§6 ČÍSELNÉ ŘADY

Sčítání nekonečně mnoha čísel vzbuzovalo pozornost od starověku. Vzpomeňme si například na Zenonův paradox o Achilovi a želvě.

Nekonečně mnoho čísel si budeme popisovat posloupností, tedy zobrazením z množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny čísel reálných či komplexních. Buď tedy $\boxed{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ posloupnost}}$, kde $a_n \in \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Záměrem je vybudovat matematické základy pro nekonečné součty

(1) $\qquad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots\dots + a_k + \dots\dots \dots$

Cílem bude nejen určit výsledek (1), ale také se naučit s těmito nekonečnými součty pracovat, aniž bychom znali přesný součet (1). Zápis (1) budeme zkráceně zapisovat

(1*) $\qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

a budeme jej nazývat řadou (angl. series)

Definice Buď $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ daná posloupnost reálných či komplexních čísel. Pak

(2) $\qquad \boxed{s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n}$

nazveme n-tý částečný součet posloupnosti $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$,

a posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme posloupnost n-tých částečných součtů.

Na základě limitního chování $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ stanovíme chování řady (1*):

Definice Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je

- KONVERGENTNÍ, pokud existuje $\lim_{n\to\infty} s_n =: s \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) tzn. vlastní limita
- DIVERGENTNÍ, pokud $\lim_{n\to\infty} s_n$ existuje a je buď $\underbrace{+\infty, -\infty}_{\in \mathbb{R}^*}$ nebo $\infty \in \mathbb{C}^*$. tzn. nevlastní limita
- OSCILUJÍCÍ, pokud $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje.

$\boxed{\text{Definice}}$ (Součet řady). Pokud $s := \lim_{n\to\infty} s_n$ existuje a je vlastní či nevlastní, pak s nazveme "součet řady (1*)" a píšeme $s := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

{Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ má tak dvojí význam: označuje jednak danou řadu, tak její součet (pokud existuje)}

Pozorování Je-li $\boxed{a_n \in \mathbb{C}}$, $n \in \mathbb{N}$, pak $\boxed{a_n = \alpha_n + i\beta_n}$, kde $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$.

Tedy
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + i \sum_{k=1}^{n} \beta_k .$$
Odsud pak snadno plyne:

- řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje $\Longleftrightarrow$ řady $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ konvergují
- platí $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k .$$

$\boxed{\text{Příklady}}$ (1) Geometrická řada Nechť $q \in \mathbb{C}$. Z identity
$$(1+q+\dots+q^n)(1-q) = 1 - q^{n+1}$$
plyne pro $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$:
$$s_n = \begin{cases} n+1 & \text{je-li } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{je-li } q \neq 1 \end{cases}$$

Je-li $|q| < 1$, pak $s_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-q}$ a řada $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ konverguje.
Pro ostatní q, geometrická řada buď diverguje nebo osciluje.

(2) Teleskopické řady jsou řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, kde a_k lze psát ve tvaru $\boxed{a_k = b_{k+1} - b_k}$. Pak platí
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = b_{n+1} - b_1$$
a pozorujeme, že platí (dokažte si sami):

- [Teleskopická řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje $\Longleftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) existuje.]

Speciálně vyšetřeme, zda $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konverguje a jaký je její součet.

Řešení: Platí: $a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ a řada je tedy teleskopická s $b_k = -\frac{1}{k}$. Tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} - b_1 = 1$. Tak $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1}$

$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{6}, a_3 = \frac{1}{12}, a_4 = \frac{1}{20}, \dots$

③ Harmonická řada: $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty}$ Harmonická řada diverguje

Řešení: Pro $s_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ platí: $1 = s_1 < s_2 < \dots < s_n$.
Tedy $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a $\lim_{n\to\infty} s_n$ existuje a platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{2^n}$$

Avšak

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}_{}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}$$

$$= (n+2)\frac{1}{2} \to \infty$$

Tedy: $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty}$.

④ Řada $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ nekonverguje, neboť posloupnost částečných součtů splňuje

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \text{ liché} \\ 0 & \text{pro } n \text{ sudé} \end{cases}$$

Tedy $\limsup_{n\to\infty} s_n = 1 \neq 0 = \liminf_{n\to\infty} s_n$.

Připomeňte si charakterizaci konvergence posloupnosti pomocí B-C podmínky a pomocí limsup a liminf

Řada je zajímavá i z následujícího pohledu.

- $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ má částečné součty $1, 0, 1, 0, \dots$
- řada $(1-1) + (1-1) + \dots$ má –||– $0, 0, 0, 0, \dots$
- řada $1 + (-1+1) + (-1+1) + \dots$ má –||– $1, 1, 1, 1, \dots$

Výsledek závisí na uzávorkování.

Poznámka (o uzávorkování) Je-li $1 \le m_1 < m_2 < \dots < \dots$

a definujeme-li $b_1 = a_1 + \dots + a_{m_1}$, $b_2 = a_{m_1+1} + \dots + a_{m_2}$,

$b_3 = a_{m_2+1} + \dots + a_{m_3}$, ..., $b_k = a_{m_{k-1}+1} + \dots + a_{m_k}$, ...

pak řadu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ nazveme <u>uzávorkováním</u> řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Částečné součty $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ tvoří podposloupnost částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Pokud tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, konverguje i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, a to ke stejnému součtu. Jak ukazuje předchozí příklad, pokud řada $\sum a_k$ nekonverguje, uzávorkování může dávat různé výsledky.

Poznámka
- Pro $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, symbol $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$ znamená $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$, kde $a_m := b_{m+p-1}$.
- Vynechání, přidání, záměna <u>konečně</u> prvků v posloupnosti, má vliv na součet řady, ale nikoliv na to zda řada konverguje/diverguje.

Následující věta je prvním kritériem, kterým bychom měli vždy otestovat danou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Pokud totiž $\lim_{n\to\infty} a_n$ nebude existovat nebo bude nenulová, pak dle této věty řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje.

Věta 6.1 (NUTNÁ PODMÍNKA KONVERGENCE ŘAD)

Pokud $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, pak $\boxed{\lim_{k\to+\infty} a_k = 0}$

Dk: Z předpokladu plyne, že $\lim_{k\to\infty} s_k = s \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) existuje.

Protože
$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}(s_k - s_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} s_k - \lim_{k\to\infty} s_{k-1} = s - s = 0.$$

Příklad 5 Řada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ nekonverguje, neboť

$\lim_{n\to\infty} \underbrace{(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\alpha_n}$ neexistuje $\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \alpha_n = 1 \neq -1 = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \alpha_n\right)$. ▨

Pro počítání je důležitá i následující věta o aritmetice řad, která také implikuje, že prostory

- $\check{R} := \{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} ; \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\}$
- $l_1 := \{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} ; \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje $\}$

jsou vektorové prostory.

Věta 6.2 (Aritmetika limit) Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A \in \mathbb{R}^*$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B \in \mathbb{R}^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha A + \beta B$ kdykoliv pravá strana má smysl.

Dk plyne z věty o aritmetice limit neboť

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha a_k + \beta b_k \right) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k \right\}$$

$$= \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} a_k + \beta \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} b_k = \alpha A + \beta B. \qquad \blacksquare$$

6.1 ŘADY S NEZÁPORNÝMI ČLENY

V celé této kapitolce budeme studovat řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n \in \mathbb{R}_0^+$ (tj. $a_n \geq 0$). Protože pak je vždy posloupnost částečných součtů neklesající, tak $\left[\lim_{n\to\infty} s_n \text{ vždy existuje} \right]$ *) pak buď řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje nebo diverguje (je-li součet $+\infty$).

Připomeňme si příklady řad s nezápornými členy, které jsme již vyšetřili:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ pro $q \in \langle 0,1)$, speciálně $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

---

*) Také platí $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$.

$\boxed{\text{Věta 6.3}}$ (Srovnávací a podílové srovnávací kritérium)

Nechť platí **jeden** z předpokladů:

(3) $\boxed{0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}}$ (stačí $\forall k \geq k_0$)

(4) $a_k > 0,\ b_k > 0$ a $\boxed{\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \leq \dfrac{b_{k+1}}{b_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}}$ (opět stačí $k \geq k_0$)

Pak platí:

(i) Pokud $\sum_1^\infty a_k$ diverguje, tak $\sum_{k=1}^\infty b_k$ diverguje.

(ii) Pokud $\sum_1^\infty b_k$ konverguje, tak $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konverguje.

Dk $\boxed{\text{Předp. (3)}}$ Protože $0 \leq \sum_{k=1}^m a_k \leq \sum_{k=1}^m b_k$, je i $\sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_1^m a_k \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^m b_k$.

Je-li v poslední nerovnosti pravá strana konečná, je i levá strana konečná a (ii) platí. Naopak, je-li levá strana $+\infty$, je i pravá strana $+\infty$, a (i) platí.

$\boxed{\text{Předpokládejme nyní (4)}}$ Z (4) plyne:

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} a_1 \leq \frac{b_k}{b_{k-1}} \frac{b_{k-1}}{b_{k-2}} \cdots \frac{b_2}{b_1} a_1 = \frac{a_1}{b_1} b_k$$

a použijeme již dokázaný výsledek pro $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ a $\{\frac{a_1}{b_1} b_k\}_{k=1}^\infty$. ▨

<u>Příklady</u> (6) Buď $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, kde $\alpha \in (0,1)$. Pak
$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} = \infty$ neboť pro $\alpha \in (0,1)$ je $n^\alpha \leq n \iff \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$
a víme z Příkladu (3), že $\sum \frac{1}{n} = \infty$.

(7) Pro $a_n = \frac{1}{n^2}$ naopak platí $\frac{1}{n \cdot n} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. Protože
$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(n-1)}$ konverguje dle Příkladu (2), tak $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ konverguje.

$\boxed{\text{Věta 6.4}}$ (Cauchyho odmocninové kritérium) Nechť $a_k \geq 0$ a $k_0 \in \mathbb{N}$.

Pokud

(i) existuje $q \in (0,1)$ tak, že $\sqrt[k]{a_k} \leq q$ pro $k \geq k_0$, pak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

(ii) $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ pro všechna $k \geq k_0$, pak $\sum\limits_{1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Dk $\boxed{\text{Ad (i)}}$ Z předpokladu plyne $0 \leq a_k \leq q^k$ a protože $q \in (0,1)$ tak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ konverguje (geometrická řada). Dle Věty 6.3 tedy $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje také.

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Z předpokladu $a_k \geq 1$ $(k \geq k_0)$ a z Věty 6.1 máme tvrzení.

$\boxed{\text{Věta 6.5}}$ (d'Alembertovo podílové kritérium) Nechť $a_k > 0$ a $k_0 \in \mathbb{N}$.

Pokud

(i) existuje $q \in (0,1)$ tak, že $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \leq q$ pro $\forall\, k \geq k_0$, pak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

(ii) $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ pro všechna $k \geq k_0$, pak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Dk $\boxed{\text{Ad (i)}}$ Podobně jako v důkazu Věty 6.3 píšeme:

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_{k_0+1}}{a_{k_0}} a_{k_0} \leq \underbrace{q^{k-k_0} a_{k_0}}_{\text{člen geometrické řady}} \quad \text{pro } k \geq k_0$$

, $q \in (0,1)$.

a protože $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-k_0}$ konverguje, Věta 6.3 dává tvrzení.

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Z předpokladu $a_{k+1} \geq a_k \geq \dots \geq a_{k_0} > 0$, $\forall\, k \geq k_0$. Tedy $\lim\limits_{k \to \infty} a_k \neq 0$. Dle Věty 6.1, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$. ▨

Předchozí kritéria mají i tzv. limitní varianty, která se někdy snadněji ověřují. Pozornost věnujte předpokladům, ostrým nerovnostem v jednotlivých podmínkách.

$\boxed{\text{Věta 6.6}}$ (Kritéria v limitním tvaru)

(α) Limitní srovnávací kritérium

Nechť $a_n, b_n > 0$ a nechť $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$ tj. vlastní a nenulová

Pak: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\iff$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje

(β) Nechť $a_n, b_n > 0$ a nechť $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Pak platí:

- Pokud $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- Pokud $\sum a_n$ diverguje, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje

(γ) Limitní podílové kritérium

Nechť $a_k > 0$. Je-li $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, pak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

Je-li $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, pak $\sum a_k$ diverguje

(δ) Limitní odmocninové kritérium

Nechť $a_k \geq 0$. Je-li $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} < 1$, pak $\sum\limits_{1}^{\infty} a_k$ konverguje.

Je-li $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} > 1$, pak $\sum\limits_{1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Dk $\boxed{\text{Ad } (\alpha)}$ Z existence limity $L := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, kde $0 < L < +\infty$ plyne

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_0 \quad \boxed{\frac{L}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2L}$$

což implikuje $b_n \leq \frac{2}{L} a_n \leq 4 b_n$ pro $\forall n \geq n_0$ a tvrzení plyne z V.6.3.

$\boxed{\text{Ad } (\beta)}$ Z existence limity plyne: $\exists M > 0 : 0 \leq a_n \leq M b_n$ $\forall n \geq n_0$.

Opět srovnávací kritérium, věta 6.3, dává tvrzení.

$\boxed{\text{Ad } (\gamma)}$ + $\boxed{\text{Ad } (\delta)}$ Z předpokladů se (snadno) ověří (PROVEĎTE!) předpoklady vět 6.4 resp. 6.5, z kterých tvrzení plyne. ■

$\boxed{\text{Příklady}}$ (δ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+2}\right)^{k^2}$ konverguje, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k}{k+2}\right)^{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+2}\right)^{k} = \exp\left(\lim_{k\to\infty} \overbrace{\frac{\ln\left(\frac{k}{k+2}\right)}{\frac{k}{k+2} - 1}}^{\to 1,\ k\to\infty} \frac{(-2k)}{k+2}\right)$$

$$= e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1; \text{ (δ) dává konvergenci.}$$

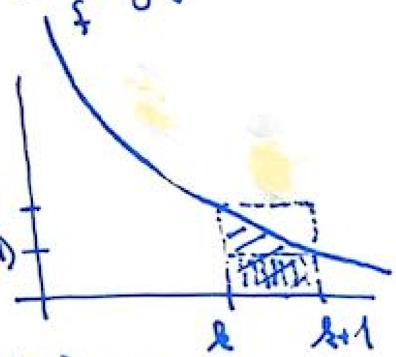
⑨ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ konverguje, neboť $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{[(k+1)!]^2 (2k)!}{(2(k+1))! \, [k!]^2} = \frac{(k+1)^2}{2(k+1)(2k+1)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{4} < 1$

a tvrzení plyne z Věty 6.6 (γ). ▨

Užitečným nástrojem k vyšetření konvergence/divergence řad je také následující integrální kritérium.

$\boxed{\text{Věta 6.7}}$ (Integrální kritérium) Buď $k_0 \in \mathbb{N}$ a $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kladná a nerostoucí na $[k_0, \infty)$. Pak

(I) $\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$ konverguje $\underset{\text{PRÁVĚ KDYŽ}}{\iff}$ $\int_{k_0}^{\infty} f(x)\,dx$ konverguje



Dk: Z monotónie (viz Obr. 1) plyne:

$$\left[\forall k \geq k_0: \quad f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq f(k+1)\right]$$

což implikuje

$$(**) \quad \boxed{\sum_{k=k_0}^{m} f(k) \geq \sum_{k=k_0}^{m} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_{k_0}^{m+1} f(x)\,dx \geq \sum_{k=k_0}^{m} f(k+1) \geq 0}$$

Odtud dokážeme obě implikace v (I).

$\boxed{\Rightarrow}$ Je-li $\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$ konvergentní, je pak posloupnost n-tých částečných součtů $\left\{\sum_{k=k_0}^{m} f(k)\right\}_{m=k_0+1}^{\infty}$ omezená, což implikuje:

fce $\boxed{n \longmapsto \int_{k_0}^{n+1} f(x)\,dx}$ je neklesající a omezená.

Tedy $\underset{\text{existuje}}{\lim_{n\to\infty} \int_{k_0}^{n} f(x)\,dx} =: \int_{k_0}^{\infty} f(x)\,dx$ konverguje.

$\boxed{\Leftarrow}$ Naopak platí z (**):

$$\sum_{k=k_0}^{m} f(k) = f(k_0) + \sum_{k=k_0}^{m-1} f(k+1) \overset{(**)}{\leq} f(k_0) + \sum_{k=k_0}^{m-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k_0) + \int_{k_0}^{m} f(x)\,dx$$

Tedy, pokud konverguje $\int_{k_0}^{\infty} f(x)\,dx$, pak ex. $\lim_{n\to\infty} \int_{k_0}^{n} f(x)\,dx$ vlastní.

Tak $\left\{\sum_{k=k_0}^{m} f(k)\right\}_{m=k_0+1}^{\infty}$ je omezená, monotónní; má tedy vlastní limitu. Tak $\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$ konverguje. ▨

Příklady (10) Pro $\alpha>1$ je $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ konvergentní, neboť

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{\alpha-1}.$$

(11) Rozhodněte, pro která $\beta>1$ je $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ konvergentní.

Řešení:

Zkoumejme $I := \int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$. Substitucí $y=\ln x$ $\left(\Rightarrow dy=\frac{dx}{x}\right)$

dostáváme

$I = \int_{\ln 2}^{\infty}\frac{dy}{y^\beta}$, který konverguje právě když $\boxed{\beta>1}$

Tedy: (dle Věty 6.7) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ konverguje pro $\beta>1$.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}=\infty$$

! Srovnej s harmonickou řadou a Příklady (3), (6) a (10).

Všimněte si, že limitní odmocninové a limitní podílové kritérium nedávají žádnou informaci o konvergenci řad (či jejich divergenci), pokud

(+) $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=1$ respektive $\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=1$.

Pokud nám vyjde některá z podmínek (+), tak musíme postupovat pomocí jemnějších kritérií (třeba integrálního).

Existuje spousta dalších kritérií. V odmocninovém či podílovém kritériu jsme (v důkazu) porovnávali "naši" řadu s geometrickou řadou. V Raabeho kritériu se daná řada porovná s řadou $\sum\frac{1}{n^\alpha}$; v Gaussově kritériu se zase daná řada porovná s $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$, atd.

Prvky konvergentní řady musí jít (pro $k\to\infty$) k nule, viz nutná podmínka Věta 6.1. O tom, zda řada konverguje, tedy rozhoduje jak rychle jdou a_k k nule. Víme, že $a_k=\frac{1}{k}$

nebo $a_k = \frac{1}{k \ln k}$ nestačí. Myšlenku rozpoznat, zda prvky řady jdou dostatečně rychle k nule, využívá Cauchyho kondenzační kritérium. Tato kritéria do základního kursu nebudeme uvádět, ale přidáme je pro podšence formou dodatku. Příští týden se zaměříme na obecné řady čísel; opustíme tedy předpoklad, že $a_k \geq 0 \ \forall k \geq k_0$, který hrál v celé kapitole podstatnou roli.

DODATEK (aneb ČTENÍ NAVÍC)

Věta D.1 (Kondenzační kritérium) Nechť $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost. Pak

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konverguje} \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konverguje}$$

Dk plyne z následujících horních a dolních odhadů pro S_{2^n}, tj. částečných součtů posloupnosti $\{a_k\}$:

Horní odhad:

- $$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^{n-1}} + \dots + a_{2^n - 1})$$
$$\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}}$$

Dolní odhad:

- $$a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \dots + a_8) + \dots + (a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n})$$
$$\geq a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^{n-1} a_{2^n}$$

Ad $\Rightarrow$ Pokud $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, tak jsou omezené S_{2^n} nalevo dolního odhadu a jsou tak omezeny částečné součty řady $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$. Tedy tato řada konverguje.

Ad $\Leftarrow$ V tomto případě plyne tvrzení z horního odhadu. ⊠

6.2 ALTERNUJÍCÍ A OBECNÉ ŘADY

Def. Nechť $a_n \in \mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$. Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně pokud $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje.

Pozorování: Úloha zjistit zda řada komplexních či reálných čísel konverguje absolutně nás převádí do předchozí kapitoly 6.1. neboť $|a_n|_{\mathbb{C}} \geq 0$ i $|a_n|_{\mathbb{R}} \geq 0$.

Naším cílem je zkoumat, kdy řada $\sum a_k$ konverguje. (1) Ukážeme, a to bude náš první dílčí cíl, že pokud řada konverguje absolutně, pak konverguje. Schématicky

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}$$

Pak si (2) ukážeme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konverguje. Posloupnost $a_n := (-1)^n \frac{1}{n}$ je tak příkladem, kdy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje (viz harmonická řada, Příklad (3)). Přímočarým zobecněním vyšetřování konvergence řady $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ bude Leibnitzovo kritérium. (3) Jeho důkaz bude náš třetí dílčí cíl v této sekci.

Věta 6.8. (B.-C. podmínka pro řady) Platí:

(5) řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ \forall n, m \geq n_0,\ m \geq n : \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$.

Dk: Levá strana ekvivalence (5) je dle definice $\iff$ limita $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ existuje a je vlastní $\iff$ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku $\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq n_0)\ |s_n - s_m| < \varepsilon$, přičemž lze předpokládat bez újmy obecnosti, že $m \geq n$. Pak $|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right|$. Tvrzení je dokázáno. ☒

Věta 6.9 (Absolutní konvergence $\Rightarrow$ Konvergence)

Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

(Dk) Z předpokladu a B-C podmínky pro řadu $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ víme, že:

(⊛) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\left(\forall m \geq n \geq n_0 : \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon\right)$.

Protože
$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta\text{-nerovnost} \\ \text{pro konečný počet sčítanců}}}{\leq} \sum_{k=n}^{m} |a_k|$$

tak, že (⊛) plyne B-C podmínka pro řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje. ▨

Definice Buď $a_n \geq 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ se nazývá <u>alternující</u>.

Příklad (12) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ je alternující. Ukážeme, že je <u>konvergentní</u>. Posloupnost $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy <u>příkladem posloupnosti</u>, která <u>konverguje</u>, <u>ale</u> <u>nekonverguje absolutně</u> (viz Příklad (3)).

(Dk, že $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konverguje) Využijeme skutečnosti, že posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající. Pro liché a sudé členy posloupnosti n-tých částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$s_{2n+1} = 1 \underbrace{- \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{<0} \underbrace{- \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}_{<0} - \dots \underbrace{- \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}}_{<0}$$

$$s_{2n} = \underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}_{>0} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}}_{>0}$$

Tedy $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí.

Obě posloupnosti tedy mají limitu:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} =: L \qquad \text{a} \qquad \lim_{n\to\infty} s_{2n} =: S$$

Navíc: $L \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ a $S \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ a $s_{2n+1}-s_{2n} = \frac{1}{2n+1} \to 0$

Tedy $0 = \lim_{n\to\infty}(s_{2n+1}-s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n}$ neboť výraz vpravo má smysl

Odsud $S = L$

a také $\lim_{n\to\infty} s_n = S$, tzn. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ konverguje.

Výše uvedený důkaz konvergence alternující řady $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ lze zobecnit pro libovolnou posloupnost $\{(-1)^n a_n\}_{n=1}^{\infty}$ která splňuje podmínky: $a_n \geq 0$, $n < m \Rightarrow a_n \geq a_m$, a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dostáváme tak Leibnizovo kritérium.

$\boxed{\text{Věta 6.10}}$ (Leibnizovo kritérium pro alternující řady)

Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost kladných čísel. Platí:

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ konverguje $\iff \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Jinými slovy: nutná podmínka konvergence řad (tj.) je podmínkou postačující pro klesající nezáporné posloupnosti.

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ Plyne z Věty 6.1 (nutná podmínka konvergence řad)

$\boxed{\Leftarrow}$ Platí:

- $s_{2(n+1)} = s_{2n} + (-1)^{2n+2} a_{2n+1} + (-1) a_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{a_{2n+1} - a_{2n+2}}_{\geq 0} \geq s_{2n} \geq \dots$

  $\geq s_2 = -a_2 + a_1 \geq 0$

- $s_{2(n+1)+1} = s_{2n+1} + (-1)^{2n+3} a_{2n+2} + (-1)^{2n+4} a_{2n+3} = s_{2n+1} \underbrace{- a_{2n+2} + a_{2n+3}}_{\leq 0}$

  $\leq s_{2n+1} \dots \leq s_1 \leq a_1$

- $s_{2n+1} = s_{2n} + (-1)^{2n+2} a_{2n+1} = s_{2n} + \underbrace{a_{2n+1}}_{>0} > s_{2n}$

Tedy:

- $\boxed{0 \leq s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq a_1}$
- $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající.

Posloupnosti $\{s_{2n}\}$ a $\{s_{2n+1}\}$ jsou tedy omezené a monotónní.
Jsou tedy konvergentní a existují $L, S \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = S \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = L. \quad \text{a} \quad L \geq S.$$

Navíc,

$$L - S = \lim(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0.$$

Tedy $L = S$ a tvrzení je dokázáno. Q.E.D.