§8 FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

8.1 Prostor $\mathbb{R}^d$

Buď $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$. Prostorem $\mathbb{R}^d$ rozumíme všechny možné d-tice reálných čísel, tzn.

$$\mathbb{R}^d := \{(x_1, \dots, x_d);\ x_i \in \mathbb{R} \text{ pro } i = 1, 2, \dots, d\}.$$

Prvky $\mathbb{R}^d$ se buď značí tučně $\mathbf{x}$, nebo se šipkou $\vec{x}$, nebo s vlnovkou $\underset{\sim}{x}$, nebo se píše $x = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ či $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Víme z LA, že $\mathbb{R}^d$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$, kde

- $\vec{x} + \vec{y} \overset{df}{=} (x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d)$ pro $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$, $x = (x_1, \dots, x_d)$, $y = (y_1, \dots, y_d)$
- $\lambda \vec{x} \overset{df}{=} (\lambda x_1, \dots, \lambda x_d)$

Tak $(\mathbb{R}^d, +)$ je Abelova grupa s nulovým prvkem $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Na rozdíl od $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$, na $\mathbb{R}^d$ není definován součin, který by z $\mathbb{R}^d$ vytvořil těleso.

"Jistým" zobecněním součinu na $\mathbb{R}$ je skalární součin $\vec{x} \cdot \vec{y}$, který však $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$ nepřiřadí prvek z $\mathbb{R}^d$, ale číslo.

Def. Buď $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$, pak $\sum_{i=1}^{d} x_i y_i$ se nazývá skalární součin $\vec{x}$ a $\vec{y}$.

Píšeme
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Einsteinova} \\ \text{sumační konvence}}}{=} x_i y_i \qquad \text{či} \qquad (\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$$

Věta 8.1 (Vlastnosti skalárního součinu) Platí:

(S1) Pro každé $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ a $\vec{y} \in \mathbb{R}^d$ a pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$$(\alpha \vec{x}_1 + \beta \vec{x}_2, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}_1, \vec{y}) + \beta(\vec{x}_2, \vec{y})$$ LINEARITA

(S2) Pro každé $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^d$:
$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{x}_2, \vec{x}_1)$$ SYMETRIE

(S3) Pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$: $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$
a $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = 0$

Dk plyne přímo z definice. ∎

Definujme zobrazení $|\cdot|_E : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+_0$ předpisem

$$\underbrace{|\vec{x}|_E = \sqrt{(\vec{x},\vec{x})} = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}} = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)^{1/2}}$$

euklidovská

norma indukovaná skalárním součinem

Platí:

$\boxed{\text{Věta 8.2}}$ ($|\cdot|_E$ splňuje vlastnosti normy) Platí:

(N1) $|\vec{x}|_E \geq 0$ pro $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^d$ a $|\vec{x}|_E = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$ $\boxed{\text{NEZÁPORNOST NORMY}}$

(N2) Pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R}$ a $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$: $|\lambda\vec{x}|_E = |\lambda|\,|\vec{x}|_E$ $\boxed{\text{1-HOMOGENITA}}$

(N3) Pro každé $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^d$: $|\vec{x}+\vec{y}|_E \leq |\vec{x}|_E + |\vec{y}|_E$ $\boxed{\Delta\text{-NEROVNOST}}$

Také platí Cauchy-Schwarzova nerovnost:

(C-S) Pro každé $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^d$: $|(\vec{x},\vec{y})| \leq |\vec{x}|_E\,|\vec{y}|_E$
přičemž rovnost nastane právě když $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou LZ.

lineárně závislé

Dk • (N1) a (N2) plyne z definice $(\vec{x},\vec{y})$ a (S3).

• $\boxed{\text{Ad (C-S)}}$ • Je-li $\vec{y} = \vec{0}$, pak $(\vec{x},\vec{0}) = (\vec{x},\vec{0}+\vec{0}) = (\vec{x},\vec{0}) + (\vec{x},\vec{0})$
a tak $(\vec{x},\vec{0}) = 0$.

Tedy (C-S) platí pro $\vec{y} = \vec{0}$.

• Je-li $\vec{y} \neq 0$, pak $|\vec{y}|_E \neq 0$ a máme pro $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^d$ libovolné:

(♣) $0 \leq (\vec{x}+t\vec{y}, \vec{x}+t\vec{y}) = |\vec{x}|_E^2 + 2t(\vec{x},\vec{y}) + t^2|\vec{y}|_E^2 = f(t)$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{(\vec{x},\vec{y})}{|\vec{y}|^2}$ a pro toto t dostáváme z (♣):

$$0 \leq |\vec{x}|_E^2 - \frac{2(\vec{x},\vec{y})^2}{|\vec{y}|^2} + \frac{(\vec{x},\vec{y})^2}{|\vec{y}|^2} = |\vec{x}|_E^2 - \frac{(\vec{x},\vec{y})^2}{|\vec{y}|_E^2}$$

což dává (C-S).

Jsou-li $\vec{x}$ a $\vec{y}$ lineárně nezávislé, pak $\vec{x}+t\vec{y} \neq 0$, a první nerovnost v (♣) je ostrá. Jsou-li naopak $\vec{x}$ a $\vec{y}$ lineárně závislé, pak $\vec{x} = s\vec{y}$ a

$$|(\vec{x},\vec{y})| = |(s\vec{y},\vec{y})| = |s|(\vec{y},\vec{y}) = |s|\,|\vec{y}|_E^2 = |s|\,|\vec{y}|_E\,|\vec{y}|_E = |s\vec{y}|_E\,|\vec{y}|_E = |\vec{x}|_E\,|\vec{y}|_E,$$

a rovnost v (C-S) platí.

- zbývá dokázat Δ-nerovnost. Využijeme-li (C-S) nerovnost, máme

$$|\vec{x}+\vec{y}|_E^2 = (\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) = (\vec{x},\vec{x}) + 2(\vec{x},\vec{y}) + (\vec{y},\vec{y})$$
$$\underset{C-S}{\leq} |\vec{x}|_E^2 + 2|\vec{x}|_E|\vec{y}|_E + |\vec{y}|_E^2$$
$$= \left(|\vec{x}|_E + |\vec{y}|_E\right)^2,$$

což dává (N3).

<u>Pozorování</u> ① Ukažte, že skalární součin v $\mathbb{R}^d$ je invariantní vzhledem k otočení (reprezentovaný ortogonální maticí $\mathbb{Q}$, splňující $\mathbb{Q}\mathbb{Q}^T = \mathbb{I}$).

<u>Řešení</u> Pro $\vec{x}^* = \mathbb{Q}\vec{x}$, $\vec{y}^* = \mathbb{Q}\vec{y}$ platí:

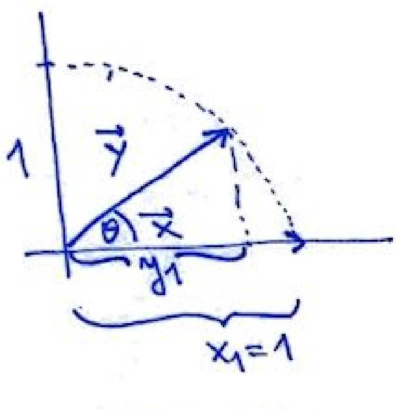
$$(\vec{x}^*,\vec{y}^*) = (\mathbb{Q}\vec{x},\mathbb{Q}\vec{y}) = \sum_{i=1}^{d} \underbrace{Q_{is}x_s}\,\underbrace{Q_{ik}y_k}$$

sumační konvence (sčítání přes s, k od 1 do d)

$$\underset{\text{definice transponované matice}}{=} \sum_{i=1}^{d} (\mathbb{Q}^T)_{si}\,\mathbb{Q}_{ik}\,y_k x_s$$
$$\underset{\mathbb{Q}^T\mathbb{Q}=\mathbb{I}}{=} \delta_{sk}\,y_k x_s = \sum_{k=1}^{d} y_k x_k$$
$$= (\vec{x},\vec{y}).$$

② Buď $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^d$, $|\vec{x}|_E = |\vec{y}|_E = 1$. Pak vhodným pootočením lze ztotožnit $\vec{x}$ s vektorem $(1,0,\dots,0)$ a vektor $\vec{y}$ umístit do roviny dané vektory $(1,0,\dots,0)$ a $(0,0,\dots,1)$.

Pak (viz obrázek)
$$\vec{x}\cdot\vec{y} = y_1 = \cos\theta,$$
kde θ je úhel sevřený mezi vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$.



Pro libovolné $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^d$, pak

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|_E}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|_E} = \cos\theta, \text{ což implikuje}$$

$$(\vec{u},\vec{v}) = \cos\theta\,|\vec{u}|_E\,|\vec{v}|_E.$$

viz Pozorování ①

Pomocí normy lze definovat <u>vzdálenost</u> (neboli <u>metriku</u>)

$$dist_E(\vec{x},\vec{y}) := |\vec{x}-\vec{y}|_E .$$

Platí:

$\boxed{\text{Věta 8.3}}$ (Vlastnosti metriky)

(M1) $\forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^d$: $dist_E(\vec{x},\vec{y}) \geq 0 \ \wedge \ dist_E(\vec{x},\vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{y}$ $\boxed{\text{NEZÁPORNOST}}$

(M2) $\forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^d$: $dist_E(\vec{x},\vec{y}) = dist_E(\vec{y},\vec{x})$ $\boxed{\text{SYMETRIE}}$

(M3) $\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \mathbb{R}^d$: $dist_E(\vec{x},\vec{y}) \leq dist_E(\vec{x},\vec{z}) + dist_E(\vec{z},\vec{y})$ $\boxed{\text{Δ-OVÁ NEROVNOST}}$

Dk (Mi) plynou z (Ni) ve Větě 8.2. ∎

$\boxed{\text{Zobecněné struktury}}$

$\boxed{\text{pre-Hilbertův prostor}}$ neboli prostor se skalárním součinem je jakýkoliv vektorový prostor H, na kterém je definováno zobrazení

$$(\cdot,\cdot)_H : H \times H \to \mathbb{R}$$

splňující (S1)-(S3), tj. linearitu, symetrii a nezápornost.

<u>Příklad</u> ① Uvažujme prostor $l_2 := \{ \{x_i\}_{i=1}^{\infty} ; \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \}$ a definujme pro $x,y \in l_2$, tzn. $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$

$$(x,y)_H := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

Pak $(l_2, (\cdot,\cdot)_H)$ je pre-Hilbertův. Ověřte.

② Uvažujte $R((a,b))$ prostor Riemannovsky integrovatelných funkcí na (a,b). Ukažte, že $R((a,b))$ je vektorový prostor. Pro $f,g \in R((a,b))$, definujme

$$(f,g)_H := (R)\int_a^b f(x)g(x)\,dx .$$

Q: Proč není $(f,g)_H$ skalární součin na $R((a,b))$?

Vždy lze v pre-Hilbertově prostoru definovat $\|\cdot\|_H : H \to \mathbb{R}_0^+$ předpisem

$$\|u\|_H := \sqrt{(u,u)_H}$$

Pak $\|\cdot\|_H$ splňuje vlastnosti (N1) a (N2) jednoduše. Opakujeme-li důkaz (C-S) nerovnosti a následné Δ-nerovnosti úplně stejně jako větě 8.2, pozorujeme, že:

$\|\cdot\|_H$ je norma na prostoru H.

Říkáme, že $\|\cdot\|_H$ je <u>norma indukovaná skalárním součinem</u>

$\boxed{\text{Normovaný prostor}}$ Je-li X vektorový prostor, na kterém existuje zobrazení $\|\cdot\|_X : X \to \mathbb{R}_0^+$ splňující (N1)–(N3), pak $(X, \|\cdot\|_X)$ se nazývá <u>normovaný prostor</u>

<u>Příklad</u> ① Prostor $C(\langle a,b\rangle)$ je <u>vektorový prostor</u> <u>∞-dimenze</u> neboť $x^k \in C(\langle a,b\rangle)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. a ze vztahu

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i x^i = 0 \text{ pro } \forall x \in \langle a,b\rangle$$ plyne $\lambda_i = 0$ a tak

$\{1, x, \dots, x^k, \dots\}$ jsou lineárně nezávislé.

Definujme $$\|f\|_{C(\langle a,b\rangle, \max)} := \|f\|_\infty := \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f(x)|$$

Pak $\|f\|_\infty$ je norma, OVĚŘTE, a prostor

$$\left(C(\langle a,b\rangle), \|\cdot\|_\infty\right)$$ je normovaný prostor.

② Definujeme-li na stejném prostoru

$$\|f\|_{C(\langle a,b\rangle, \mathrm{int})} := \|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

pak $\|f\|_1$ je na $C(\langle a,b\rangle)$ opět norma.

Prostor $\left(C(\langle a,b\rangle), \|\cdot\|_1\right)$ je opět normovaný prostor.

nepředpokládáme, že $\dim H < +\infty$

Tvrzení: Buď H vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, na kterém je definován skalární součin $(\cdot,\cdot)_H : H \times H \to \mathbb{R}$ splňující

$(S1)_{\mathbb{C}}$ $\forall\, x_1, x_2 \in H$ a $y \in H$ a $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$(\alpha x_1 + \beta x_2, y)_H = \alpha (x_1, y)_H + \beta (x_2, y)_H$$

$(S2)_{\mathbb{C}}$ $\forall\, x, y \in H$: $(x,y)_H = \overline{(y,x)_H}$ kde $\bar{z} := z_1 - i z_2$ pro $z = z_1 + i z_2$

$(S3)_{\mathbb{C}}$ $\forall\, x \in H$: $(x,x)_H \geq 0$ & $(x,x)_H = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Definujme $|\cdot|_H := \sqrt{(\cdot,\cdot)_H}$ tj. $|x|_H = (x,x)_H^{1/2}$.

Pak $|\cdot|_H : H \to \mathbb{R}_0^+$ vždy splňuje vlastnosti normy (N1)–(N3).

Dk $\boxed{\text{Ad (N1)}}$ $\boxed{|x|_H \geq 0}$ a $\boxed{|x|_H = 0 \Leftrightarrow x = 0}$ plyne resp. je ekvivalentní $(S3)_{\mathbb{C}}$

$\boxed{\text{Ad (N2)}}$

$$|\lambda x|_H^2 = (\lambda x, \lambda x)_H \underset{(S1)_{\mathbb{C}}}{=} \lambda \overline{(x, \lambda x)}_H \underset{(S2)_{\mathbb{C}}}{=} \lambda \overline{(\lambda x, x)}_H \underset{(S1)_{\mathbb{C}}}{=} \lambda \bar{\lambda} \overline{(x,x)}_H$$

$$\underset{(S3)_{\mathbb{C}}}{=} \lambda \bar{\lambda} (x,x)_H = |\lambda|_{\mathbb{C}}^2 |x|_H^2, \text{ což implikuje}$$

$$|\lambda x|_H = |\lambda|_{\mathbb{C}} |x|_H \quad \text{pro } \forall \lambda \in \mathbb{C}\ \forall x \in H.$$

$\boxed{\text{Ad (N3)}}$

$$|x+y|_H^2 = (x+y, x+y)_H = (x,x)_H + (x,y)_H + (y,x)_H + (y,y)_H$$

$$\underset{(S2)_{\mathbb{C}}}{=} |x|_H^2 + \underbrace{(x,y)_H + \overline{(x,y)}_H}_{z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z} + |y|_H^2 = |x|_H^2 + 2\operatorname{Re}(x,y)_H + |y|_H^2$$

$$\leq |x|_H^2 + 2|(x,y)_H|_{\mathbb{C}} + |y|_H^2 \leq |x|_H^2 + 2|x|_H|y|_H + |y|_H^2$$

$$= (|x|_H + |y|_H)^2 \quad ▨$$

$\boxed{\text{Cauchy-Schwarzova } \leq}$

$$\forall x, y \in H: \quad |(x,y)_H| \leq |x|_H |y|_H$$

Dk • $\boxed{y = 0}$ $\Rightarrow$ $(x,0) = \overline{(0,x)}$ a $(0,x) = (0+0,x) = (0,x) + (0,x) \Rightarrow (0,x) = 0$ a (C-S) platí.

• $\boxed{y \neq 0}$ $\lambda \in \mathbb{C}$ $\quad 0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y)_H = (x,x)_H + \lambda(y,x) + \overline{\lambda (y,x)} + |\lambda|_{\mathbb{C}}^2 (y,y)_H$

$$= (x,x)_H + \lambda \overline{(x,y)} + \bar{\lambda}(x,y) + |\lambda|_{\mathbb{C}}^2 (y,y)_H$$

Volbou $\lambda = -\dfrac{(x,y)}{(y,y)_H}$: $\quad 0 \leq (x,x)_H - \dfrac{(x,y)\overline{(x,y)}}{(y,y)_H} - \dfrac{\overline{(x,y)}_H (x,y)_H}{(y,y)_H} + \dfrac{(x,y)_H \overline{(x,y)}_H}{(y,y)_H}$, $\quad (x,y)_H\overline{(x,y)}_H = |(x,y)_H|^2$

což dává tvrzení. ▨

Definice: Buď X normovaný prostor s normami $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$. Řekneme, že tyto normy jsou ekvivalentní pokud existují $c_1, c_2 > 0$ tak, že $\forall x \in X$

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

Příklad
- Normy $\|f\|_\infty$ a $\|f\|_1$ NEJSOU v $C(\langle a,b \rangle)$ ekvivalentní.

$\boxed{\text{METRICKÝ PROSTOR}}$ Buď M nějaká (neprázdná) množina objektů,*) na které lze zavést zobrazení

$$\rho : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$

splňující (M1) - (M3). Pak (M, ρ) nazveme metrický prostor

Příklad
- $C(\langle a,b \rangle)$ je metrický prostor s metrikou
$$\rho_\infty(f,g) := \|f-g\|_\infty = \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f(x)-g(x)|$$
- $C(\langle a,b \rangle)$ je metrický prostor s metrikou
$$\rho_1(f,g) := \|f-g\|_1 = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

Je-li $X = (X, \|\cdot\|_X)$ normovaný prostor, pak X je (vektorový) metrický prostor s metrikou

$$\rho(x,y) := \|x-y\|_X$$

Tato metrika se nazývá metrika (vzdálenost) indukovaná normou.

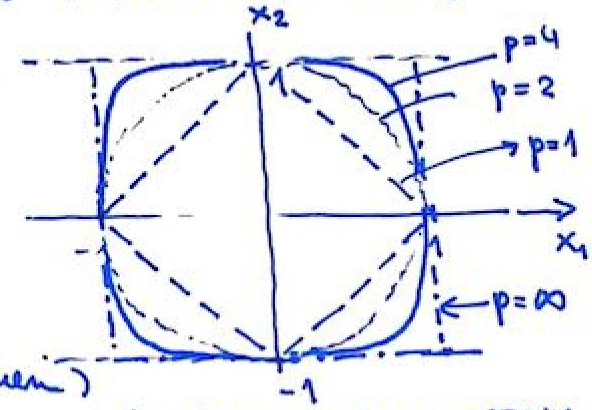
*) Nemusí tedy M být vektorový prostor.

Definujme v $\mathbb{R}^d$ následující zobrazení pro $p \in \langle 1, +\infty \rangle$:

$\boxed{1 \le p < +\infty}$: $\qquad |\vec{x}|_p := \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \right)^{1/p}$

$\boxed{p = +\infty}$ $\qquad |\vec{x}|_\infty := \max_{i=1,2,\dots,d} |x_i|$

Pak $|\cdot|_p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_0^+$ jsou normy. Skutečně 1-homogenita a nezápornost plynou přímo z definice norem (OVĚŘTE!), zatímco Δ-nerovnost plyne z Minkowského nerovnosti, kterou ukážeme za chvíli. Všimněte si, jak vypadají jednotkové koule v těchto normách, tj. množiny $B_1^p(0) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d;\ |\vec{x}|_p \le 1\}$.



Všimněte si také, že $|\cdot|_2 = |\cdot|_E$ (jen tato norma je generována skalárním součinem)

Normě $|\cdot|_\infty$ se někdy říká supremová,
Normě $|\cdot|_1$ — ‖ — součtová.

VŠECHNY TYTO NORMY JSOU VZÁJEMNĚ EKVIVALENTNÍ.

Na závěr si ukážeme tři nerovnosti, které vedou k Δ-nerovnosti.

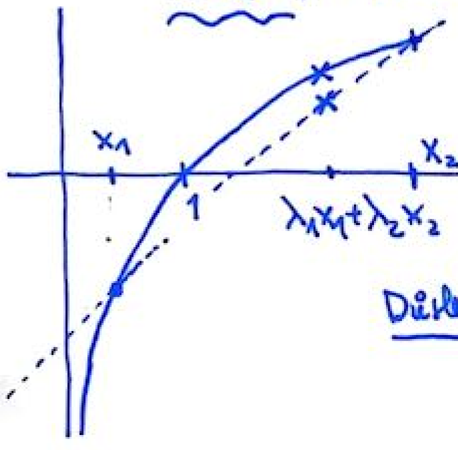
Tvrzení (Youngova nerovnost) Pro $a, b > 0$ platí:

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \text{kde} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p, q \in (1, +\infty)$$

Někdy se píše $q = p'$; $p' = \frac{p}{p-1}$. p, p' duální exponenty.

Dk: Plyne z (ryzí) monotónie a konkávity logaritmu:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b = \underbrace{\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q}_{\lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2} \le \underbrace{\ln\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \right)}_{\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)}$$



a aplikujeme exponenciálu. ∎

Důsledek: Pro $A, B > 0$, $\varepsilon > 0$ libovolné:

$$AB \le \varepsilon A^p + \frac{p-1}{\varepsilon^{1/(p-1)}} \left(\frac{B}{p} \right)^{p'} \qquad p' := \frac{p}{p-1}$$

Tvrzení (Hölderova nerovnost) Pro $p \in \langle 1, +\infty \rangle$, $q = \frac{p}{p-1}$ a pro $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$:

$$\boxed{|(\vec{x}, \vec{y})| \leq |\vec{x}|_p |\vec{y}|_q}$$

speciální případ $\boxed{p=2}$: (C-S) $\leq$

Dk Je-li: $\vec{x} = \vec{0}$ nebo $\vec{y} = \vec{0}$, pak zjevně triviální.

Je-li: $\boxed{p=1}$, pak

$$|(\vec{x}, \vec{y})| = \left|\sum_{i=1}^{d} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{d} |x_i||y_i| \leq \max_{i=1,\dots,d} |y_i| \sum_{i=1}^{d} |x_i|$$

$$= |\vec{x}|_1 |\vec{y}|_\infty .$$

Podobně pro $\boxed{p=\infty.}$

Je-li $\boxed{1 < p < +\infty}$, pak $\boxed{\text{a } |\vec{x}|_p \neq 0 \text{ a } |\vec{y}|_q \neq 0}$

$$\frac{|(\vec{x}, \vec{y})|}{|\vec{x}|_p |\vec{y}|_q} \leq \sum_{i=1}^{d} \frac{|x_i|}{|\vec{x}|_p} \frac{|y_i|}{|\vec{y}|_q} \overset{\text{Young}}{\leq}$$

$$\leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{d} \frac{|x_i|^p}{|\vec{x}|_p^p} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{d} \frac{|y_i|^q}{|\vec{y}|_q^q}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad \blacksquare$$

Tvrzení (Minkowského nerovnost)

Pro $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^d$ a $p \in \langle 1, +\infty \rangle$ platí:

$$|\vec{x} + \vec{y}|_p \leq |\vec{x}|_p + |\vec{y}|_p$$

Dk Pro $\boxed{p=1}$ a $\boxed{p=\infty}$ je důkaz jednodušší (SAMI).

Pro $\boxed{p=2}$ jsme již nerovnost dokázali. Nyní předvedeme jiný obecnější důkaz platící p: $\boxed{1 < p < +\infty}$.

$$\underbrace{|x_i + y_i|^p = |x_i + y_i|\,|x_i + y_i|^{p-1}}_{\text{Trik}}$$

$$|\vec{x} + \vec{y}|_p^p = \sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|\,|x_i + y_i|^{p-1}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{d} |x_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{d} |y_i|\,|x_i + y_i|^{p-1}$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} |\vec{x}|_p \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} + |\vec{y}|_p \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq \left(|\vec{x}|_p + |\vec{y}|_p\right) |\vec{x} + \vec{y}|_p^{p-1}, \text{ což dává tvrzení.} \qquad \blacksquare$$

8.2 Topologie $\mathbb{R}^d$

Def. Buď $\varepsilon > 0$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d$. Pak <u>$\varepsilon$-okolím bodu $\vec{x}_0$</u> nazveme množinu $U_\varepsilon(x_0)$ definovanou: $U_\varepsilon(\vec{x}_0) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d;\ |\vec{x} - \vec{x}_0|_\infty < \varepsilon\}$

Pozorování
- $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$ je krychle o straně 2ε
- $\vec{x}_0 \in U_\varepsilon(\vec{x}_0)$
- Je-li $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, pak $U_{\varepsilon_1}(\vec{x}_0) \subset U_\varepsilon(\vec{x}_0)$

Ze všech $|\cdot|_p$ norem, $1 \le p \le \infty$, jsme zvolili $|\cdot|_\infty$ normu, neboť s ní se nejlépe počítá. Častější volba je $|\cdot|_2$ norma.

Def. (VNITŘNÍ BOD MNOŽINY) Buď $M \subset \mathbb{R}^d$. Řekneme, že $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ je <u>vnitřní bod M</u> pokud $(\exists \varepsilon > 0)$ $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset M$.

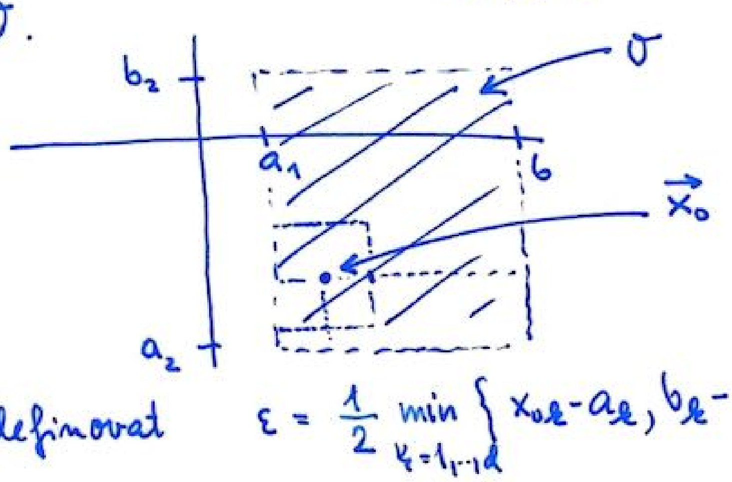
Def. (OTEVŘENÁ MNOŽINA) Řekneme, že $M \subset \mathbb{R}^d$ je <u>otevřená</u> pokud každý bod M je vnitřní. Neboli:

$$\boxed{M \subset \mathbb{R}^d \text{ je otevřená} \overset{df.}{\equiv} \forall \vec{x} \in M\ \exists \varepsilon > 0 \text{ tak, že } U_\varepsilon(\vec{x}) \subset M.}$$

Příklad Nechť $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^d$, $a_k < b_k$, $k = 1, \dots, d$. Pak $O := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d;\ a_k < x_k < b_k,\ k = 1, 2, \dots, d\}$ je otevřená v $\mathbb{R}^d$.

Dk Pro $\vec{x}_0 \in O$ libovolné položíme $\varepsilon = \min\limits_{k=1,2,\dots,d} \{x_{0k} - a_k, b_k - x_{0k}\}$

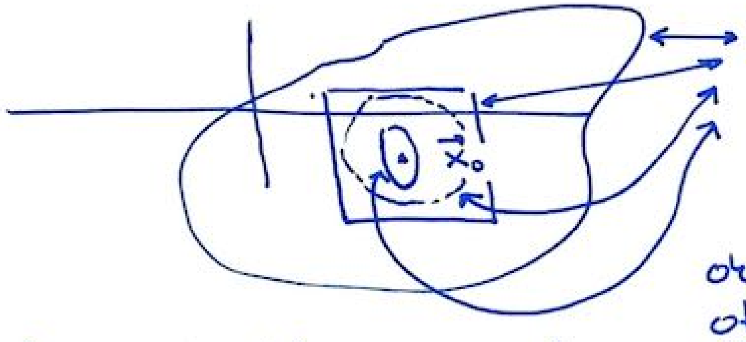
Pak $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset O$.



Také jsem mohl definovat $\varepsilon = \frac{1}{2} \min\limits_{k=1,\dots,d} \{x_{0k} - a_k, b_k - x_{0k}\}$

<u>Definice</u> Okolím bodu $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ rozumíme libovolnou OTEVŘENOU množinu obsahující $\vec{x}_0$.

<u>Příklad</u>



tyto čtyři množiny (brambora, čtverec, kruh a elipsa) jsou okolí $\vec{x}_0$, pokud jsou otevřené. Např.

$\check{C}_1 : \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d ; |\vec{x} - \vec{x}_0| < \frac{1}{2}\}$ je otevřená, ale

$\check{C}_2 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d ; |\vec{x} - \vec{x}_0| \leq \frac{1}{2}\}$ otevřená není.

Věta 8.4 Systém všech otevřených množin v $\mathbb{R}^d$ má následující vlastnosti:

(T1) $\emptyset$, $\mathbb{R}^d$ jsou otevřené

(T2) sjednocení libovolného počtu otevřených množin je otevřené

(T3) průnik konečného počtu otevřených množin je otevřený

Dk **Ad (T1)** triviální

Ad (T2) Jsou-li G_α otevřené a $\vec{x}_0 \in \bigcup_\alpha G_\alpha$, pak $\exists\, \alpha_0$ tak, že $\vec{x}_0 \in G_{\alpha_0}$. Protože G_{α_0} je otevřená, tak existuje $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$, ε-ové okolí, tak, že $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset G_{\alpha_0}$. Pak ale $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$.

[α je index, který vybírám z nějaké množiny indexů, např. $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \Gamma$, Γ množina indexů jisté mohutnosti]

Ad (T3) Buď $\vec{x}_0 \in \bigcap_{i=1}^m G_i$, G_i otevřená. Pak $\vec{x}_0 \in G_i$ pro $i = 1, 2, \dots, m$ a existují $\varepsilon_i > 0$ tak, že $U_{\varepsilon_i}(\vec{x}_0) \subset G_i$.

Definujme $\varepsilon := \min_{i=1,\dots,m} \varepsilon_i$. Pak $\boxed{U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset \bigcap_{i=1}^m G_i}$

POZOR!! $\bigcap_{i=1}^\infty G_i$ nemusí být otevřená. Volme např.

$G_i := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d ; |\vec{x}|_\infty < \frac{1}{k}\}$. Pak $\bigcap_{i=1}^\infty G_i = \{0\}$.

D E F I N I C E

TOPOLOGICKÝ PROSTOR Buď X libovolná množina, na které uvažujeme (tzn. máme nebo zavedeme) systém $\mathcal{T}$ podmnožin X takových, že

(T1)* $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(T2)* Jsou-li $G_\alpha \in \mathcal{T}$, pak $\bigcup_\alpha G_\alpha \in \mathcal{T}$

(T3)* Jsou-li $G_i \in \mathcal{T}$, $\underbrace{i=1,\dots,m}_{\text{KONEČNĚ}}$, pak $\bigcap_{i=1}^{m} G_i \in \mathcal{T}$.

Pak $\mathcal{T}$ se nazývá <u>topologie</u>,
a $(X, \mathcal{T})$ je <u>topologický prostor</u>.

<u>Příklady</u> • $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ je triviální topologie, kterou lze zavést na libovolné množině.

• v $\mathbb{R}^d$ je $\mathcal{T}$ definována takto: $\left[\text{pro } \forall \varepsilon > 0 \text{ a } \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \emptyset, \mathbb{R}^d \text{ a } U_\varepsilon(\vec{x}) \in \mathcal{T}\right]$

vidíme, že $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ potenční množina = systém všech podmnožin $\mathbb{R}^d$.

Definice Řekneme, že $M \subseteq \mathbb{R}^d$ je <u>uzavřená</u> $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ $\underline{\mathbb{R}^d \setminus M}$ je otevřená (neboli doplněk M (angl. complement) značený $\underline{M^c}$ je otevřený).

Protože platí:

$$\boxed{\mathbb{R}^d \setminus \left(\bigcap_\alpha G_\alpha\right) = \bigcup_\alpha \left(\mathbb{R}^d \setminus G_\alpha\right)} \text{ a } \boxed{\mathbb{R}^d \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m} G_i\right) = \bigcap_{i=1}^{m} \left(\mathbb{R}^d \setminus G_i\right)}$$

tak z Věty 8.4. plyne:

Věta 8.4* Systém všech uzavřených podmnožin $\mathbb{R}^d$ má následující vlastnosti:

(1) $\emptyset, \mathbb{R}^d$ jsou uzavřené

(2) Jsou-li G_i uzavřené pro $i=1,\dots,m$, pak $\bigcup_{i=1}^{m} G_i$ je uzavřené

(3) Jsou-li G_α uzavřené, α libovolné, pak $\bigcap_\alpha G_\alpha$ je uzavřená množina.

Definice • $\boxed{\text{HRANIČNÍ BOD MNOŽINY}}$ Buď $M \subset \mathbb{R}^d$. Bod $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ nazveme hraničním bodem M nebo bodem hranice M jestliže libovolné (každé) okolí $\vec{x}$ má neprázdný průnik s M i $\mathbb{R}^d \setminus M$, tzn.

$$(\forall\, \underset{\text{okolí}}{\mathcal{U}(\vec{x})})\ \left(\mathcal{U}(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset \ \wedge\ \mathcal{U}(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M) \neq \emptyset\right)$$

• [HRANICE] Množina všech hraničních bodů M se nazývá hranice M a značí se ∂M.

• $\boxed{\text{UZÁVĚR MNOŽINY}}$ je sjednocení M a její hranice, tzn.

$$\overline{M} := M \cup \partial M.$$

$\boxed{\overline{M} = \text{uzávěr } M}$

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ Buď $M \subset \mathbb{R}^d$ libovolná, pak $\overline{(\overline{M})} = \overline{M}$.

Dk. Protože dle definice $\overline{(\overline{M})} = \overline{M} \cup \partial\overline{M} = M \cup \partial M \cup \partial \overline{M}$, stačí ukázat, že $\underline{\partial\overline{M} \subset \partial M}$.

Je-li vlak $\vec{x} \in \partial\overline{M}$, pak

(1) $\forall\, \mathcal{U}(\vec{x})$: $\quad \mathcal{U}(\vec{x}) \cap \overline{M} \neq \emptyset$ a $\mathcal{U}(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus \overline{M}) \neq \emptyset$

Chceme ukázat, že $\vec{x} \in \partial M$, tj.

(2) $\forall\, \mathcal{U}(\vec{x})$ $\quad \mathcal{U}(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset$ a $\mathcal{U}(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M) \neq \emptyset$

Buď $\mathcal{U}(\vec{x})$ libovolné okolí $\vec{x} \in \partial\overline{M}$, pak z $\mathcal{U}(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus \overline{M}) \neq \emptyset$ plyne $\mathcal{U}(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M) \neq \emptyset$ (neboť $\mathbb{R}^d \setminus \overline{M} \subset \mathbb{R}^d \setminus M$).

Dále z $\mathcal{U}(\vec{x}) \cap \overline{M} \neq \emptyset$ plyne existence $\vec{y} \in \mathcal{U}(\vec{x})$ takového, že buď $\vec{y} \in M$ nebo $\vec{y} \in \partial M$. Je-li $\vec{y} \in M$, pak $\mathcal{U}(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset$ a jsme hotovi. Je-li $\vec{y} \in \partial M$ (a také v $\mathcal{U}(\vec{x})$) pak určitě existuje $\mathcal{U}(\vec{y}) \subset \mathcal{U}(\vec{x})$ tak, že $\mathcal{U}(\vec{y}) \cap M \neq \emptyset$, pak ale i $\mathcal{U}(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset$ a jsme hotovi. $\boxtimes$

Věta 8.5 Buď $M \subseteq \mathbb{R}^d$. Pak $\overline{M}$ je nejmenší uzavřená množina v $\mathbb{R}^d$ obsahující M.

Dk **Krok 1** Ukážeme nejdříve, že $\mathbb{R}^d \setminus \overline{M}$ je otevřená. Sporem. Kdyby $\mathbb{R}^d \setminus \overline{M}$ nebyla otevřená, tak existuje $\vec{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{M}$ takový, že pro jakékoliv okolí $U(\vec{x}) \cap \overline{M} \neq \emptyset$. (negace definice otevřené množiny)
Pak ale $\vec{x} \in \partial \overline{M}$ a $\partial \overline{M} \subset \overline{(\overline{M})} = \overline{M}$ a máme spor neboť $\vec{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{M}$ ale také $\vec{x} \in \overline{M}$.

Krok 2 Nechť N je uzavřená množina obsahující M. Chceme ukázat, že $\overline{M} \subset N$ neboli $\partial M \subset N$ (neboť $M \subset N$).
Kdyby však existoval $\vec{x} \in \partial M$ a zároveň $\vec{x} \notin N$, pak

$$(\forall U(\vec{x})) \qquad U(\vec{x}) \cap M \neq \emptyset \quad \text{a} \quad U(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M) \neq \emptyset$$

což však ale implikuje (neboť $M \subset N$ a $x \notin N$), že

(•) $$\forall U(\vec{x}) \qquad U(\vec{x}) \cap N \neq 0 \quad \text{a} \quad U(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus N) \neq \emptyset,$$

což je spor, neboť N je uzavřená a tedy $\mathbb{R}^d \setminus N$ je otevřená a existuje tedy okolí $\hat{U}(\vec{x})$, které je částí $\mathbb{R}^d \setminus N$ a tak $U(\vec{x}) \cap N = \emptyset$.
(a to je ve sporu s (•)) ∎

Def. (VNITŘEK MNOŽINY) Buď $M \subset \mathbb{R}^d$. Množina všech vnitřních bodů se nazývá *vnitřek M* a značí se M°.

Věta 8.6 Buď $M \subset \mathbb{R}^d$. Pak $(M^\circ)^\circ = M^\circ$ a M° je největší otevřená podmnožina M.

Dk [1] M° je otevřená dle definice vnitřku M a dle definice otevřené množiny.

[2] Kdyby W byla jiná otevřená podmnožina M, pak každý bod z W je vnitřní bod M a padne tedy do M°, tj. $W \subset M^\circ$.

[3] $(M^\circ)^\circ$ je největší otevřená podmnožina M°, ale M° je otevřená. Tedy $(M^\circ)^\circ = M^\circ$. ∎

Příklad Uvaž $\mathbb{Q}$ množinu racionální čísel. Pak $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$.

$\boxed{\text{Věta 8.7}}$ $\boxed{\text{"Hausdorffův oddělovací axiom"}}$

Buď $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^d$, $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$. Pak existují $\underbrace{U(\vec{x}_1), U(\vec{x}_2)}_{\text{otevřená okolí}}$ tak, že $U(\vec{x}_1) \cap U(\vec{x}_2) = \emptyset$.

Dk Položme $\varepsilon := \frac{1}{4} |\vec{x}_2 - \vec{x}_1|_\infty > 0$ a $U(\vec{x}_i) := U_\varepsilon(\vec{x}_i)$, $i = 1, 2$.

Kdyby existovalo $\vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}_1) \cap U_\varepsilon(\vec{x}_2)$, pak

$$4\varepsilon = |\vec{x}_2 - \vec{x}_1|_\infty = |\vec{x}_2 - \vec{x} + \vec{x} - \vec{x}_1|_\infty \leq |\vec{x}_2 - \vec{x}|_\infty + |\vec{x} - \vec{x}_1|_\infty < 2\varepsilon$$

a máme spor. $\lightning$ $\blacksquare$

Důsledek $\forall \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d$: $\{\vec{x}_0\}$ je uzavřená (BODY JSOU UZAVŘENÉ MNOŽINY)

Dk Buď $\vec{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\vec{x}_0\}$ libovolné, pak dle Věty 8.7 existují $U(\vec{x}_0)$ a $U(\vec{x})$ tak, že $U(\vec{x}) \cap U(\vec{x}_0) = \emptyset$. Tzn. $U(\vec{x}) \subset \mathbb{R}^d \setminus \{\vec{x}_0\}$ a $\vec{x}$ je vnitřní bod $\mathbb{R}^d \setminus \{x_0\}$. Tedy $\mathbb{R}^d \setminus \{x_0\}$ je otevřená a dle definice $\{\vec{x}_0\}$ je uzavřená. $\blacksquare$

Definice Buď $M \subset \mathbb{R}^d$. Bod $x_0 \in \mathbb{R}^d$ je hromadným bodem M pokud $\forall U(\vec{x}_0)$ existuje nekonečně bodů z M patřících do $U(\vec{x}_0)$.

$\boxed{\text{Věta 8.8}}$ (Charakterizace uzavřených množin)

$M \subset \mathbb{R}^d$ je uzavřená $\iff$ M obsahuje všechny své hromadné body.

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ Předpokládejme sporem, že M je uzavřená a $\exists \vec{x} \notin M$ tak, že libovolné $U(\vec{x})$ obsahuje nekonečně bodů z M. Pak ale ihned dostáváme spor se skutečností, že $\mathbb{R}^d \setminus M$ je otevřená a pak pro $\vec{x}$ nutně musí existovat okolí tak, že $U(\vec{x}) \cap M = \emptyset$, což je v rozporu s definicí hromadného bodu.

$\boxed{\Leftarrow}$ Chceme ukázat, že $\mathbb{R}^d \setminus M$ je otevřená. Nechť $\vec{x} \in \mathbb{R}^d \setminus M$ je libovolný bod. Protože, dle předpokladu M obsahuje všechny hromadné body a $\vec{x} \notin M$, tak existuje $U(\vec{x})$ tak, že $U(\vec{x}) \cap M$ je nejvýš konečná, a tedy, dle Důsledku Věty 8.7, $U(\vec{x}) \cap M$ je uzavřená. Neboli $\mathbb{R}^d \setminus (U(x) \cap M) = (\mathbb{R}^d \setminus U(x)) \cup (\mathbb{R}^d \setminus M)$ je otevřená. Protože $U(\vec{x})$ je otevřená, tak $U(\vec{x}) \cap [(\mathbb{R}^d \setminus U(x)) \cup (\mathbb{R}^d \setminus M)] = U(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^d \setminus M)$ je otevřená a podmnožinou $(\mathbb{R}^d \setminus M)$.

Tedy $(\mathbb{R}^d \setminus M)$ je otevřená. $\blacksquare$

8.3. Konvergence posloupností, úplnost a kompaktnost v $\mathbb{R}^d$

Konvergenci posloupnosti lze definovat topologicky, metricky nebo v normě.

$\boxed{\text{Def (topologická)}}$ Buď $(X, \mathcal{T})$ topologický prostor. Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ konverguje k $x \in X \overset{df}{\equiv} (\forall\, \mathcal{U}(x))(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ x_n \in \mathcal{U}(x)$

Píšeme: $\boxed{x_n \to x \text{ v } X.}$

$\boxed{\text{Def. (metrická)}}$ (*) Buď (M, ϱ) metrický prostor. Řekneme, že
$$x_n \to x \text{ v } M \overset{def.}{\equiv} (\forall \varepsilon > 0)(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ \varrho(x_n, x) < \varepsilon$$

Tvrzení Je-li (M, ϱ) metrický prostor a $x_n \to x$ v M, pak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje

(B-C) $\quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq n_0)\ \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$

Dk Pro dané $\varepsilon > 0$, uvažme definici $x_n \to x$ v M pro $\frac{\varepsilon}{2}$. Tzn. k $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ $(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ \varrho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Vezmeme $n, m \geq n_0$ libovolně. Pomocí Δ-nerovnosti (M3):
$$\varrho(x_n, x_m) \leq \varrho(x_n, x) + \varrho(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
což jsme chtěli ukázat. ■

$\boxed{\text{Def. (CAUCHYOVSKÁ POSLOUPNOST)}}$ Buď (M, ϱ) metrický prostor. Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ je cauchyovská $\overset{df}{\equiv}$ platí (B-C).

Příklad Uvažujme racionální čísla $\mathbb{Q}$ s metrikou $\varrho(x, y) = |y - x|$. Pak $(\mathbb{Q}, \varrho(x, y))$ je metrický prostor. Definujme nyní $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ předpisem $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Pak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, neboť $x_n \to e$ v $\mathbb{R}$ a $x_n \in \mathbb{Q}$.
Ale x_n nekonverguje v $\mathbb{Q}$, neboť $e \notin \mathbb{Q}$.

(*) Definice $\boxed{\text{v normě}}$: $x_n \to x$ v $(X, \|\cdot\|_X) \equiv (\forall \varepsilon > 0)(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ \|x_n - x\|_X < \varepsilon$

Def. **Úplný metrický prostor** Řekneme, že metrický prostor (M, ρ) je *úplný* pokud každá cauchyovská posloupnost má v M limitu.

Normovaný (vektorový/lineární) prostor, který je úplný se nazývá BANACHŮV.

Příklady ① Prostor $(\mathbb{R}, \rho(x,y) = |x-y|)$ je *úplný*, neboť (B-C) podmínka je ekvivalentní s konvergencí posloupnosti, což plyne z Weierstrassovy věty a je důsledkem axiomu úplnosti (∀ shora omezená množina má supremum (v $\mathbb{R}$)).

② • Prostor $(\mathbb{R}^d, |\vec{x}-\vec{y}|_\infty)$ je *úplný* (tedy i zde (B-C) podmínka je ekvivalentní "$x_n \to x$ v $\mathbb{R}^d$").

Dk Buď $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská v $\mathbb{R}^d$. Pak:

• pro $\forall \varepsilon > 0$ $\quad |\vec{x}_n - \vec{x}_m|_\infty < \varepsilon \quad$ pro n, m dostatečně velké

$$\max_{i=1,\dots,d} |(x_n)_i - (x_m)_i| < \varepsilon \qquad \text{—"—}$$

tzn.

$$|(x_n)_i - (x_m)_i| < \varepsilon \qquad \text{—"—} \quad \text{a pro každé } i = 1,\dots,d$$

Tedy $\{(x_n)_i\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská v $\mathbb{R}$ ale $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ je úplný a tak $\{(x_n)_i\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, tj. $(\exists\, x_i \in \mathbb{R})$ tak, že $(x_n)_i \to x_i$ v $\mathbb{R}$.

Polož $\vec{x} := (x_1, \dots, x_i, \dots, x_d)$. Pak $|\vec{x}_n - \vec{x}|_\infty := \max_{i=1,\dots,d} |(x_n)_i - x_i| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. ∎

③ • Analogicky se ukáže, že $(\mathbb{R}^d, |\vec{x}-\vec{y}|_p)$ je úplný.

Kandidáta na limitu najdu stejně, neboť pro každé $i = 1, 2, \dots, d$ platí:

$$|x_i| \le \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{resp.} \quad |(x_n)_i - (x_m)_i| \le \left(\sum_{i=1}^{d} |(x_n)_i - (x_m)_i|^p\right)^{1/p}.$$

Tedy z cauchyovskosti $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $(\mathbb{R}^d, |\cdot|_p)$ plyne cauchyovskost $\{(x_n)_i\}_{n=1}^{\infty}$ v $\mathbb{R}$ a tedy existence $x_i \in \mathbb{R}$ tak, že

$$x_{n_i} \to x_i \text{ v } \mathbb{R}.$$

Pro $\vec{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_d)$ pak máme

$$|\vec{x}_n - \vec{x}|_p = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_{n_i} - x_i|^p\right)^{1/p} \le d^{1/p} \max_{i=1,\dots,d} |x_{n_i} - x_i| \to 0$$

jako v Příkladu ②

$\boxed{\text{Pozor! } d^{1/p} \to +\infty \text{ pro } d \to +\infty}$ Argument se dá zlepšit.

④ Prostor $\left(C(\langle a,b\rangle),\ \varrho^{\infty}(f,g)=\|f-g\|_{\infty}:=\max\limits_{x\in\langle a,b\rangle}|f(x)-g(x)|\right)=:X$

je úplný normovaný prostor (tedy Banachův).

"Nástin důkazu" Je-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská v X, tak

$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})\ \forall n,m\geq n_0 \quad \max\limits_{x\in\langle a,b\rangle}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon,$

což implikuje dvě věci:

(i) podobně jako v Př. ②: pro každé $x\in\langle a,b\rangle$

$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$

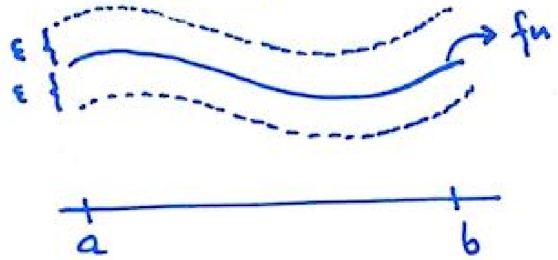
a tedy $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská v $\mathbb{R}$, a tedy konvergentní.

Existuje vlastní limita $f_n(x)$ pro $n\to\infty$, označme ji $f(x)$:

$f(x):=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ bodová limita

Našli jsme kandidáta na limitu $\{f_n\}$

(ii) Od jistého n_0: všechny f_n leží v 2ε-ovém kanálku, viz obrázek:



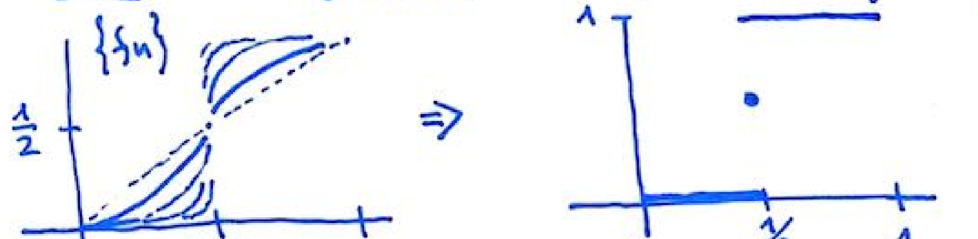
Odsud plyne, že f také musí ležet v ε-ovém kanálku, a navíc bude tato f spojitá, tzn. $f\in C(\langle a,b\rangle)$. ▨

Budeme mít později (ZS 2020/21), že $f_n\to f$ v X znamená, že f_n konvergují k f stejnoměrně na $\langle a,b\rangle$, píšeme $f_n\rightrightarrows f$ v $\langle a,b\rangle$.

⑤ Prostor $\left(C(\langle a,b\rangle),\ \underbrace{\varrho^{1}(f,g)}_{\|f-g\|_1}:=\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx\right)=:Y$

není úplný.

Řešení: Uvažuj $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C(\langle 0,1\rangle)$ jako na obrázku:



Pak:

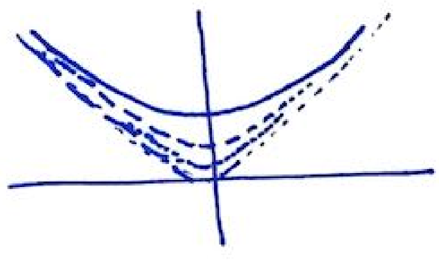
- $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská v Y
- $\varrho^1(f_n,f)\to 0$ $n\to\infty$
- ! $f\notin C(\langle 0,1\rangle)$.

[SROVNEJ s $(\mathbb{Q},|\cdot|)$]

Podobně jako neúplnost $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ vedla k "rozšíření"/zavedení $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, tak neúplnost $\left(C(\langle a,b\rangle), \|\cdot\|_1 := \int_a^b |\cdot|\,dx\right)$ vedla k "rozšíření"/zavedení prostorů $\left(L^1((a,b)), \|\cdot\|_1\right)$ a obecněji $\left(L^p((a,b)), \|f\|_p := \int_a^b |f(x)|\,dx\right)$. Tyto prostory jsou úplné, zavedeme je v ZS 2020/21. Pro $p=2$, mají, mj., uplatnění v kvantové fyzice.

⑥ Prostor $\left(C^1(\langle a,b\rangle), \|f-g\|_\infty = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f(x)-g(x)|\right)$ <u>není úplný</u>.

<u>Řešení</u> Uvažujme $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\langle a,b\rangle)$ jako na obrázku:



Pak f_n konvergují k $f(x)=|x|$ "stejnoměrně" (ve smyslu ε-ového tunýlku)

ale $|x| \notin C^1(\langle a,b\rangle)$. Proč? ▨

⑦ Prostory ℓ^p, $p\in\langle 1,\infty\rangle$, definované

$\boxed{1\le p<\infty}$ $\quad \ell^p := \left\{ x=\{x_i\}_{i=1}^\infty ;\ \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p\right)^{1/p} < +\infty \right\}$ s $\|x\|_{\ell^p} := \left(\sum_1^\infty |x_i|^p\right)^{1/p}$

$\boxed{p=\infty}$ $\quad \ell^\infty := \left\{ x=\{x_i\}_{i=1}^\infty ;\ \sup_{i=1,2,\dots} |x_i| < +\infty \right\}$ s $\|x\|_\infty := \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$

jsou <u>úplné</u> normované (tedy Banachovy) prostory.

Dk Viz cvičení. Návod: vyjdi z definice konvergence číselné řady. Užij výsledky pro $(\mathbb{R}^N, |\cdot|_p)$. ▨

Směrem ke kompaktnosti

Definice Systém množin $\{U_i\}_{i\in J}$, J množina indexů, se nazývá *pokrytí* M (zde $M \subset (X,\mathcal{T})$) $\stackrel{df.}{\equiv}$ $\boxed{(\forall x\in M)(\exists i\in J)\quad x\in U_i}$.
Jsou-li U_i otevřené, mluvíme o *otevřeném pokrytí*.

Definice (topologická definice kompaktnosti) Množina $K\subset\mathbb{R}^d$ (v obecném případě topologického prostoru $(X,\mathcal{T})$) je *kompaktní* pokud z každého otevřeného pokrytí K lze vybrat pokrytí *konečné*.

Následující citace je přičítována Hermannu WEYLovi (1885–1955):
„If a city is compact, it can be guarded by a finite number of arbitrarily near-sighted policemen."
zdroj: Edwin Hewitt „The rôle of compactness in analysis". The American Mathematical Monthly, 1960.

$\boxed{\text{Věta 8.9}}$ Buď $A\subset M$, kde (M,ϱ) je metrický prostor. Následující výroky jsou ekvivalentní:

(1) Z každého otevřeného pokrytí lze vybrat pokrytí konečné
(2) Každá posloupnost bodů z A obsahuje podposloupnost konvergentní v A
(3) (A,ϱ) je úplný a $\underbrace{\text{pro každé } \varepsilon>0 \text{ existuje konečné pokrytí } \varepsilon\text{-okolími}}_{\text{množina, která má tuto vlastnost, se nazývá totálně omezená}}$ (ε-ovými koulemi)

Dk $\boxed{(1)\Rightarrow(2)}$ Předpokládejme existenci $\{x_m\}_{m=1}^\infty\subset A$, která neobsahuje konvergentní podposloupnost. Pak
$(\forall y\in A)(\exists r=r(y)>0)$ tak, že $N_y := \{k;\, x_k\in \underbrace{B_{r(y)}(y)}_{\{z\in M;\, \varrho(z,y)<r(y)\}}\cap A\}$ je konečná.

Potom $\bigcup_{y\in A} B_{r(y)}(y)$ je otevřené pokrytí A

a dle předpokladu (1) existuje konečně množin $B_{r(y_i)}(y_i)$, $i=1,\dots,m$, $A\subset\bigcup_{i=1}^m B_{r(y_i)}(y_i)$. Pak ale $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je konečná, což dává spor. ↯

$\boxed{(2)\Rightarrow(3)}$ • Dle (2) má každá cauchyovská posloupnost v A limitu, tedy (A,ϱ) je úplný.

• Kdyby existovalo $\varepsilon>0$ tak, že A nelze pokrýt konečným počtem ε-koulí, pak $\forall k\in\mathbb{N}\ \exists x_{k+1}\in A\setminus\bigcup_{i=1}^k B_\varepsilon(x_i)$. (iterativní proces)

Takto sestrojená posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ NEMÁ konvergentní podposloupnost, což je spor s (2).

$\boxed{(3) \Rightarrow (1)}$ Buď $\{U_i\}_{i\in J}$ otevřené pokrytí A.

Definujme

$$\mathcal{F} := \{ B \subset M,\ B \text{ nelze pokrýt konečně mnoha } U_i \}$$

Chceme ukázat, že $A \notin \mathcal{F}$. Dle předpokladu (3) je však A totálně omezená. Tedy

[K $\varepsilon = 1$ existuje konečně 1-okolí $B_1(x_i)$, $i=1,\dots,N$, tak, že $A \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_1(x_i)$]

Pak však existuje $i_0 \in \{1,\dots,N\}$ tak, že $C_1 := A \cap B_1(x_{i_0}) \in \mathcal{F}$. Kdyby totiž takový index neexistoval tak $A \notin \mathcal{F}$ a jsme hotovi.

Mějme tedy $C_1 \in \mathcal{F}$. Protože $C_1 \subset A$, tak C_1 je totálně omezená.

[K $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existuje konečně ½-okolí $B_{1/2}(\hat{x}_i)$, $i=1,\dots,N_1$, tak, že $C_1 \subset \bigcup_{i=1}^{N_1} B_{1/2}(\hat{x}_i)$]

Opět musí existovat $\hat{i}_0 \in \{1,\dots,N_1\}$ tak, že $C_2 := C_1 \cap B_{1/2}(\hat{x}_{\hat{i}_0}) \in \mathcal{F}$.

V opačném případě by byl důkaz hotov.

Iterujeme .... dostaneme

$$C_0 := A \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_k \supset \dots \quad, \text{kde } C_k := C_{k-1} \cap B_{\frac{1}{k}}(\xi_k)$$

$$\text{kde } \xi_k \in B_{\frac{1}{k-1}}(\xi_{k-1})$$

Tedy $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská v A a (A,ρ) je úplný, dle předpokladu (3), tak existuje $x_0 \in A$ tak, že $\xi_k \to x_0$ v A.

Ale $x_0 \in U_\ell$ pro jisté ℓ a U_ℓ je otevřená. Pak nutně existuje k_0 dostatečně velké tak, že

$$C_k \subset U_\ell \quad \text{pro všechna } k \geq k_0$$

což dává spor, neboť $C_k \in \mathcal{F}$ dle konstrukce. ☒

$\boxed{\text{Věta 8.10}}$ (Charakterizace uzavřených množin)

$A \subset \mathbb{R}^d$ je uzavřená $\iff \left[\left(\forall \{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A\right) \vec{x}_n \to \vec{x} \text{ v } \mathbb{R}^d \Rightarrow \vec{x} \in A \right]$

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ Kdyby pro A uzavřenou existovala $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ a $\vec{x}_n \to \vec{x}$ v $\mathbb{R}^d$ tak, že $\vec{x} \in \mathbb{R}^d \setminus A$, pak, protože $\mathbb{R}^d \setminus A$ otevřená existuje $U_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R}^d \setminus A$ a máme ↯ neboť x_n pak nemohou konvergovat k x.

$\boxed{\Leftarrow}$ Vezměme $\vec{x} \in \mathbb{R}^d \setminus A$ libovolně.

Kdyby $U_{1/n}(\vec{x}) \cap A \neq \emptyset$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak existují $\vec{x}_n \in A$ tak, že $\vec{x}_n \to \vec{x}$ v $\mathbb{R}^d$. Pak ale nutně x padne do A, což dává spor s předpokladem. ☒

Def. • Buď (M,ϱ) metrický prostor. Řekneme, že $A \subset M$ je omezená $\stackrel{\text{df.}}{\equiv}$ $(\exists R>0)$ $A \subset B_R(0) := \{x \in M;\ \varrho(x,0) < R\}$.

• Buď $(X, \|\cdot\|_X)$ normovaný prostor. Množina $A \subset X$ je omezená $\stackrel{\text{df.}}{\equiv}$ $(\exists R>0)$ $A \subset B_R(0) := \{x \in M;\ \|x\|_X < R\}$.

$\boxed{\text{Věta 8.11}}$ (Charakterizace kompaktních množin v $\mathbb{R}^d$)

Množina $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní $\Longleftrightarrow$ K je omezená a uzavřená

! Tato charakterizace platí jen v prostorech konečné dimenze. Neboli, je-li (M,ϱ) úplný metrický prostor (nebo Banachův nebo Hilbertův prostor) a $K \subset M$ je kompaktní, pak vždy K je uzavřená a omezená. Avšak neplatí obrácená implikace.

Platí totiž tato Heine-Borelova věta:

$$\overline{B_1(0)} := \{x \in M;\ \varrho(x,0) \le 1\} \text{ je v } (M,\varrho) \text{ kompaktní} \Longleftrightarrow \dim M < \infty.$$

"Náznak důkazu" Uvažujme nejpřirozenější zobecnění prostoru $\mathbb{R}^d$ směrem k prostoru ∞-dimenze. Dostaneme prostor

$$l_2 := \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty};\ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\} \text{ s normou } |x|_{l_2} := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2}.$$

Uvažujme následující posloupnost $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ ležící v uzavřené jednotkové kouli v l_2:

$x^1 := (1, 0, \dots, \dots$
$x^2 := (0, 1, \dots, \dots$
$\vdots$
$x^n := (0, 0, \dots, \underset{\uparrow}{1}, \dots$
n-tý prvek
$\vdots$

Pak: • $\forall n \in \mathbb{N}$ $|x^n|_{l_2} = 1$

• $\forall n, m \in \mathbb{N}, m \neq n,$ $|x^n - x^m|^2_{l_2} = 2$

Tedy, NELZE z $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ VYBRAT KONVERGENTNÍ PODPOSLOUPNOST $\Rightarrow$ $\overline{B_1(0)}$ v l_2 NENÍ KOMPAKTNÍ.

dle Věty 8.9

$\boxed{\text{Dk Věty 8.11}}$ Dle Věty 8.9, ekvivalence (1) a (3), máme

$\boxed{K \subset \mathbb{R}^d \text{ je kompaktní}} \iff \boxed{(K, |x-y|_\infty) \text{ je úplný a } K \text{ je totálně omezená}}$

Ale dle Věty 8.10:

$\boxed{(K, |x-y|_\infty) \text{ je úplný} \iff K \text{ je uzavřený}}$

Tedy zbývá ukázat, že

$\boxed{K \text{ totálně omezená v } \mathbb{R}^d \iff K \text{ je omezená v } \mathbb{R}^d}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Je-li K totálně omezená, tj. $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_\varepsilon(\vec{x}_i)$, pak definujme $R := \max_{\substack{j=1,\dots,d \\ i=1,\dots,m}} |(\vec{x}_i)_j| + \varepsilon = \max_{i=1,\dots,m} |\vec{x}_i|_\infty + \varepsilon$

Pak $K \subset B_R(\vec{0})$ a K je omezená.

$\boxed{\Leftarrow}$ Je-li K omezená, pak existuje $R>0$ takové, že $K \subset B_R(\vec{0})$, což je krychle v $\mathbb{R}^d$ o straně $2R$. Urči $k \in \mathbb{N}$ tak, že

$k := \left[\frac{R}{\varepsilon}\right] + 1$ k danému libovolnému $\varepsilon > 0$.

← celá část

Pak K pokryji k^d krychliček o straně 2ε. Tedy K je totálně omezená. ∎