

Témata:

- 1) Nekomogenní transportní rovnice
- 2) Odvození d'Alembertova vzorečku pomocí transportních rovnic
- 3) Fundamentální řešení pro vlnovou rovnici a řešení Cauchyho úlohy pomocí F.T. v distribucích.

transportu  
Nehomogenní rovnice s roztaženými koeficienty

Nyní si vrátíme, jak se pomocí metody charakteristik vyřeší následující rovnice/úloha:

$$(11) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{b} \cdot \nabla u + cu = f \quad \text{v } (0, T) \times \mathbb{R}^d$$

$$(12) \quad u(0, \cdot) = u_0 \quad \text{v } \mathbb{R}^d$$

kde  $\vec{b} \in \mathbb{R}^d$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $u_0: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  a  $f: (0, T) \times \mathbb{R}^d$  jsou DATA úlohy.

Vydáme opět A charakteristického systému  $\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = b \end{cases}$ , tedy  
 dáme  $\begin{cases} t = s + \bar{t} \\ x = bs + \bar{x} \end{cases}$  pro  $(\bar{t}, \bar{x}) \in (0, T) \times \mathbb{R}^d$  libovolně

(+) Definujeme  $z(s) = u(s + \bar{t}, bs + \bar{x})$

Nyní neplatí  $\dot{z}(s) = 0$ , ale stále platí  $\dot{z}(s) = \frac{\partial u}{\partial t}(s + \bar{t}, bs + \bar{x}) + \vec{b} \cdot \nabla u(\dots)$

Tedy z (11) plyne

$$\dot{z}(s) + cz(s) = f(s + \bar{t}, bs + \bar{x})$$

odsud ( $e^{cs}$  je integrovatelný faktor) plyne

$$(z(s)e^{cs})' = f(s + \bar{t}, bs + \bar{x})e^{cs}$$

Integrujeme přes s od  $-\bar{t}$  do 0 dodekovaně

$$z(0) = z(-\bar{t})e^{-c\bar{t}} + \int_{-\bar{t}}^0 f(s + \bar{t}, bs + \bar{x}) \cdot e^{cs} ds$$

Dosažením (+) a substitucí  $s' = s + \bar{t}$  v integrálu dodekovaně

$$u(\bar{t}, \bar{x}) = u_0(\bar{x} - b\bar{t})e^{-c\bar{t}} + \int_{\bar{t}}^0 e^{c(s-\bar{t})} f(s, b(s-\bar{t}) + \bar{x}) ds$$

neboli

$$(NT) \quad u(t, x) = u_0(x - bt)e^{-ct} + \int_0^t e^{c(s-t)} f(s, b(s-t) + x) ds$$

což je hledané řešení.

Všimněte si role kladných/záporných koeficientů c a jeho vlivu na řešení ( $c > 0$  tlumí,  $c < 0$  zesiluje) veličnost dat exponenciálně

OPĚT: PRVHY NAD t a x JSOU TUKLI OD POČÁTKU VYNECHAT.

Odvození d'Alembertova vzorce pro rovnici vlny  
transportní rovnici

Ev 3/2

Víme :  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + k \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x}\right) u$  (i)

Označme  $v := \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial u}{\partial x}$  (ii)

Porad u  $\partial_t u = 0$ , pak  $\frac{\partial v}{\partial t} + k \frac{\partial v}{\partial x} = 0$  a platí  $v(t, x) = G(x - kt)$  (iii)

Tedy z (ii) a (iii), u splňuje

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial u}{\partial x} = G(x - kt)$$

Nyní bud' využij' vzoreček (NT) nebo opět provedu výpočet:

$$\left. \begin{matrix} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = -k \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} t(s) = s + t \\ x(s) = -ks + x \end{matrix} \quad \text{a} \quad z(s) = u(s+t, x-ks) \text{ splňuje}$$

$$\dot{z}(s) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial u}{\partial x}\right)(s+t, x-ks) = G(x-ks - k(t+s)) =$$

Integruj' od  $-t$  do  $0$  :  $u(t, x) = u_0(x+kt) + \int_{-t}^0 G(x-ks - k(t+s)) ds$

$$u(t, x) = u_0(x+kt) - \frac{1}{2k} \int_{x+kt}^{x-kt} G(y) dy$$

$$\begin{matrix} 2ks = x - y - kt \\ ds = -\frac{1}{2k} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} s = -t \Rightarrow \\ y = x + kt \\ s = 0 \Rightarrow \\ y = x - kt \end{matrix}$$

a tedy

$$(*) \quad u(t, x) = u_0(x+kt) + \frac{1}{2k} \int_{x-kt}^{x+kt} G(y) dy$$

- řeší při  $\partial_t u = 0$
- splňuje  $u(0, x) = u_0(x)$

Zbývá splnit  $\partial_t u(0, \cdot) = u_1$ . Ausdr:

$$\partial_t u(t, x) = k u_0'(x+kt) + \frac{1}{2} [G(x+kt) + G(x-kt)]$$

$t=0$   $u_1(x) = k u_0'(x) + G(x) \Rightarrow G(x) = u_1(x) - k u_0'(x)$

Po dosazení výsledku do (\*), máme:

$$u(t, x) = \frac{u_0(x+kt) + u_0(x-kt)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-kt}^{x+kt} u_1(y) dy$$



Všuvá rovnice v distribuční. Fundamentální řešení

Přípomínka  $L$  ... lineárně diferenciální operátor, který může generovat jak ODR tak PDR (obecně)

Fundamentální řešení je distribuční splňující  $u_F \in \mathcal{D}$  nebo nosí  $\varphi'$

$L u_F = \delta$

► Renné potrobování

Derivace  $H(t) = \delta$  v  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

kde  $H(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

je Heavisidova funkce splňující / usilující

$\begin{cases} y'(t) = 0 \\ y(0+) = 1 \\ y = 0 \text{ pro } t < 0 \end{cases}$

Iterativní : Ji-li  $Lx(t) := x^{(m)}(t) + a_{m-1}x^{(m-1)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t)$  (obvyčejný lin. dif. operátor)

a pokud  $z(t)$  řešení

$\begin{cases} Lz(t) = 0 \text{ v } (0, \infty) \\ z(0+) = z'(0+) = \dots = z^{(m-2)}(0+) = 0 \\ z^{(m-1)}(0+) = 1 \end{cases}$  (83)

has  $x_F = H(t)z(t)$  řešení

$Lx_F = \delta_0(t)$  v  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

OVĚŘTE!

► Význam fundamentálního řešení pro obecný lin. dif. operátor (obvyč. / parc.)

Řešení  $Lx(t) = f$  v  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  nadeš konvoluce  $f$  s  $x_F$

Vševok  $L(x_F * f) = Lx_F * f = \delta * f = f$   
 linearity a vlastnosti konvoluce o derivování

K ověření je třeba uvažovat  $\langle Lx_F | \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

Absol:  $\langle Lx_F | \varphi \rangle = \langle x_F^{(m)} | \varphi \rangle + a_{m-1} \langle x_F^{(m-1)} | \varphi \rangle + \dots + a_1 \langle x_F' | \varphi \rangle + a_0 \langle x_F | \varphi \rangle$

definice distribuční derivace

$= (-1)^m \langle x_F | \varphi^{(m)} \rangle + (-1)^{m-1} a_{m-1} \langle x_F | \varphi^{(m-1)} \rangle + \dots - a_1 \langle x_F | \varphi' \rangle + a_0 \langle x_F | \varphi \rangle$

$x_F \in \mathcal{L}_{loc}^1 \Rightarrow$  neg. distribuční  $x_F = 0$  na  $(-\infty, 0)$

$= (-1)^m \int_0^{+\infty} z(t) \varphi^{(m)}(t) dt + (-1)^{m-1} a_{m-1} \int_0^{+\infty} z(t) \varphi^{(m-1)}(t) dt + \dots - \int_0^{+\infty} z(t) (a_1 \varphi' - a_0 \varphi) dt$   
 $= \int_0^{+\infty} Lz(t) \varphi(t) dt + \underbrace{A^{(m-1)}}_1(0) \varphi(0) = \varphi(0) = \langle \delta_0 | \varphi \rangle$

per partes +  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

(83)





Linearity (princip superpozice) vlnové rovnice možnými rozdělít řešení Cauchyho úlohy

(Wcauchy)  $\square u = f$  v  $(0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ ,  $u(0, \cdot) = u_0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}(0, \cdot) = u_1$  v  $\mathbb{R}^d$

má tři jednodušší úlohy:

|  |  |   |
|--|--|---|
| <p>I <math>\square u = 0</math> v <math>(0, \infty) \times \mathbb{R}^d</math><br/> <math>u(0, \cdot) = u_0</math><br/> <math>\frac{\partial u}{\partial t}(0, \cdot) = 0</math> } v <math>\mathbb{R}^d</math></p> | <p>II <math>\square u = 0</math> v <math>Q_{\infty}</math><br/> <math>u(0, \cdot) = 0</math><br/> <math>\frac{\partial u}{\partial t}(0, \cdot) = u_1</math> } v <math>\mathbb{R}^d</math></p> | <p>III <math>\square u = f</math> v <math>Q_{\infty}</math><br/> <math>u(0, \cdot) = 0</math><br/> <math>\frac{\partial u}{\partial t}(0, \cdot) = 0</math> } v <math>\mathbb{R}^d</math></p> |
|--|--|---|

Ukážeme si, že řešení je dáváno vztahem

(RWcauchy)  $u(t, x) = \partial_t (u_0 * e^{i\Pi}) + u_1 * e^{i\Pi} + f * \underbrace{(t(t) e^{i\Pi})}_{X_F}$

konvoluce vztáhneme k  $x$

konvoluce vztáhneme k  $t$  i  $x$ .

kde  $e^{i\Pi}$  "fund. rěš" řešit  $\square e^{i\Pi} = 0$  v  $Q_{\infty}$ ,  $e^{i\Pi}(0, \cdot) = 0$  v  $\mathbb{R}^d$ ,  $\frac{\partial e^{i\Pi}}{\partial t}(0, \cdot) = \delta_0$  v  $\mathbb{R}^d$

Nyní učiníme potaroudu, které (pomocí F.T.)

A dají do souvislosti úlohy I a II

B dají do souvislosti I, II na jedné straně s úlohou III

Ad A) Souvislost se snadno uvidíme přes Fourierovu transformaci (F.T.).

Aplikací F.T. na  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$  dostaneme

(W.F.T.)  $\left( \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u} \right) (t, \xi) = 0$

a počáteční podmínky pro úlohy I a II dávají:

(PP)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{I} \quad \hat{u}(0, \xi) = \hat{u}_0(\xi) \\ \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0, \xi) = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{II} \quad \hat{u}(0, \xi) = 0 \\ \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0, \xi) = \hat{u}_1(\xi) \end{array} \right\}$

Řešení (W.F.T.) v  $\mathbb{R}^d$  má tedy tvar

$\hat{u}(t, \xi) = A(\xi) \sin(2\pi |\xi| t) + B(\xi) \cos(2\pi |\xi| t)$

a počáteční podmínky (PP) implikují:

Ad I  $A(\xi) = 0$ ,  $B(\xi) = \hat{u}_0(\xi)$   
 Ad II  $B(\xi) = 0$ ,  $A(\xi) = \frac{\hat{u}_1(\xi)}{2\pi |\xi| k}$

tedy  $\hat{u}^{(I)}(t|\xi) = \hat{u}_0(\xi) \cos(2\pi k|\xi|t) = \hat{u}_0(\xi) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\sin(2\pi k|\xi|t)}{2\pi k|\xi|} \right)$   
 $\hat{u}^{(II)}(t|\xi) = \hat{u}_1(\xi) \frac{\sin 2\pi k|\xi|t}{2\pi k|\xi|}$

Speciální tedy vidíme, ů:

$e^{(I)}, e^{(II)}$  dává jako distributivní všem úloh

$$\left[ \begin{array}{l} \square e^{(I)} = 0 \quad \text{v } Q_{\infty} \\ e^{(I)}(0, \cdot) = \delta_0 \\ \frac{\partial e^{(I)}}{\partial t}(0, \cdot) = 0 \end{array} \right] \text{ v } \mathbb{R}^d$$

$$\left[ \begin{array}{l} \square e^{(II)} = 0 \quad \text{v } Q_{\infty} \\ e^{(II)}(0, \cdot) = 0 \\ \frac{\partial e^{(II)}}{\partial t}(0, \cdot) = \delta_0 \end{array} \right] \text{ v } \mathbb{R}^d$$

Splňují:  $\hat{e}^{(I)} = \frac{\partial}{\partial t} \hat{e}^{(II)}$   
 $e^{(I)} = \frac{\partial}{\partial t} e^{(II)}$

což dává vztah  
 Znam-li  $e^{(II)}$ , vím  
 jak urobiť  $e^{(I)}$ .

Ad 13) Hledáme fundamentální řešení  $x_F$ :  $\square x_F = \delta_0(t) \otimes \delta_0(x)$  v  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d+1})$

aplikací F.T. v podobu dostaneme

$$\left[ \frac{\partial^2 \hat{x}_F}{\partial t^2} + 4\pi^2 k^2 |\xi|^2 \hat{x}_F = \delta_0(t) \right]$$

což pro dané  $\xi$  je  
 ODR 2. řádu, pro  
 které hledám fundamentální  
 řešení.

Dle nového učení (viz str. CV 3/3) viděl  
 a všiml si počátečních úloh pro ODR:

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \hat{e}^{(II)}}{\partial t^2} + 4\pi^2 k^2 |\xi|^2 \hat{e}^{(II)} = 0 \\ \hat{e}^{(II)}(0, \xi) = 0 \\ \frac{\partial \hat{e}^{(II)}}{\partial t}(0, \xi) = 1 \end{array} \right]$$

$\hat{x}_F$  pomocí útee

pro jme si navíc  
 řešení  $\hat{e}^{(II)}$  je  
 zřejmá porovná  
 úloh.

Přičemž

$$\hat{x}_F(t|\xi) = H(t) \hat{e}^{(II)}(t|\xi) \stackrel{\text{F.T. vzhledem k } x}{=} H(t) e^{(II)}(t|x)(\xi)$$

což dává

$$x_F(t|x) = H(t) e^{(II)}(t|x)$$

TAK JSME UKÁZALI PLATNOST (ŘW<sub>cauchy</sub>).

