Věta 19 (o spojitosti primitivní fce).

Je-li F primitivní fce k f na I, pak F je spojitá na I.

Dk plyne z Věty 12 a ze skutečnosti, že $F'(x)$ existuje pro $\forall x \in I$ (neboť $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$) ∎

Toto jednoduché tvrzení má významný důsledek*). Mějme I, J dva různé intervaly tak, že $I = (a,b)$ a $J = (b,c)$. Buď f definována na (a,c). Nechť F_I je primitivní fce k f na I a F_J je primitivní fce k f na J.

Protože primitivní fce je určena až na konstantu, tak

$$\boxed{\tilde{F} \overset{df}{=} \begin{cases} F_I & x \in I = (a,b) \\ F_J & x \in J = (b,c) \end{cases}}$$

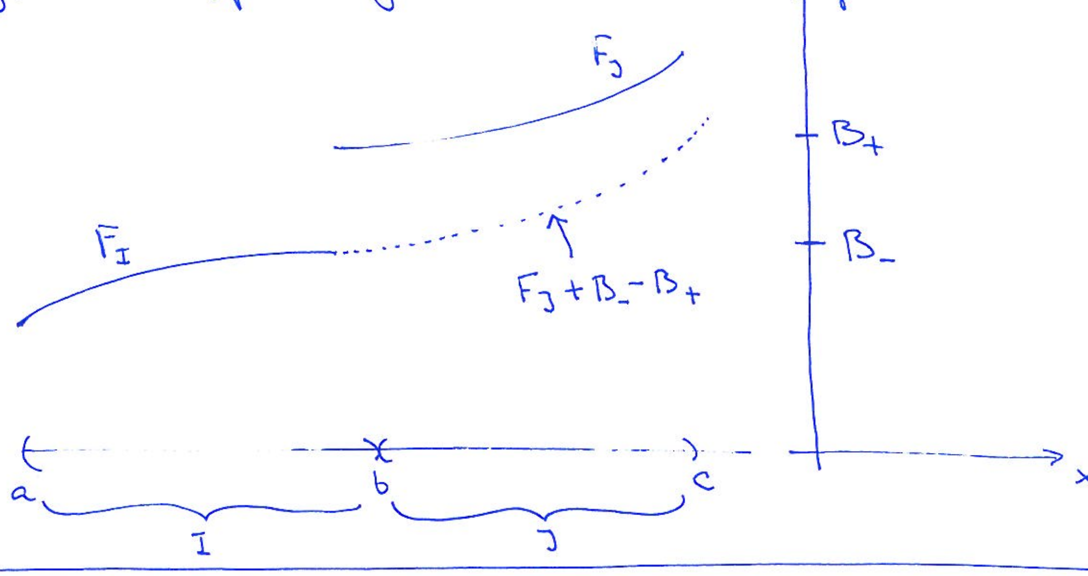
nemusí být primitivní fce k f na (a,c) neboť $\tilde{F}$ může být nespojitá v bodě b. Lze však určit (existují a)

$\lim_{x \to b-} F_I(x)$ a $\lim_{x \to b+} F_J(x)$. Pokud jsou vlastní označme je B_- a B_+. Definujme (viz obrázek)

$$F(x) = \begin{cases} F_I(x) & x \in (a,b) \\ F_J(x) + B_- - B_+ & x \in (b,c) \end{cases}$$

Pak F je spojitá na (a,c). Pokud ukážeme, že $F'(x) = f(x)$ pro $x = b$, pak F je primitivní fce k f na (a,c).

Popsali jsme si způsob jak <u>nalepovat primitivní fce</u>.



*) O NALEPOVÁNÍ PRIMITIVNÍCH FUNKCÍ

$\boxed{\text{Věta 20}}$ Platí následující tabulka základních primitivních funkcí.

(Dk) Dle definici derivováním funkcí v druhém sloupečku dostávám funkce v prvním sloupečku. ▨

Víme: $D_{\ln x} = \mathbb{R}^+$ a $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Avšak $D_{\frac{1}{x}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a tedy $\boxed{\int \frac{1}{x} dx = = \ln|x| + C}$ OVĚŘ!

Tabulka základních primitivních funkcí

POZOR!

f	$F = \int f(x) dx$	Poznámka	Kde
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$	$\mathbb{R}$ pro $n > 0$; $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pro $n < 0$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$(0, \infty)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$		$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
e^x	e^x		$\mathbb{R}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$		$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$		$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotg} x$		$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$		$(-1, 1)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\arccos x$		$(-1, 1)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$-\operatorname{arccotg} x$		$\mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$		$\mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arcsinh} x$		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{sign} x \operatorname{arccosh}\lvert x\rvert$		$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
$(x+a)^m$	$\frac{(x+a)^{m+1}}{m+1} + C$	$m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, $\boxed{a \in \mathbb{C}}$	$x \in \mathbb{R}$ pro $m \geq 0$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ $m < 0$ je-li $a \in \mathbb{R}$

Obecněji:

Důsledky Platí

(α) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

(β) $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ $\forall x \in [-1, 1]$

(Dk) Derivací $\operatorname{arctg} x$ a $-\operatorname{arccotg} x$ dostávám stejnou funkci tedy

$\left[\operatorname{arctg} - (-\operatorname{arccotg} x)\right]' = 0 \Rightarrow \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = C \in \mathbb{R}$ konstanta

Její hodnotu určím např. v $x = 0$:

$\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$.

Podobně postupujeme v případě (β).

▨

Věta 21 (O antiderivování součtu a skalárního násobku fcí).

Buď F, G prim. fce k f resp. g na I, buď $c \in \mathbb{C}$.

Pak
- $F \pm G$ je primitivní fce k $f \pm g$ na I
- cF je —||— cf na I

Dk) Přímo derivováním.

Věta 22 (Integrace per-partes) [duální věta k derivování součinu]

Buď $f, g : I \to \mathbb{C}$. Pak platí

$$(+) \quad \int f'(x) g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x) g'(x)\,dx$$

pokud jedna z primitivních funkcí existuje.

Dk) Předpokládejme nejdříve, že $\int f'(x) g(x)\,dx$ existuje tzn. existuje $H : I \to \mathbb{C}$ tak, že $\boxed{H' = f'g \text{ v } I}$. Tvrdíme, že pak $fg - H$ je primitivní funkce k fg', což je (+).

Avšak

$$(fg - H)' \underset{\uparrow}{=} f'g + fg' - H' \overset{= f'g}{=} fg', \text{ což jsme chtěli ukázat.}$$

věta o derivování součinu

Pokud existuje druhá z primitivních funkcí, tzn. $\exists\, G : I \to \mathbb{C}$ tak, že $\boxed{G' = fg'}$. Pak chceme ukázat, že $fg - G$ je prim. fce k $f'g$ v I.

Avšak: $(fg - G)' = f'g + fg' - G' = f'g$, a jsme hotovi. ∎

Příklady

1. $\boxed{\int x e^x\,dx} = xe^x - \int e^x = \underline{(x-1)e^x + C}$ $\quad (x \to 1,\ e^x \to e^x)$

2. $\boxed{\int \ln x\,dx} = \int 1 \cdot \ln x\,dx = x \ln x - \int dx = \underline{x(\ln x - 1) + C}$ $\quad (1 \to x,\ \ln x \to \frac{1}{x})$

3. $\boxed{\int \sin^n x\,dx}$, $n > 1$

Řešení

$$I_n := \int \sin^n x = \int \sin^{n-1} x \sin x = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos x \ldots$$

$(n-1)\sin^{n-2} x \cos x \qquad -\cos x$

$$\overset{\text{OPIS}}{=} -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1) I_n \implies$$

Tedy $I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + \underline{(n-1) I_{n-2}} - (n-1) I_n$

$$\boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x} \quad \text{kde} \quad \boxed{\begin{array}{l} I_1 = -\cos x \\ I_0 = x \end{array}}$$

∎

$\boxed{\text{Věty o substituci}}$ jsou věty duální k větám o derivování složené funkce a o derivování funkce inverzní.

Vycházíme ze vztahu

$$\boxed{\left(f(\varphi(t))\right)' = f'(\varphi(t))\,\varphi'(t)}$$

Uvedeme dvě schémata.

$\boxed{\text{SCHÉMA I}}$

- Umím nalézt $\int f(x)\,dx$ (tzn. znám F primitivní k f na I)
- Chci nalézt $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$

Postup

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \underset{\substack{x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)\,dt}}{=} \int f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t))$$

ZPĚTNÉ DOSAZENÍ

$\boxed{\text{Věta 23}}$ (1. věta o substituci)

Nechť
- F je primitivní fce k f na $I=(a,b)$,
- $\varphi: (\alpha,\beta) \xrightarrow[\text{do}]{} (a,b)$
- $\exists\, \varphi'(t) \in \mathbb{R}$ pro každé $t \in (\alpha,\beta)$

. Pak $F\circ\varphi$ je primitivní fce k $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na (α,β).

Dk. Protože $(F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$, jsme hned hotovi $\blacksquare$.

$\boxed{\text{SCHÉMA II}}$

- UMÍM NAJÍT ϕ JAKO PRIM. FCI K $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na (α,β)
  tj $\phi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$
- HLEDÁM $\int f(x)\,dx$

Postup

$$\int f(x)\,dx \underset{\substack{x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)\,dt}}{=} \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \phi(t) = \phi(\varphi^{-1}(x)) = (\phi\circ\varphi^{-1})(x)$$

potřebuji inverzní zobrazení k φ
což vyžaduje
$\varphi: (\alpha,\beta) \xrightarrow{\text{na}} (a,b)$ prosté

a protože chci derivovat φ^{-1}, musím mít splněny předpoklady věty o derivování inverzního zobrazení (měli jsme dvě varianty Věta 15 a Věta 15*)

$\boxed{\text{Věta 24}}$ (2. věta o substituci) nechť

(i) Φ je primitivní fce k $(f\circ\varphi)\varphi'$ na (α,β)

(ii) $\varphi : (\alpha,\beta) \xrightarrow{\text{na}} (a,b)$ prostě

(iii) $\varphi'(t) \neq 0$ pro všechna $t \in (\alpha,\beta)$

. Pak $\boxed{\Phi\circ\varphi^{-1} \text{ je primitivní fce k } f \text{ na } (a,b)}$

Dk Chceme ověřit: $(\Phi\circ\varphi^{-1})'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$.

Avšak:

$$(\Phi\circ\varphi^{-1})'(x) = \Phi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' \overset{(i)}{=} f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x)$$

Věta o derivaci složené funkce

$$= f(x)\varphi'(\varphi^{-1}(x))\cdot\frac{1}{\underbrace{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}_{\neq 0}} = f(x).$$

Věta o derivaci inverzní fce

$\boxed{\text{Příklady}}$ (4)-(7) na Schéma I, (8)-(9) na Schéma II.

(4) $$\int \sin x\cos x\,dx \underset{\substack{u=\sin x\\ du=\cos x\,dx}}{\overset{V23}{=}} \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

dosazení

(5) $$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx \underset{\substack{u=g(x)\\ du=g'(x)dx}}{\overset{V23}{=}} \int\frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|g(x)| + C$$

(6) $$\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} \underset{\substack{y=\frac{x}{a}\\ dy=\frac{dx}{a}}}{\overset{V23}{=}} \frac{1}{a}\int\frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} y + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

$\boxed{a>0}$

(7) (a) $$\int \operatorname{arctg} x \overset{\text{per partes}}{=} \int \underset{\downarrow\, x}{1}\ \underset{\downarrow\,\frac{1}{1+x^2}}{\operatorname{arctg} x} = x\operatorname{arctg} x - \int\frac{x\,dx}{1+x^2} \underset{\substack{1+x^2=y\\ 2x\,dx=dy}}{\overset{V23}{=}}$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\frac{1}{y}dy$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

(7) (b) $I_n = \int\frac{1}{(1+x^2)^n}dx$. Integrace per partes.

$$I_n = \int \underset{\downarrow\, x}{1}\ \underset{\downarrow\, -n(1+x^2)^{-n-1}2x}{\frac{dx}{(1+x^2)^n}} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n I_n - 2n I_{n+1}$$

Tedy $\boxed{I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n + \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n}}$

$\boxed{I_1 = \operatorname{arctg} x}$

(8) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

$D_{\sqrt{1-x^2}} = \{x \,;\, |x| \leq 1\}$

$\cos t : [0,\pi] \xrightarrow{\text{na}} [-1,1]$ prostě

$\cos' t = -\sin t < 0$ na $(0,\pi)$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \underset{\substack{x=\cos t \\ dx = -\sin t\,dt \\ t=\arccos x}}{=} -\int \sqrt{\underbrace{1-\cos^2 t}_{\sin^2 t}}\,\sin t\,dt = -\int \sin^2 t$$

$$= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t \cos t \Big|_{t=\arccos x} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\arccos x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C}}$$

Příklad (3)

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \underset{\substack{x=\sinh t \,:\, \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R} \text{ prostě (rostoucí)} \\ dx = \underbrace{\cosh t}_{>0}\,dt}}{=} \int \frac{\cosh t}{\cosh t}\,dt = \int dt$

$= t + C \Big|_{t=\operatorname{arcsinh} x}$

$= \underline{\underline{\operatorname{arcsinh} x + C}}$

$= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C,$

Protože platí $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

což jsem však mohl psát pomocí A tabulky primitivních funkcí a A tabulky derivací.

Integrace racionálních funkcí

[1] Buď $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ daná racionální funkce s $D_R = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\, Q(x) = 0\}$.
P, Q jsou polynomy stupně n resp. m, $n, m \in \mathbb{N}$.

Pokud $\boxed{n \geq m}$, pak $\boxed{R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}}$ kde stupeň $P_2 < m$

Protože P_1 umím integrovat, redukuje se problém integrace $R(x)$ na:

[2] $\boxed{R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad n < m}$ Pak rozlož $Q(x)$ na kořenové činitele

tj.

$$(\star) \quad Q(x) = c(x-\alpha_1)^{r_1} \cdots (x-\alpha_k)^{r_k} (x-\beta_1)^{s_1}(x-\bar{\beta}_1)^{s_1} \cdots \cdots (x-\beta_\ell)^{s_\ell}(x-\bar{\beta}_\ell)^{s_\ell}$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_k$ reálné kořeny, násobnosti $r_1, \dots, r_k$

$\beta_1, \bar{\beta}_1, \dots, \beta_\ell, \bar{\beta}_\ell$ komplexní kořeny, násobnosti $s_1, \dots, s_\ell$

což lze ekvivalentně psát ve tvaru

$$(*) \quad Q(x) = c(x-\alpha_1)^{r_1} \cdots (x-\alpha_k)^{r_k} (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \cdots \cdots (x^2+p_\ell x+q_\ell)^{s_\ell}$$

přičemž $p_i^2 - 4q_i < 0$ pro $i = 1, \dots, \ell$

[3] Proveďme rozklad na parciální zlomky

Platí Tvrzení Je-li $R(x)$ jako v [2] výše, pak lze $R(x)$ přepsat do tvaru konečné sumy výrazů $\frac{A}{(x-\alpha)^N}$ a $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^M}$, přičemž jaké přesně členy budou v sumě se řídí dle těchto pravidel:

(a) Je-li v $(*)$ $(x-\alpha_j)^{r_j}$, pak suma obsahuje

$$\frac{A_1}{x-\alpha_j} + \frac{A_2}{(x-\alpha_j)^2} + \dots + \frac{A_{r_j}}{(x-\alpha_j)^{r_j}}$$

(b) Je-li v $(*)$ $(x^2+p_jx+q_j)^{s_j}$, pak suma obsahuje

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+p_jx+q_j} + \dots + \frac{B_{s_j}x+C_{s_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{s_j}}$$

[4] Najdi primitivní funkce (tj. integruj) k výrazům

$$\frac{A}{(x-\alpha)^N} \quad \text{a} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^M} \qquad N, M \geq 1, \; N, M \in \mathbb{N}.$$

(11) Buď $p, q \in \mathbb{R}$ takové, že $p^2 - 4q < 0$. Pak

$$\boxed{\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx} = \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} + \int \frac{b-\frac{a}{2}p}{x^2+px+q}$$

$$= \frac{a}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(b - \frac{a}{2}p\right)\int \frac{dx}{\underbrace{x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2}_{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{a}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{\left(b-\frac{a}{2}p\right)}{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}\int \frac{dx}{\frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}+1}$$

$$y = \frac{x+\frac{p}{2}}{\underbrace{\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}}_{>0}} \Rightarrow dy = \frac{dx}{\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{a}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{\left(b-\frac{a}{2}q\right)}{\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}}\int \frac{dy}{1+y^2}$$

$$= \boxed{\frac{a}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{\left(b-\frac{a}{2}q\right)}{\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}} + C}$$

(12)
$$\int \frac{x^2+x-1}{x^4+2x^2} = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2x} - \frac{1}{4}\ln(x^2+4) + \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

neboť

$$\frac{x^2+x-1}{x^4+2x^2} = \frac{x^2+x-1}{x^2(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$$

Převodem pravé strany na společného dělitele:

$$x^2+x-1 = Ax(x^2+2) + B(x^2+2) + Cx^3 + Dx^2 \quad (*)$$
$$= Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx^3 + Dx^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} x^0&: & -1 &= 2B & &\Rightarrow B = -\tfrac{1}{2}\\ x^1&: & 1 &= 2A & &\Rightarrow A = \tfrac{1}{2}\\ x^2&: & 1 &= B+D & &\Rightarrow D = \tfrac{3}{2}\\ x^3&: & 0 &= A+C & &\Rightarrow C = -\tfrac{1}{2}\end{aligned}}$$

NEBO

$x=0 \Rightarrow -1 = 2B \Rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{2}}$

$x = i\sqrt{2} \Rightarrow -3 + i\sqrt{2} = -2Ci\sqrt{2} - 2D$

$\boxed{D = \frac{3}{2}}$ a $\boxed{C = -\frac{1}{2}}$

Derivuji (*) a $x=0$:

$2x+1\big|_{x=0} = A(x^2+2)\big|_{x=0}$

$\Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}$

Tedy

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^4+2x^2} = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{x-3}{x^2+2} = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2x} - \frac{1}{4}\ln(x^2+2) + \frac{3\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

Alternativně mohu položit

$$\frac{x^2+x-1}{x^2(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+i\sqrt{2}} + \frac{\overline{C}}{x-i\sqrt{2}}$$

Najdu-li A, B, C, pak problém s integrací posledních dvou členů. Ty musím převést na spol. jmenovatele.

Důležité substituce: převod na racionální funkce

Jsou-li P, Q polynomy $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pak $R := \frac{P}{Q}$ nazveme racionální funkce jedné reálné proměnné, platí $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Obecněji, jsou-li P, Q polynomy dvou reálných proměnných, tj. $P, Q : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, kde $P(x,y) = \sum_{0\le i+j\le n} a_{ij}x^i y^j$ a $Q(x,y) = \sum_{0\le i+j\le m} b_{ij}x^i y^j$, pak $R := \frac{P}{Q}$ nazveme racionální funkce dvou reálných proměnných, platí $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$.

$$\boxed{\text{(I)} \qquad \int \mathrm{R}(\mathrm{e}^{\alpha \mathrm{x}})\mathrm{dx}}$$

Substituce: $y = e^{\alpha x}$, $\quad x \in \mathbb{R}$

Tvar derivace: $dx = \frac{1}{\alpha y}dy$

Výsledek: $\int R(y)\frac{1}{\alpha y}dy$

$$\boxed{\text{(II)} \qquad \int \frac{\mathrm{R}(\ln \mathrm{x})}{\mathrm{x}}\mathrm{dx}}$$

Substituce: $y = \ln x$, $\quad x > 0$

Tvar derivace: $\frac{dx}{x} = dy$

Výsledek: $\int R(y)dy$

$$\boxed{\text{(III)} \qquad \int \mathrm{R}\left(\mathrm{x}, \left(\frac{\mathrm{ax}+\mathrm{b}}{\mathrm{cx}+\mathrm{d}}\right)^{\frac{1}{s}}\right)\mathrm{dx}}$$

Substituce: $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{s}}$

Podmínky: $ad-bc \neq 0$; $\quad s = 2k \implies \frac{ax+b}{cx+d} > 0$, $\quad s = 2k-1 \implies x \neq -\frac{d}{c}$

Inverze: $x = \frac{-dt^s+b}{ct^s-a}$

Tvar derivace: $dx = (ad-bc)s\frac{t^{s-1}}{(ct^s-a)^2}dt$

Výsledek: $(ad-bc)s\int \frac{\hat{R}(t^s,t)t^{s-1}}{(ct^s-a)^2}dt$

$$\boxed{\text{(IV)} \qquad \int \mathrm{R}\left(\mathrm{x}, \sqrt{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}}\right)\mathrm{dx}}$$

Eulerovy substituce

Čtyři netriviální případy (někdy i dva najednou).

1. $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

   Substituce: $t = \left(\frac{x-x_1}{x-x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$ vede k **(III)**

2. $a > 0$

   Substituce: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t \implies x = (t^2-c)/(b-2\sqrt{a}t)$

3. $c > 0$

   Substituce: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + tx \implies x = (2\sqrt{c}t - b)/(a-t^2)$

4. $a \le 0$ a ax^2+bx+c nemá v $\mathbb{R}$ kořen ($\implies c \le 0$): odmocnina není v $\mathbb{R}$ pro žádné x definována.

(V) $\displaystyle\int \mathbf{R}(\cos\mathbf{x}, \sin\mathbf{x})\mathbf{dx}$

`Goniometrické substituce`

Substituce: $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $\quad x \neq \pi + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$

Inverze: $x = 2\operatorname{arctg} y$ $\qquad$ *Tvar derivace:* $dx = \frac{2}{1+y^2}dy$

cosinus: $$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

sinus: $$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2y}{1+y^2}$$

Zjednodušení:

(1) $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x) \implies$ *Substituce:* $y = \sin x$

(2) $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x) \implies$ *Substituce:* $y = \cos x$

(3) $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x) \implies$ *Substituce:* $y = \operatorname{tg} x,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{y^2}{1+y^2}$$

$$\sin x\cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{y}{1+y^2}$$

(VI) $\displaystyle\int \mathbf{x^m(a + bx^n)^p dx}\,, \qquad \mathbf{m, n, p} \in \mathbb{Q}$

`Čebyševovy substituce`

Umíme řešit pomocí elementárních funkcí pouze v následujících třech případech:

(1) $p \in \mathbb{Z}$. Pak položme $m = m'/\ell$, $n = n'/\ell$, kde m', n' a $\ell \in \mathbb{Z}$, $\ell > 0$.

Substituce: $t = x^{\frac{1}{\ell}}$

(2) $(m+1)/n \in \mathbb{Z},\ p = k/s,\ k, s \in \mathbb{Z}$

Substituce: $t = (a + bx^n)^{\frac{1}{s}}$

Inverze: $x = \frac{(t^s - a)^{1/n}}{b^{1/n}}$ $\qquad$ *Tvar derivace:* $dx = \frac{1}{nb^{1/n}}(t^s - a)^{\frac{1}{n}-1}st^{s-1}dt.$

Výsledek: $\int x^m(a + bx^n)^p dx = \int \frac{1}{b^{\frac{m}{n}}}(t^s - a)^{\frac{m}{n}} t^k \frac{1}{nb^{\frac{1}{n}}}(t^s - a)^{\frac{1}{n}-1} st^{s-1}dt$

$= \frac{s}{nb^{\frac{m+1}{n}}} \int t^{s+k-1}(t^s - a)^{\frac{m+1}{n}-1}dt$

(3) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z},\ p = k/s,\ k, s \in \mathbb{Z}$

Substituce: $t = (ax^{-n} + b)^{\frac{1}{s}}$

Inverze: $x = \left(\frac{a}{t^s - b}\right)^{\frac{1}{n}}$ $\qquad$ *Tvar derivace:* $dx = -\frac{a^{1/n}}{n}(t^s - b)^{-\frac{1}{n}-1}st^{s-1}dt$

Výsledek: $\int x^m(a + bx^n)^p dx = \int x^m x^{np}(ax^{-n} + b)^{\frac{k}{s}}dx$

$= \int \left(\frac{a}{t^s - b}\right)^{\frac{m}{n}} t^k \left(\frac{a}{t^s - b}\right)^p \frac{a^{\frac{1}{n}}}{-n}(t^s - b)^{-\frac{1}{n}-1}st^{s-1}dt$

$= -\frac{a^{\frac{m+1}{n}+p}s}{n} \int t^{k+s-1}(t^s - b)^{-(\frac{m+1}{n}+p-1)}dt$

Několik příkladů na výše uvedené substituce

(13) $$I(x)=\int \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1}\,dx = (*)$$

$D_f = \langle -1,1\rangle \setminus \{0\}$

Dle $\boxed{\text{III}}$

$$\boxed{\begin{aligned} & t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad x\in(-1,1) \\ & \frac{1+x}{1-x}=t^2 \iff (1+x)=(1-x)t^2 \\ & x=\frac{t^2-1}{1+t^2} \qquad dx=\frac{2t(1+t^2)-2t(t^2-1)}{(1+t^2)^2}\,dt \\ & \qquad\qquad\qquad\quad\; =\frac{4t}{(1+t^2)^2}\,dt \end{aligned}}$$

$$(*) = \int \frac{t+1}{t-1}\,\frac{4t}{(1+t^2)^2}\,dt =: I(t)\Big|_{t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$$

Postupuji dále dle metody integrace racionálních funkcí.

$$\frac{4t(t+1)}{(t-1)(t^2+1)^2}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+1}+\frac{Dt+E}{(t^2+1)^2}$$

což vede k rovnici

$$4t(t+1) = A(t^2+1)^2+(Bt+C)(t^2+1)(t-1)+(Dt+E)(t-1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} 4t^2+4t = {} & At^4+2t^2A+A+Bt^4-Bt^3+Bt^2-Bt+Ct^3-Ct^2+Ct-C \\ & +Dt^2+Et-Dt-E \end{aligned}}$$

$[t^4]$ $A+B=0 \Rightarrow \boxed{A=-B}$

$[t^3]$ $-B+C=0 \Rightarrow \boxed{C=B}$

$[t^2]$ $2A+B+D=4$

$[t^1]$ $-B+C+E-D=4$

$[t^0]$ $A-C-E=0 \Rightarrow \boxed{E=-2B}$

$$\left.\begin{aligned} -2B+B+D&=4 \\ -B+\cancel{B}-2B-D&=4 \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{-3B=8}$$

$D=4+B$
$=4-\frac{8}{3}$
$=\frac{4}{3}$

Tedy $\boxed{A=\frac{8}{3}}$, $\boxed{B=-\frac{8}{3}}$, $\boxed{C=-\frac{8}{3}}$, $\boxed{D=\frac{4}{3}}$, $\boxed{E=\frac{16}{3}}$

Tak
$$I(t)=\frac{8}{3}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{4}{3}\int\frac{2t}{t^2+1}\,dt-\frac{8}{3}\int\frac{dt}{t^2+1}+\frac{2}{3}\int\frac{2t\,dt}{(t^2+1)^2}+\frac{16}{3}\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}+C.$$

odsud
$$I(x)=\frac{8}{3}\ln\left|\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1\right|-\frac{4}{3}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}+1\right)-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\frac{2}{3}\,\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}+1}$$
$$+\frac{16}{3}\left[\frac{3}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{\frac{1+x}{1-x}+1}\right]+C,$$

kde jsme pro výpočet primitivní fce posledního členu použili řešení příkladu (7.b).

Protože $\frac{1+x}{1-x}+1=\frac{2}{1-x}$ a $\ln\frac{2}{1-x}=\ln 2-\ln(1-x)$ a $-\frac{4}{3}\ln 2$ lze zahrnout do obecné konstanty, dostáváme

$$(*)\quad \boxed{I(x)=\frac{8}{3}\ln\left|\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1\right|+\frac{4}{3}\ln(1-x)-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\frac{1}{3}(1-x)+\frac{2}{3}\sqrt{1-x^2}+C}$$

Toto jsou primitivní fce k f na intervalu $(-1,0)$ a $(0,1)$.

Spočtěme $\lim\limits_{x\to 0\mp} I(x)$. Dostáváme

$$\lim_{x\to 0\pm} I(x)=\frac{8}{3}\underbrace{\lim_{x\to 0\pm}\ln\left|\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1\right|}_{=-\infty}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\underbrace{\operatorname{arctg}1}_{\frac{\pi}{4}}+C=-\infty$$

Tedy $I(x)$ nelze dodefinovat v 0 spojitě. Fce (respektive třída funkcí) daná vzorcem $(*)$ výše je primitivní funkce k f na $(-1,0)\cup(0,1)$, ale $I(x)$ není prim. fcí f na $(-1,1)$.

(14) Najděte $F(x)=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$. Toto je příklad na Eulerovu substituci typu $\boxed{(IV),2.}$. $\quad (D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\})$

Nejdříve totiž pozorujeme, že
$$F(x)=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,\ \text{kde}\ R(x,y)=\frac{1}{x+y}$$
a $ax^2+bx+c=x^2+x+1$. Protože $a=1>0$ a x^2+x+1 nemá reálné kořeny, substituce má tvar
$$\boxed{\sqrt{x^2+x+1}=-x+t}$$

Odsud
$$x^2+x+1=x^2-2xt+t^2\Rightarrow x(1+2t)=t^2-1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\boxed{x=\frac{t^2-1}{1+2t}}\Rightarrow\boxed{dx=\frac{2t(1+2t)-2(t^2-1)}{(1+2t)^2}dt=\frac{2(t^2+t+1)}{(1+2t)^2}dt}$$

Po dosazení: $F(x)=2\int\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}dt \quad \boxed{t=x+\sqrt{x^2+x+1}}$

Protože
$$\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1+2t}+\frac{C}{(1+2t)^2}\Rightarrow t^2+t+1=A+4At+4At^2+Bt+2Bt^2+Ct$$

t^2: $1=4A+2B$
t^1: $1=4A+B+C$
t^0: $1=A$

$\Rightarrow \boxed{A=1}$, $\boxed{B=-3/2}$, $\boxed{C=-3/2}$

tak
$$\boxed{F(x)=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|1+2t|+\frac{3}{2}\frac{1}{1+2t}+C,\ \text{kde}\ t=x+\sqrt{x^2+x+1}}.$$

(15 a) $\boxed{\text{Spočtěte } F(x) = \int \frac{dx}{\sin^m x} \text{ na } (0,\pi).}$

Metoda 1. Protože jde o případ $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$, lze vždy použít substituci $\boxed{y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}}$

Protože
$$\sin x = \frac{\sin 2(\frac{x}{2})}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}$$

a $\boxed{x = 2\operatorname{arctg} y} \Rightarrow \boxed{dx = \frac{2}{1+y^2}dy}$

dostáváme
$$F(x) = 2\int \frac{dy}{1+y^2}\left(\frac{y^2+1}{2y}\right)^m = \frac{1}{2^{m-1}}\int \frac{(y^2+1)^{m-1}}{y^m}dy$$
$$= \frac{1}{2^{m-1}}\int \frac{1}{y^m}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}y^{2k}dy = \frac{1}{2^{m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}\int y^{2k-m}dy$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2^{m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}\frac{y^{2k-m+1}}{2k-m+1} + C & \boxed{(m \text{ sudé})} \\ \frac{1}{2^{m-1}}\sum_{\substack{k=0\\k\neq\frac{m-1}{2}}}^{m-1}\binom{m-1}{k}\frac{y^{2k-m+1}}{2k-m+1} + \binom{m-1}{\frac{m-1}{2}}\ln|y| + C & \boxed{(m \text{ liché})}\end{cases} \quad \text{a } y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

Metoda 2. Všimnuli si, že v našem případě platí pro m liché
$$R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$$
tak lze, pro m liché, postupovat pomocí substituce $\boxed{y = \cos x}$. Pak $\boxed{dy = -\sin x\,dx}$. Polož $m = 2N-1$. Protože $\frac{1}{\sin^{2N-1}} = \frac{\sin x}{\sin^{2N} x} = \frac{\sin x}{(1-\cos^2 x)^N}$, tak $F(x) = -\int\frac{dy}{(1-y^2)^m}$ což umíme v principu integrovat rozkladem na parciální zlomky.

(16) Určete $F(x) = \int \sqrt{1-\sin 2x}$ na $\mathbb{R}$.

Řešení: Protože $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$ a $\sin 2x = -2\cos x\sin x$, tak
$$1 - \sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$$
Protože $\sqrt{y^2} = y \operatorname{sgn} y = |y|$

tak
$$F(x) = \int (\cos x - \sin x)\operatorname{sgn}(\cos x - \sin x)\,dx = \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x) + C$$

Protože $\operatorname{sgn} y$ je nespojitá v 0 a primitivní funkce musí být spojitá na $\mathbb{R}$, není poslední rovnost správné/hledané řešení.

Protože $\cos x - \sin x \geq 0$ na $\left(\frac{\pi}{4}-\pi+2k\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi\right) = \left(\frac{\pi}{4}+(2k-1)\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$

a $\cos x - \sin x < 0$ na $\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{5\pi}{4}+2k\pi\right) = \left(\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi\right)$

Máme pro $k=0$

$$F(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x + C_0 & \text{na } \left(\frac{\pi}{4}-\pi, \frac{\pi}{4}\right) \\ -(\sin x + \cos x) + C_1 & \text{na } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}+\pi\right) \end{cases}$$

Protože

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-} F(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}+} F(x) \iff \sqrt{2}+C_0 = -\sqrt{2}+C_1$$

tak $F(x)$ bude spojitá na $\left(\frac{\pi}{4}-\pi, \frac{\pi}{4}+\pi\right)$ pokud $C_1 = 2\sqrt{2}+C_0$

S touto volbou C_1 navíc platí

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{4}+\pi)-} F(x) - \lim_{x\to(\frac{\pi}{4}-\pi)+} F(x) = \sqrt{2} + \underbrace{2\sqrt{2}+C_0}_{C_1} - (-\sqrt{2}+C_0) = 3\sqrt{2}$$

Tedy

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x + (2k+1)\sqrt{2} + C_0 & \text{na } \left(\frac{\pi}{4}-\pi+2k\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi\right) \\ -(\sin x + \cos x) + (2k+1)\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + C_0 & \text{na } \left(\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi\right) \end{cases}}$$

(17) Najděte $F(x) = \int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$ na $(0, 2\pi)$ respektive na $\mathbb{R}$

Řešení: Protože $R(\cos x, \sin x) = R(-\cos x, -\sin x)$, lze použít jako substituci $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ na $(-\pi, \pi)$ či $y = \operatorname{tg} x$ na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ani jedna z těchto voleb nepokrývá celý interval $(0, 2\pi)$. [Mohli bychom však použít $y = \operatorname{cotg}\frac{x}{2}$ na $(0, 2\pi)$.]

Použijeme $\boxed{y = \operatorname{tg} x}$. Pak $\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{1} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

a $\boxed{x = \operatorname{arctg} y}$. Tedy $dx = \frac{1}{1+y^2}dy$. Odtud

$$F(x) = \int \frac{dy}{1+y^2}\,\frac{1+y^2}{4+y^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dy}{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2} + C \quad \text{na } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Hledané primitivní funkce na $(0, \pi)$ je: $\begin{cases} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2} & \text{na } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2} + C & \text{na } \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$

kde C určím z podmínky $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} F(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} F(x) \Rightarrow \underline{\underline{C = \frac{\pi}{2}}}$

Tedy $\boxed{\text{na } \mathbb{R}}$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2} & \text{na } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2} + k\frac{\pi}{2} & \text{na } \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right) \; k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$