Řešení vybraných příkladů
6. sada

c) Vyšetřete konvergenci řady

(1)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}.$$

Řesení: Je zřejmé, že řada (1) nekonverguje absolutně (víme, že harmonická řada diveguje k $+\infty$), stačí tedy určit zda konverguje neabsolutně. Označme

$$a_n = \frac{1}{\ln n}, \quad b_n = \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\ln n}{n}, \ n = 1, 2\cdots$$

Máme tedy rozhodnout, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$. Zřejmě $a_n \searrow 0$ pro $n \to +\infty$, tj. a_n je nerostoucí posloupnost, která konverguje k nule. K tomu, abychom mohli použít Dirichletovo kritérium potřebujeme ukázat, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ má omezené částečné součty. Označme její n-tý částečný součet jako Σ_n.

Nyní si všimneme, že $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ je tvaru:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\ln 1}{1} - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3}\\
&\quad+\frac{\ln 4}{4} + \frac{\ln 5}{5} + \frac{\ln 6}{6} + \frac{\ln 7}{7} + \frac{\ln 8}{8}\\
&\quad\quad-\frac{\ln 9}{9} - \cdots\\
&\quad\quad\quad\cdots - \frac{\ln((2n)^2-1)}{(2n)^2-1}\\
&+\frac{\ln((2n)^2)}{(2n)^2} + \cdots + \frac{\ln((2n+1)^2-1)}{(2n+1)^2-1}\\
&\quad-\frac{\ln((2n+1)^2)}{(2n+1)^2} - \cdots - \frac{\ln((2n+2)^2-1)}{(2n+2)^2-1}\\
&\quad\quad+\frac{\ln((2n+2)^2)}{(2n+2)^2} + \cdots
\end{aligned}$$

Jelikož $\frac{\ln x}{x}$ je klesající pro $x > e$, pak pro sudé přirozené číslo n platí

$$\begin{aligned}
b_{n^2} > b_{n^2+1} > \cdots > b_{(n+1)^2-1} > 0,\\
b_{(n+1)^2} < b_{(n+1)^2+1} < \cdots < b_{(n+2)^2-1} < 0.
\end{aligned}$$

Jestliže nyní ukážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ je splněno:

(2)
$$|b_{n^2}| + \cdots + |b_{(n+1)^2-1}| \geq |b_{(n+1)^2}| + \cdots + |b_{(n+2)^2-1}|,$$

pak podobně jako v důkazu Leibnizova kritéria dostaneme, že pro n sudé

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{n^2-1} < \Sigma_{n^2} < \Sigma_{n^2+1} < \cdots < \Sigma_{(n+1)^2-1},\\
&\Sigma_{(n+1)^2-1} > \Sigma_{(n+1)^2} > \Sigma_{(n+1)^2+1} > \cdots > \Sigma_{(n+2)^2-1},\\
&\Sigma_{n^2-1} \leq \Sigma_{(n+2)^2-1},\ \Sigma_{(n+1)^2-1} \geq \Sigma_{(n+3)^2-1}.
\end{aligned}$$

Tato sada nerovností ale nutně znamená, že posloupnost $\{\Sigma_n\}_{n=3}^{+\infty}$ je zdola omezená Σ_3 a shora omezená Σ_8. Pak už je ale omezená celá posloupnost $\{\Sigma_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Zbývá tedy dokázat nerovnost (2) pro libovolné $n \geq 2$, to jest:

$$\frac{\ln(n^2)}{n^2} + \cdots + \frac{\ln((n+1)^2-1)}{(n+1)^2-1} \geq \frac{\ln((n+1)^2)}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{\ln((n+2)^2-1)}{(n+2)^2-1}.$$

K důkazu (2) použijeme

Lemma 1. [1] *Nechť f je kladná spojitá nerostoucí funkce na $[\ell,+\infty)$, kde $\ell\in\mathbb{N}$. Pak pro $m\in\mathbb{N},\ m>\ell$ platí*

$$f(\ell+1)+f(\ell+2)+\cdots+f(m)\le\int_\ell^m f(x)\ dx\le f(\ell)+f(\ell+1)+\cdots+f(m-1).$$

Funkce $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ splňuje předpoklady Lemmatu 1. na $[3,+\infty]$ a dává odhady:

$$\begin{aligned}\frac{\ln((n+1)^2)}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{\ln((n+2)^2-1)}{(n+2)^2-1}&\le\int_{(n+1)^2-1}^{(n+2)^2-1}\frac{\ln x}{x}\ dx\\&=\frac{1}{2}[\ln^2 x]_{(n+1)^2-1}^{(n+2)^2-1}\\&=\frac{1}{2}\big(\ln^2((n+2)^2-1)-\ln^2((n+1)^2-1)\big),\\&=\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{(n+2)^2-1}{(n+1)^2-1}\right)\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\frac{\ln(n^2)}{n^2}+\cdots+\frac{\ln((n+1)^2-1)}{(n+1)^2-1}&\ge\int_{n^2}^{(n+1)^2}\frac{\ln x}{x}\ dx\\&=\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Jelikož $\ln^2$ je rostoucí na $[3,+\infty]$, pak k ověření (2) zbývá dokázat:

(3) $$\frac{(n+1)^2}{n^2}\ge\frac{(n+2)^2-1}{(n+1)^2-1}.$$

To je ale nyní již snadné, neboť ekvivalentními úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned}((n+1)^2-1)(n+1)^2&\ge n^2((n+2)^2-1)\\(n+1)^4-(n+1)^2&\ge n^2(n^2+4n+3)\\n^4+4n^3+6n^2+4n+1-n^2-2n-1&\ge n^4+4n^3+3n^2\\5n^2+2n&\ge 3n^2.\end{aligned}$$

Poslední nerovnost evidentně platí. Tudíž platí i (3). Tím je tento poněkud zdlouhavější příklad hotov.

f) Vyšetřete konvergenci řady

(4) $$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

Řesení: Porovnáním s řadou $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ vidíme, že řada (4) nekonverguje absolutně. Označme n-tý člen řady jako a_n. Potom

$$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}=\frac{(-1)^n\sqrt{n}-1}{n-1}=\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1}.$$

Položme

$$b_n:=\frac{\sqrt{n}}{n-1},\ c_n=\frac{1}{n-1},\ n=2,3,\cdots.$$

[1] Lemma 1. se jednoduše dokáže ze základní vlastnosti Riemannova integrálu

$$\int_\ell^m f(x)\ dx=\sum_{i=\ell}^{m-1}\int_i^{i+1}f(x)\ dx.$$

Pak už stačí pro $i=\ell,\cdots,m-1$ sečíst triviální odhady

$$f(i)\le\int_i^{i+1}f(x)\ dx\le f(i+1),$$

které okamžitě plynou z monotonie funkce f.

Uvažme ještě funkci

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1},\ x \in (1, +\infty).$$

Platí

$$f'(x) = -\frac{1+x}{2(x-1)^2\sqrt{x}} < 0, \quad x \in (1, +\infty)$$

Vidíme, že $f(n) = b_n \searrow 0$ pro $n \to +\infty$. Dále $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n$ má omezené částečné součty, z Dirichletova kritéria tedy plyne, že řada $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n b_n$ konverguje se součtem $S \in \mathbb{R}$. Na druhou stranu $\sum_{n=2}^{+\infty} c_n = +\infty$. To znamená, že

$$\sum_{n=2}^{N} a_n = \sum_{n=2}^{N}(-1)^n b_n - \sum_{n=2}^{N} c_n \to S - \infty = -\infty,\ N \to +\infty.$$

Řada (4) tedy nekonverguje.

i) Vyšetřete konvergenci řady

(5)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}).$$

Řesení: Je jasné, že pro $k = 0$ je součet řady (5) roven nule. Nechť dále $k \neq 0$. Platí

$$\begin{aligned}
\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}) &= \sin\left(\pi n\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right)\\
&= \sin\left(\pi n\big(1+\frac{k^2}{2n^2}+O(n^{-4})\big)\right)\\
&= \sin\left(\pi n+\pi\frac{k^2}{2n}+O(n^{-3})\big)\right)\\
&= \sin(\pi n)\cos\big(\pi\frac{k^2}{2n}+O(n^{-3})\big)+\cos(\pi n)\sin\big(\pi\frac{k^2}{2n}+O(n^{-3})\big)\\
&= (-1)^n\sin\big(\pi\frac{k^2}{2n}+O(n^{-3})\big)\\
&= (-1)^n\pi\frac{k^2}{2n}+O(n^{-3}),\ n \to +\infty.
\end{aligned}$$

To znamená, že

$$\begin{aligned}
|\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})| &= |(-1)^n\pi\frac{k^2}{2n}+O(n^{-3})|\\
&= \sqrt{\big((-1)^n\pi\frac{k^2}{2n}+O(n^{-3})\big)^2}\\
&= \sqrt{(\pi^2\frac{k^4}{4n^2}+O(n^{-4}))}\\
&= \sqrt{\pi^2\frac{k^4}{4n^2}(1+\frac{4n^2}{\pi^2k^4}O(n^{-4}))}\\
&= \pi\frac{k^2}{2n}\sqrt{1+O(n^{-2}))}\\
&= \pi\frac{k^2}{2n}(1+O(n^{-2}))\\
&= \pi\frac{k^2}{2n}+O(n^{-3}),\ n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Ukázali jsme, že

$$|\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})| \cong \pi\frac{k^2}{2n},\ n \to +\infty.$$

Jelikož harmonická řada diverguje, pak řada (5) nekonverguje absolutně pro $k \neq 0$.

Zbývá rozhodnout, zda řada (5) konverguje neabsolutně. K tomu nám výše uvedené odhady nestačí, neboť (5) nemá kladné členy. Výše jsme nicméně ukázali, že

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}) = (-1)^n \pi \frac{k^2}{2n} + O(n^{-3}),\ n \to +\infty.$$

Členy tvaru $O(n^{-3})$ konvergují pro $n \to +\infty$ k nule mnohem rychleji než členy $(-1)^n \pi \frac{k^2}{2n}$. To vede k domněnce, že pro n velké se řada (5) chová jako alternující řada s členy $(-1)^n \frac{\pi k^2}{2n}$. Položme

$$a_n := (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}).$$

Pak víme, že $a_n \to 0$ pro $n \to +\infty$ a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}).$$

Jestliže ukážeme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

(6) $$n \geq n_0 \Rightarrow a_n > a_{n+1} > 0,$$

pak z Leibnizova kritéria plyne konvergence řady

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n a_n.$$

Pak už ale musí konvergovat i

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n,$$

což je totéž jako konvergence studované řady (5). Zbývá ověřit podmínku (6). Máme

$$\begin{aligned} a_n = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}) &= \cos(\pi n)\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}) \\ &= \sin\left(\pi(n + n\sqrt{n^2+k^2})\right) \\ &= \sin\left(\pi(n + \sqrt{n^2+k^2}) - 2\pi n\right) \\ &= \sin\left(\pi(\sqrt{n^2+k^2} - n)\right). \end{aligned}$$

Uvažujme nyní funkci $g(x) = \sqrt{x^2+k^2} - x,\ x > 0$. Je jednoduché ověřit, že

- $g > 0$ pro $x > 0$,
- $g(x) < \frac{1}{2}$ pro $x > k^2 - \frac{1}{4}$,
- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ a
- $$g'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+k^2}}{\sqrt{x^2+k^2}} < 0,\ x > 0.$$

Zde stále předpokládáme $k \neq 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $n_0 > k^2 - \frac{1}{4}$, pak pro $n \geq n_0$ platí

$$0 < \pi(\sqrt{n^2+k^2} - n) < \pi/2$$

a

$$0 < \sin(\pi(\sqrt{n^2+k^2} - n)) < 1.$$

Jelikož g je klesající na $(0, +\infty)$ a sin je rostoucí na $(0, \frac{\pi}{2})$, pak $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je nutně klesající od indexu n_0. Tím je příklad hotov.

m) Vyšetřete konvergenci řady

(7) $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, \frac{\sin^2 n}{n}.$$

Řesení: Platí

$$a_n := \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1 - \cos 2n}{2n},\ n = 1, 2, \cdots$$

a tedy

(8)
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\cos(2n)}{n}.$$

Z Dirichletova kritéria plyne, že řada konverguje

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{2n}.$$

Skutečně, $\frac{1}{2n} \searrow 0$ pro $n \to +\infty$ a $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ má omezené částečné součty. Jelikož $\frac{1}{n} \searrow 0$ pro $n \to +\infty$, pak i řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\cos(2n)}{n}$$

konverguje, jestliže ukážeme, že $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cos(2n)$ má omezené částečné součty. Počítejme:

$$(-1)^n \cos(2n) = \cos(\pi n)\cos(2n) = \cos(n(\pi + 2)).$$

Stačí tedy ukázat, že $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n(\pi + 2))$ má omezené částečné součty. Toto si dokážeme v Lemmatu 2 na konci příkladu. Tedy řada (8) konverguje.

Na druhou stranu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n)}{n}.$$

První řada napravo má součet $+\infty$, zatímco druhá z Dirichletova kritéria konverguje k nějakému $A \in \mathbb{R}$ (ukáže se podobně jako pro $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\cos(2n)}{n}$, sami si doplňte detaily). Tudíž

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = +\infty - A = +\infty.$$

Závěr: řada (8) konverguje neabsolutně.

Lemma 2. *Platí*

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \cos(\frac{nx}{2})\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$
$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \sin(\frac{nx}{2})\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$

kde $x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. *Speciálně, obě řady jsou v absolutní hodnotě shora odhadnuty* $\frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$.

K důkazu budeme potřebovat následující vztahy

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,\ \cos(x) = \Re(e^{ix}),\ \sin x = \Im(e^{ix}) = (e^{ix} - e^{-ix})/2i,\ x \in \mathbb{R},$$

kde $\Re$, resp. $\Im$ značí reálnou, resp. imaginární část komplexního čísla. Položme dále $q = e^{ix},\ x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Pak Moivreova věta dává $q^n = e^{inx},\ n \in \mathbb{N}$. Tento vztah ale platí pro každé $n \in \mathbb{R}$. Dále platí

$e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)},\ x, y \in \mathbb{R}$. Tudíž

$$\begin{aligned}1 + q + q^2 + \cdots + q^n &= (1 + q + q^2 + \cdots + q^n)\frac{q-1}{q-1} \\ &= \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \\ &= \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\frac{q^{-\frac{1}{2}}}{q^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{q^{n+\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{q^{\frac{n}{2}}(q^{\frac{n+1}{2}} - q^{-\frac{n+1}{2}})}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{q^{\frac{n}{2}}\frac{q^{\frac{n+1}{2}} - q^{-\frac{n+1}{2}}}{2i}}{\frac{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{2i}} \\ &= (\cos(\frac{nx}{2}) + i\sin(\frac{nx}{2}))\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}.\end{aligned}$$

Všimněte si, že $q \neq 1$ pro $x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Dokazované vztahy se pak dostanou porovnáním reálné a imaginární části právě rozepsané rovnosti.

s) Vyšetřete konvergenci řady

(9) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi/4)}{\sin(n\pi/4) + n^p}.$$

Řesení: Označme $a_n := \sin(n\pi/4),\ n = 1, 2, \cdots$. Pak

$$a_n = \begin{cases} 0,\ n = 0 \mod 4, \\ \pm 1,\ n = \pm 2 \mod 8, \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ n = \pm 1, \pm 3 \mod 8. \end{cases}$$

Zde $\mod m$ značí zbytek po dělení m. Dále

(10) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_n + n^p} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_n + n^p}\frac{n^p - a_n}{n^p - a_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-a_n^2}{n^{2p} - a_n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n n^p}{n^{2p} - a_n^2}.$$

Nejprve uvažujme první řadu na pravé straně. Úpravou dostaneme

(11) $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2}{n^{2p} - a_n^2} &= \frac{\frac{1}{2}}{1^{2p} - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{2p} - 1} + \frac{\frac{1}{2}}{3^{2p} - \frac{1}{2}} + 0 \\ &+ \frac{\frac{1}{2}}{5^{2p} - \frac{1}{2}} + \frac{1}{6^{2p} - 1} + \frac{\frac{1}{2}}{7^{2p} - \frac{1}{2}} + 0 + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n-2)^{2p} - 1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}}{(4n-1)^{2p} - \frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}}{(4n-3)^{2p} - \frac{1}{2}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n-2)^{2p} - 1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}}{(2n-1)^{2p} - \frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Z limitního srovnávacího kritéria plyne, že obě řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n-2)^{2p} - 1},\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}}{(2n-1)^{2p} - \frac{1}{2}}$$

konvergují právě tehdy, když $2p > 1$, tj. $p > \frac{1}{2}$.

Pro druhou řadu platí

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n n^p}{n^{2p}-a_n^2} &= \frac{\frac{1^p}{\sqrt{2}}}{1^{2p}-\frac{1}{2}}+\frac{2^p}{2^{2p}-1}+\frac{\frac{3^p}{\sqrt{2}}}{3^{2p}-\frac{1}{2}}+0\\ &\quad -\frac{\frac{5^p}{\sqrt{2}}}{5^{2p}-\frac{1}{2}}-\frac{6^p}{6^{2p}-1}-\frac{\frac{7^p}{\sqrt{2}}}{7^{2p}-\frac{1}{2}}+0+\cdots\\ &=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(4n-2)^p}{(4n-2)^{2p}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(4n-1)^p}{(4n-1)^{2p}-\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(4n-3)^p}{(4n-3)^{2p}-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Z limitního srovnávacího kritéria plyne, že tyto tři řady na pravé straně konvergují absolutně právě tehdy, když $p > 1$. Řada (10) tedy konverguje absolutně právě tehdy, když $p > 1$.

Zbývá určit pro která p řada (10) konverguje. Je-li

$$b_n := \frac{n^p}{n^{2p}-1},\ n = 2, 3, \cdots$$

pak $b_n \to 0$ pro $n \to +\infty$ právě tehdy, když $p > 0$. Navíc posloupnost je klesající (což plyne ze znaménka derivace funkce $\frac{x^p}{x^{2p}-1}$, $x > 1$). Z Dirichletova kritéria plyne, že řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(4n-2)^p}{(4n-2)^{2p}-1}$$

konverguje pro $p > 0$. Je-li $p \le 0$, pak řada nekonverguje. Stejný postup i závěry platí i pro řady

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(4n-1)^p}{(4n-1)^{2p}-\frac{1}{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(4n-3)^p}{(4n-3)^{2p}-\frac{1}{2}}.$$

Připomeňme, že (11) konverguje jen pro $p > 1/2$. Tudíž i řada (10) konverguje pro $p > 1/2$.

Závěr: řada (10) konverguje absolutně pro $p > 1$, pro $1 \ge p > \frac{1}{2}$ konverguje neabsolutně a jinak nekonverguje.