L6 LAPLACEOVA A POISSONOVA RCE

$$-\Delta u = 0 \qquad\qquad -\Delta u = f$$

Rce jsou uvažovány v $\mathbb{R}^d$ nebo v $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, a v druhém případě pak přidám okrajovou úlohu.

Již víme, že F. Ř. těchto rovnic má tvar:

- $\boxed{d=2}$ $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \log|x|$ logaritmický potenciál
- $\boxed{d=3}$ $\phi(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$ Newtonův potenciál
- $\boxed{d>2}$ $\phi(x) = \frac{1}{d(d-2)\,|B_1(0)|\,|x|^{d-2}}$

Pozorujme $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|x| = \frac{x_i}{|x|}\right)$, že pro libovolné $d \geq 2$ platí:

- ϕ je radiální
- $|\nabla\phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^{d-1}}$
- $|\nabla^2\phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^d}$

Připomeň
- $d\,|B_r(x)| = |\partial B_r(x)|\, r$ $x \in \mathbb{R}^d$
- $\alpha(d)$ ..... velikost/objem/míra 1-ové koule v $\mathbb{R}^d$; $\alpha(d) = |B_1($

Témata
- Věty o střední hodnotě a jejich důsledky
- Greenova fce. Věta o třech potenciálech
- $\Delta u = f$ a úlohy variačního počtu. Energetické metody.

L6.1 VZORCE S PRŮMĚRY neboli VĚTY O STŘEDNÍ HODNOTĚ

Věta 5 Je-li $u \in C^2(\Omega)$ harmonická (tzn. $\Delta u = 0$ v Ω), pak

$$u(x) = ⨍_{\partial B_r(x)} u \, dS = ⨍_{B_r(x)} u(y) \quad \text{pro } \forall B_r(x) \subset \Omega.$$

Dk Označme

$$\phi(r) := ⨍_{\partial B_r(x)} u(y) \, dS_y .$$

Pak

$$\phi(r) = ⨍_{\partial B_1(0)} u(x+rz) \, dS_z$$

a tedy

$$\phi'(r) = ⨍_{\partial B_1(0)} \nabla u(x+rz) \cdot z \, dS_z$$

$$= ⨍_{\partial B_r(x)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r} \, dS_y$$

$$= ⨍_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial n}(y) \, dS_y$$

$$\overset{\text{Gauss}}{=} \frac{r}{d} ⨍_{B_r(x)} \Delta u(y) \, dy = 0$$

Tedy $\phi(r) = \text{const}$, kterou určíme $\lim_{r \to 0} \phi(r)$

$$\phi(r) = \lim_{t \to 0} \phi(t) = u(x)$$

Tak

$$\boxed{u(x) = ⨍_{\partial B_r(x)} u \, dS} \quad (*)$$

Dále

$$⨍_{B_r(x)} u(y) \, dy = \frac{1}{\alpha(d) r^d} \int_{B_r(x)} u(y) \, dy = \frac{1}{\alpha(d) r^d} \int_0^r \left(\int_{\partial B_\rho(x)} u(y) \, dS_y \right) d\rho$$

$$= \frac{1}{r^d} \int_0^r \underbrace{\left(\frac{d\rho^{d-1}}{|\partial B_\rho(x)|} \int_{\partial B_\rho(x)} u(y) \, dS_y \right)}_{d\rho^{d-1} u(x) \text{ dle } (*)} d\rho = \frac{1}{r^d} \int_0^r d\rho^{d-1} d\rho \, u(x) = \underline{\underline{u(x)}}$$

Q.E.D.

Věta 8 (Obrácená věta o střední hodnotě)

Pokud $u \in C^2(\Omega)$ splňuje $u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y$,

pak $\Delta u = 0$.

Dk: Sporem. Kdyby u nebyla harmonická, tak pak existuje $B_r(x)$ taková, že $\Delta u > 0$ v $B_r(x)$ (Bez újmy na obecnosti, že v bodě, kde $\Delta u \neq 0$ je hodnota Δu kladná). Pak vzal A výpočty v důkazu předchozí věty 4.6 pro A předpoklad, že

$$\phi(r) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y = u(x) \quad \left(\Rightarrow \phi'(r) = 0\right)$$

plyne
$$0 = \phi'(r) = \frac{r}{d} \fint_{B_r(x)} \Delta u(y)\, dy > 0,$$
což dává spor.

Věty o střední hodnotě mají obrovský význam v analýze harmonických fcí a úloh spojených s Poissonovou rovnicí. Pomocí vět o střední hodnotě dokážeme tyto vlastnosti:

(1) Princip maxima/minima. Jednoznačnost řešení.

(2) Regularita řešení

(3) Lokální odhady v termínech "nejslabší" L^1-normy.

(4) Liouvilleova věta

(5) Analytičnost harmonických funkcí

(6) Harnackova nerovnost.

6.2 Vlastnosti harmonických fcí založených na větách o průměru.

1 Max/Min.!

Věta 7 (Princip maxima/minima) Buď $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\Delta u = 0$ v Ω. Pak

(1) $\max\limits_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max\limits_{x \in \partial\Omega} u(x)$ — Princip maxima

(2) Je-li navíc Ω souvislá a $\exists\, x_0 \in \Omega$ tak, že $u(x_0) = \max\limits_{x \in \partial\Omega} u$, pak $u \equiv$ konst. v Ω — Silný princip maxima

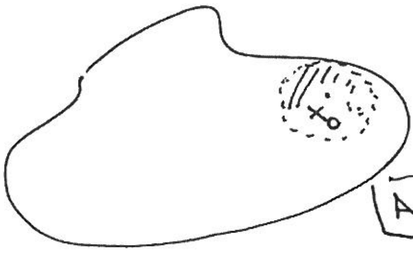
Důsledek (Nezápornost, Kladnost)
Buď u řešení $\Delta u = 0$ v Ω, $u = g$ na $\partial\Omega$ a $g \geq 0$ na $\partial\Omega$, $\in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ pak $u \geq 0$. Je-li navíc g v nějakém bodě $z_0 \in \partial\Omega$ kladné, tzn. $g(z_0) > 0$ na části hranice, pak $u > 0$ všude v Ω.

Dk věty 7 **Ad (2)** Předpokládejme, že $\exists\, x_0 \in \Omega$ tak, že $u(x_0) = M = \max\limits_{\overline{\Omega}} u$. Pak $\forall\, B_r(x_0) \subset \Omega$ platí

$$M = u(x_0) = \fint_{B_r(x_0)} u(y)\,dy \leq M$$

Rovnost však může nastat jen pokud $u(y) \equiv M$ v $B_r(x_0)$.

Odsud snadno plyne, že $u \equiv M$ v Ω.
(proč je potřeba souvislost Ω?)



Ad (1) plyne z (2).

Věta 8 Buď $g \in C(\partial\Omega)$, $f \in C(\Omega)$. Pak $\exists$ nejvýš jedno řešení úlohy $-\Delta u = f$ v Ω, $u = g$ na $\partial\Omega$.

Dk a) pomocí Věty 7.. Kdyby existovala dvě řešení u_1, u_2, pak $w := u_1 - u_2$ splňuje $-\Delta w = 0$ v Ω, $w = 0$ na $\partial\Omega$ a dle V. 7 w nabývá max. a minima na $\partial\Omega$. Tedy $w \equiv 0$ v $\Omega \Rightarrow u_1 \equiv u_2$ v Ω.

b) Energetickou metodou

Protože $w := u_1 - u_2$ splňuje $-\Delta w = 0$ v Ω, $w = 0$ na $\partial\Omega$, tak

$$0 = -\int_\Omega \Delta w \cdot w \, dx \underset{\text{Gauss}}{=} \int_\Omega |\nabla w|^2 dx \Rightarrow \nabla w \equiv 0 \text{ v } \Omega$$

$$\Rightarrow w \equiv \text{konst}$$

$$\overset{w=0 \text{ na } \partial\Omega}{\Rightarrow} w \equiv 0.$$

$\blacksquare$

$\boxed{\boxed{2} \text{ Hladkost}}$

$\boxed{\text{Věta}}$ 9. (o regularitě) Nechť $u \in C(\Omega)$ splňuje

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y) \, dS_y = \fint_{B_r(x)} u(y) \, dy \qquad \forall B_r(x) \subset \Omega,$$

pak $u \in C^\infty(\Omega)$.

Dk Buď $\varepsilon > 0$ dáno. Označ $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega;\ \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$.

Pro $x \in \Omega_\varepsilon$: $u^\varepsilon := \omega_\varepsilon * u$ kde $\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \omega\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)$

$\omega \in C^\infty(\mathbb{R})$

$\omega \equiv 0$ vně $(-1,1)$

$u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.

Ukážeme, že $u = u^\varepsilon$ v Ω_ε

$$\underline{\underline{u^\varepsilon(x)}} = \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{B_\varepsilon(x)} \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) \, dy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^d} \int_0^\varepsilon \omega\left(\frac{\varrho}{\varepsilon}\right) \left(\int_{\partial B_\varrho(x)} u(y) \, dS_y \right) d\varrho$$

$$= \frac{u(x)}{\varepsilon^d} \int_0^\varepsilon \underbrace{|\partial B_\varrho(x)|}_{(d\,\alpha(d)\,\varrho^{d-1})} \omega\left(\frac{\varrho}{\varepsilon}\right) d\varrho$$

$$= u(x) \frac{1}{\varepsilon^d} \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_\varrho(x)} dS_y \right) \omega\left(\frac{\varrho}{\varepsilon}\right) d\varrho$$

$$= u(x) \underbrace{\int_{B_\varepsilon(x)} \omega_\varepsilon(y) \, dy}_{=1} = \underline{\underline{u(x)}}$$

$\blacksquare$

$\boxed{3}$ **lokální odhady** přesné odhady derivací harmonických funkcí

Věta 10 Je-li $\Delta u = 0$ v Ω. Pak $\forall B_\rho(x_0) \subset \Omega$ $\forall \alpha : |\alpha| = k$

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{\rho^{d+k}} \|u\|_{L^1(B_\rho(x_0))}$$

Přičemž

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(d)}, \quad C_k = \frac{(2^{d+1} d k)^k}{\alpha(d)} \qquad (k = 1, \dots)$$

Dk Indukcí $\boxed{k=0}$ $u(x_0) = \fint_{B_\rho(x_0)} u(y)\,dy \leq \|u\|_{L^1(B_\rho(x_0))} \frac{1}{\alpha(d)\rho^d}$

$\boxed{k=1}$ Pozorujme, že $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ splňuje $\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \equiv 0$ v Ω.

Tedy dle věty o ϕ:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0)\right| = \left| \fint_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dy \right|$$

$$= \left| \frac{2^d}{\alpha(d)\rho^d} \int_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dy \right|$$

$$= \left| \frac{2^d}{\alpha(d)\rho^d} \int_{\partial B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u\,\nu_i\,dS_y \right|$$

$$\leq \frac{2}{\rho} d \quad \|u\|_{L^\infty(\partial B_{\frac{\rho}{2}}(x_0))}$$

Je-li $x \in \partial B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)$, pak $B_{\frac{\rho}{2}}(x) \subset B_\rho(x_0)$ a tak dle případu $\boxed{k=0}$

$$u(x) \leq \frac{2^d}{\alpha(d)\rho^d} \|u\|_{L^1(B_\rho(x_0))}$$

Tedy

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{2^{d+1} d}{\alpha(d)\rho^{d+1}} \|u\|_{L^1(B_\rho(x_0))}$$

což dokazuje tvrzení pro $|\alpha| = k = 1$

$\boxed{k \geq 2}$ indukcí (vynecháno) $\blacksquare$

[4] Liouvilleova věta – NEEXISTUJÍ NETRIVIÁLNÍ OMEZENÉ HARMONICKÉ FUNKCE v $\mathbb{R}^d$.

Věta 11 Buď u harmonická a omezená v $\mathbb{R}^d$. Pak $u \equiv$ konst.

Dk Buď $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\rho > 0$. Pak

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{2^{d+1} d}{\alpha(d)\, \rho^{d+1}} \int_{B_\rho(x_0)} |u(y)|\, dy$$

$$\leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \frac{2^{d+1} d}{\rho} \to 0 \quad \text{pro } \rho \to +\infty.$$

Tedy $\nabla u \equiv 0$ v $\mathbb{R}^d$, což implikuje $u \equiv$ konst. ∎

Věta 11* Je-li $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ s komp. nosičem. Pak, pro $d \geq 3$, každé omezené řešení $-\Delta u = f$ má tvar

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\Phi}_{\text{Fund. řeš.}}(x-y) f(y)\, dy + \underbrace{C}_{\text{konst.}} \qquad (x \in \mathbb{R}^d)$$

Dk Protože $\Phi(x) \to 0$ pro $|x| \to \infty$ pro $d \geq 3$, tak $\tilde{u}(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x-y) f(y)\, dy$ řeší $-\Delta u = f$ v $\mathbb{R}^d$ a je omezené. Je-li u jiné omezené řešení, pak $w := u - \tilde{u}$ je konstanta, dle Liouvilleovy věty. ∎

* V $d=2$, může být $\tilde{u}$ neomezené.

[5] Analytičnost = rozvinutelnost do mocninné řady

Věta 12 Je-li u harmonická v Ω, pak je analytická v Ω.

Dk
Cíl: Pro lib. $x_0 \in \Omega$ sestrojit na okolí x_0 konvergentní mocninnou řadu.

Buď $\rho := \frac{1}{4} \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Pak $M := \frac{1}{\alpha(d) \rho^d} \|u\|_{L^1(B_{2\rho}(x_0))} < +\infty$.

Protože $B_\varrho(x) \subset B_{2\varrho}(x_0) \subset \Omega$ pro $\forall\, x \in B_\varrho(x_0)$, tak dle věty 10

$$\| D^\alpha u \|_{L^\infty(B_\varrho(x_0))} \le \left(\frac{2^{d+1} d}{\varrho}\right)^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|} M$$

Protože $\frac{k^k}{k!} < e^k \Rightarrow |\alpha|^{|\alpha|} \le e^{|\alpha|} \cdot |\alpha|!$

Dle Multinomiální věty

$$d^k = (\underbrace{1 + \dots + 1}_{d \text{ sčítanců}})^k = \sum_{|\alpha| = k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$$

máme

$$\underline{|\alpha|! \le d^{|\alpha|} \alpha!}$$

Tedy

$$\boxed{\| D^\alpha u \|_{L^\infty(B_\varrho(x_0))} \le CM \frac{(2^{d+1} d^2 e)^{|\alpha|}}{\varrho^{|\alpha|}} \alpha!}$$

Taylorova řada pro u v x_0 má tvar $\sum_\alpha \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$

Ukážeme, že řada konverguje pokud

$$|x - x_0| < \frac{\varrho}{2^{d+2} d^3 e}$$

Zbytek R_N splňuje

$$R_N(x) = u(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0)(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} = \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0)^\alpha}{\alpha!}$$

$t \in (0,1)$

$$|R_N(x)| \le CM \sum_{|\alpha|=N} \frac{(2^{d+1} d^2 e)^N}{\varrho^N} \frac{\varrho^N}{(2^{d+2} d^3 e)^N} = CM \sum_{|\alpha|=N} \frac{1}{2^N d^N}$$

$$\le CM\, d^N \frac{1}{2^N d^N} = \frac{CM}{2^N} \to 0 \text{ pro } N \to \infty. \quad \boxtimes$$

Důkaz:

$$(x^1 + \dots + x^d)^k = \sum_{|\alpha| = k} \binom{|\alpha|}{\alpha} x^\alpha$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$$

$$\binom{|\alpha|}{\alpha} = \frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \dots \alpha_d!}, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$$

[8] Harnackova nerovnost

Věta 13 (Harnackova $\le$). Pro každou (souvislou otevřenou) $V \subset \overline{V} \subset \Omega$ (V omezená, není-li Ω omezená) $\exists\, C$ (závisí jen na V) tak, že

$$\sup_V u \le C \inf_V u \qquad \forall\, u \text{ harmonické v } \Omega \text{ nezáporné}$$

Pozorování ekvivalentně

$$\frac{1}{C} u(y) \le u(x) \le C u(y) \qquad \forall\, x,y \in V$$

tzn. hodnoty nezáporných harmonických fcí jsou srovnatelné

intuitivně: protože V má kladnou vzdálenost od hranice, je prostor pro zprůměrování hodnot určit.

Dk: Buď $\varrho := \frac{1}{4} \operatorname{dist}(V, \partial\Omega)$. Zvol. $x,y \in V : |x-y| < \varrho$.

Pak
$$u(x) = \fint_{B_{2\varrho}(x)} u \, dz \overset{u \ge 0}{\ge} \frac{1}{\alpha(d)\, 2^d \varrho^d} \int_{B_\varrho(y)} u \, dz = \frac{1}{2^d} \fint_{B_\varrho(y)} u \, dz$$

$$= \frac{1}{2^d} u(y)$$

Tedy: $\forall\, x,y \in V : |x-y| < \varrho$ $\boxed{\frac{1}{2^d} u(y) \le u(x) \le 2^d u(y)}$

Protože V je souvislé, $\overline{V}$ kompaktní, lze pokrýt V konečně koulemi $\{B_i\}_{i=1}^N$ o poloměrech $\frac{\varrho}{2}$ a $B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset$, $i = 2, \dots, N$.

Tak
$$u(x) \ge \frac{1}{2^{d(N+1)}} u(y) \qquad \forall\, x,y \in V$$

☒