
Termín pro odevzdání: čtvrtek 11. března 2021

1. Uvažujte stereografickou projekci tak, jak byla zavedena na cvičení/přednášce. Ukažte, že pokud je dáno číslo v komplexní rovině $w = u + iv$, pak odpovídající bod \mathbf{x} na sféře o poloměru R je určen jako

$$\begin{aligned}x &= u \frac{2R^2}{u^2 + v^2 + R^2}, \\y &= v \frac{2R^2}{u^2 + v^2 + R^2}, \\z &= R \frac{u^2 + v^2 - R^2}{u^2 + v^2 + R^2}.\end{aligned}$$

2. Budiž dána dvě komplexní čísla $a = \alpha + i\beta$ a $z = x + iy$, pro která platí

$$\alpha + i\beta = \ln \frac{y + i(x + a)}{y + i(x - a)}. \quad (1)$$

Ukažte, že pro reálnou a imaginární část z platí

$$x = \frac{a \sinh \alpha}{\cosh \alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{a \sin \beta}{\cosh \alpha - \cos \beta}.$$

(Vztah (1) je definiční vztah pro takzvané bipolární souřadnice v rovině.)